МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$

$=\sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2\beta-1+1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=$

$=2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta\cdot(-\frac{1}{\sqrt{17}})=-\frac{8}{17} \Longrightarrow \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-(\frac{4}{\sqrt{17}})^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|:\frac{1}{\sqrt{17}}$

⊛ $4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$; $\sin 2\alpha=x$; $\cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}$

$4x\pm\sqrt{1-x^2}=-1$

$-1-4x=\mp\sqrt{1-x^2}\ \Big|\ \wedge 2$

$16x^2+8x+1=1-x^2$

$17x^2+8x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \Longrightarrow \cos 2\alpha=-1\ (\cos 2\alpha=1 \text{ не подходит в } ⊛) \\ x=-\frac{8}{17} \Longrightarrow \cos 2\alpha=\frac{15}{17}\ (\cos 2\alpha=-\frac{15}{17} \text{ не подходит в } ⊛) \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$:

⊙ $4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$; $\sin 2\alpha=x$ $\cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}$

$4x+1=\pm\sqrt{1-x^2}\ \Big|\ \wedge 2$

$16x^2+8x+1=1-x^2$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \Longrightarrow \cos 2\alpha=1\ (\cos 2\alpha=-1 \text{ не подходит в } ⊙) \\ x=-\frac{8}{17} \Longrightarrow \cos 2\alpha=-\frac{15}{17}\ (\cos 2\alpha=\frac{15}{17} \text{ не подходит в } ⊙) \end{array}\right.$

получаем: $\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = \pm 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \\ \cos 2\alpha = \pm \frac{15}{17} \end{cases}$

$tg\, 2\alpha \in \left\{ 0; +\frac{8}{15}; -\frac{8}{15} \right\}$; $tg\, 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. Т.к. $tg\,\alpha$ определён, то $\cos\alpha \neq 0$, тогда $tg\, 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ (: $\cos^2\alpha$)

$tg\alpha = x$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2x}{1-x^2} = 0 \\ \frac{2x}{1-x^2} = \frac{8}{15} \\ \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{8}{15} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x = \frac{8}{15} - \frac{8}{15}x^2 \\ 2x = \frac{8}{15}x^2 - \frac{8}{15} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x^2 + 15x - 4 = 0 & (1) \\ 4x^2 - 15x - 4 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$4x^2 \pm 15x - 4 = 0$ (1): $x = \frac{-15 \pm 17}{8} \Rightarrow x_1 = -4;\ x_2 = \frac{1}{4}$

$D = 225 + 64 = (17)^2$; (2): $x = \frac{15 \pm 17}{8} \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = -\frac{1}{4}$

Итого: $tg\alpha \in \left\{-4; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; 4\right\}$

$3^{\log_4 t} + t \ge t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} - \frac{1}{5^{-\log_4 t}} \geqslant -t$

Ответ: $tg\alpha \in \left\{-4; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; 4\right\}$

№ 3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$;

$\boxed{\begin{array}{l} ОДЗ: x^2 + 6x > 0 \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x^2 + 6x \neq 1;\ x \neq -3 \pm \sqrt{10} \end{array}}$

Пусть $x^2 + 6x = t$; На одз $|t| = t$;

$3^{\log_4 t} + t \geqslant t^{\log_4 5}$;

$a^k \cdot b^k = ab^k$

$15^{\log_4 t} \geqslant -t$

$\frac{1}{t^{\log_4 3}} + t^{\log_4 4} \geqslant t^{\log_4 5}$; $| \cdot t^{\log_4 3}$, как на заведомо положительное.

$1 + t^{\log_4 12} \geqslant t^{\log_4 15}$

$7^{\log_4 5} + 7 \geqslant 7$

$1 \geqslant t^{4}$

$3^{\log_4}$

$\left(\frac{\log_3 7}{\log_3 4}\right) + 7 \geqslant$

3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4 |x| + \log_4 |x+6|} + |x+6||x| \geqslant |x+6|^{\log_4 5} \cdot |x|^{\log_4 5}$ $15^{\log_4 t} \geqslant -t \cdot 5^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t} + t \geqslant t^{\log_4 5}$

$t \geqslant \frac{1}{5^{\log_4 t}} - 3^{\log_4 t}$ $| \cdot 5^{\log_4 t}$ 3

$3^{\log_4 t} - t^{\log_4 5}$

$5^{\log_4 t} \cdot t \geqslant 1 - 15^{\log_4 t}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{1}{2(x-1)} + 2 \geq ax+b \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

Зарисуем графики функций ① и ② на промежутке $(1;3]$

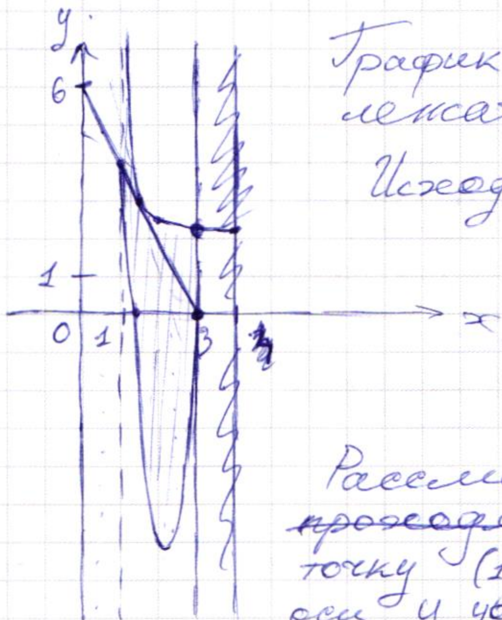


График $ax+b$ должен полностью лежать в заштрихованной области.

Исходный график $(ax+b)$ – прямая, с отрицательным коэф. (a)

(Значение в 1 всегда больше значения в 3)

Заметим, что $a=-2$, $b=6$ нам подходит, при этом $-2x+6$ касается $\frac{1}{2(x-1)}+2$.

Рассмотрим меньшие значения b, при ~~проходящие~~ которых график проходит через точку $(1;4)$. Т.к. угол наклона относительно оси y увеличивается, то график начинает пересекать $\frac{1}{2(x+1)}+2$ (Аналогично для графиков проходящих через $(1;k)$, $k>4$)

Теперь заметим, что помимо касания $\frac{1}{2(x-1)}+2$ прямая пересекает $8(x-3)(x-\frac{5}{4})$ в точке $(3;0)$. Тогда при увеличении b и уменьшении a так, чтобы график не пересекал $\frac{1}{2(x+1)}+2$, $f(3)$, где $f(x)=ax+b$, будет <0.

Док-во касания: $-2x+6 = \frac{1}{2x-2}+2 \Rightarrow 4x^2-12x+9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x-3)^2=0$. Уравнение имеет единственное решение, а из графика видно, что ~~на прямой~~ прямая остаётся по одну полуплоскость от гиперболы.

Ответ: $a=-2$; $b=6$.

№ 5) Заметим, что $f(1\cdot n)=f(1)+f(n) \Rightarrow f(1)=0$, тогда для любого $f(n)>0$. $f(\frac{1}{n})<0$. $(f(\cancel{1})=f(n)+f(\frac{1}{n})$
$f(n)=-f(\frac{1}{n})$

Запишем $f(p)$, для всех простых p от 2 до 27:

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

Откуда:
$f(10)=1$; $f(15)=1$; $f(20)=1$; $f(25)=2$
и т.д.

Получаем: $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(6)=f(8)=f(9)=f(12)=$
$=f(16)=f(18)=f(24)=f(27)=0$

Заметим, что $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$, таким образом, необходимо посчитать кол-во таких пар, (x,y), что

$f(x)<f(\frac{1}{y})$. Распишем все значения $f(x)$ и $f(\frac{1}{x})$ для $x\in[1;27]$:

$f(x)$	$f(\frac{1}{y})$
$f(1)=0$	$f(1)=0$
$f(2)=0$	$f(\frac{1}{2})=0$
$f(3)=0$	$f(\frac{1}{3})=0$
$f(4)=0$	$f(\frac{1}{4})=0$
$f(5)=1$	$f(\frac{1}{5})=-1$
$f(6)=0$	$f(6)=0$
$f(7)=1$	$f(7)=-1$
$f(8)=0$	
$f(9)=0$	
$f(10)=1$	$f(10)=-1$
$f(11)=2$	$f(\frac{1}{11})=-2$
$f(12)=0$	
$f(13)=3$	$f(\frac{1}{13})=-3$
$f(14)=1$	$f(\frac{1}{14})=-1$
$f(15)=1$	$f(\frac{1}{15})=-1$
$f(16)=0$	
$f(17)=4$	$f(\frac{1}{17})=-4$
$f(18)=0$	
$f(19)=4$	$f(\frac{1}{19})=-4$
$f(20)=1$	$f(\frac{1}{20})=-1$
$f(21)=1$	$f(\frac{1}{21})=-1$
$f(22)=2$	$f(\frac{1}{22})=-2$
$f(23)=5$	$f(\frac{1}{23})=-5$
$f(24)=0$	
$f(25)=2$	$f(\frac{1}{25})=-2$
$f(26)=3$	$f(\frac{1}{26})=-3$
$f(27)=0$	

Рассмотрим все возможные вар-ты y:
Очевидно, что $f(\frac{1}{y})=0$ нам не подходят. Рассмотрим $f(\frac{1}{y})=-1$
Таковых 7 штук.
Для каждого из них можно подобрать 1 из 10 $f(x)\in\cancel{0}$,
70 вар-ов.

$f(\frac{1}{y})=-2 \rightarrow 3$ штуки
$f(x)<2: 17 \quad 3\cdot17=$ 51 вар-т.

$f(\frac{1}{y})=-3 \rightarrow 2$ шт.
$f(x)<3: 20 \quad 2\cdot20=$ 40 вар-ов

$f(\frac{1}{y})=-4 \rightarrow 2$ шт.
$f(x)<\cancel{3}: 22 \quad 2\cdot22=$ 44 вар-та

$f(\frac{1}{y})=-5 \rightarrow 1$ шт
$f(x)<5: 24 \quad 2\cdot24=$ 48 вар-ов

$\overset{121}{70+51}\overset{161}{+40}\overset{205}{+44}\overset{253}{+48}=253$

Ответ: 253 вар-та.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} \geq -t$ $(t = x^2+6x)$

$(|t| = t$ на ОДЗ$)$

$t + t^{-\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_4 t} - \frac{1}{5^{\log_4 t}} + 4^{\log_4 t} \geq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -3-\sqrt{10}) \cup (-3-\sqrt{10}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{10}) \cup (-3+\sqrt{10}; +\infty)$

№2) $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$

ОДЗ: $(3y - 2x \geq 0)$

$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

(1): $9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

(1) $- 3 \cdot$ (2): $9y^2 - 9y^2 - 15xy + 4x^2 - 9x^2 + 2x + 18x + 3y + 12y - 12 = 0$

$-5x^2 - 15xy + 20x + 15y - 12 = 0$

$5x^2 + 15xy - 20x - 15y + 12 = 0$

$5x^2 + 5x(3y-4) - 3(5y+4) = 0$

$D = 25\cdot(9y^2 - 24y + 16) + 75y - 60 \cancel{= 0}$

$D = 225y^2 - 600y + 240 + 75y - 60 = 225y^2 - 525y + 180$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$3^{\log_4 t} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$ $\quad 3^{l_4 t} + t \geq t^{l_4 5}$ $\quad 3^{l_4 t} = 3^{\frac{l_3 t}{l_3 4}} = $

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$3^{\log_4 t} \cdot t^{\log_4 \frac{1}{3}} =$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\sin 2\beta \cos^2 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$= t^{\log_4 \frac{3}{5}}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) =$ $\quad t^{l_5 \frac{3}{4}} + t \geq t^{l_4 5}$

$= 2\cos 2\beta \cdot (\sin(2\alpha+2\beta)) = 2\cos 2\beta \cdot (-\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{8}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad t^x + t^y$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad x^k - x^n \geq 0$

$16x - 4 = a(x-1)(k-n)$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$225 + 64 = 289$

$\sin 2\alpha \cdot 4 \pm \cos 2\alpha = -1$ $\quad \frac{25-17}{8} = 4$

$8\sin\alpha\cos\alpha \pm \cos^2\alpha \mp \sin^2\alpha = -1$

$1)\ \sin^2\alpha + 8\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1$ $\quad 3^{\log_4 t} = t^{\log_3 4}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$x - x^2 = 16x^2 + 8x + 1$ $\quad t + t^{\frac{1}{\log_4 3}} - t^{\log_4 5} \geq 0$ $\quad 4^n + 3^{-n} - 5^n \geq 0$ $\quad 4x + \sqrt{1-x^2} = -1$ $\quad x^k + x^n - x^m$

$17x^2 + 8x = 0$ $\quad 17x + 8$ $\quad x = -\frac{8}{17}$

$x = 0;\ x = -\frac{8}{17}$ $\quad -\frac{24}{17} + \frac{7}{17}$ $\quad 17 \cdot 17 = 119\ldots$

64 $\quad t = 4^n$ $\quad \sqrt{1 - \frac{64}{289}}$ $\quad 289$

$\sin 2\alpha = 0$ $\quad \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = \pm 1$ $\quad \cos 2\alpha = \pm\frac{15}{17}$ $\quad 4^n + \frac{1}{3^n} - 5^n \geq 0$

$-\frac{32}{17} + \frac{15}{17}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\log_5 3}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$4^{\log_4(t)} + 3^{\frac{1}{\log_4 t}} - 5^{\log_4 t}$ $\quad 4^n + \frac{1}{3^n} - 5^n \geq 0$ $\quad \frac{8}{15} - \frac{8}{15}x^2$ $\quad 1.15$

$932 \mid 4$, -8, 233 $\quad x^2 + 30x - 8 = 0$

$D = 900 + 32 = 932 = (2\sqrt{233})^2$

$3^{\log_4 t} - t^{\log_4 3 + \log_4 \frac{5}{3}} + \log_{(\frac{5}{3})} t$

$a - \frac{1}{ab} + b \geq 0$ $\quad a^2 b + ab^2 - 1 \geq 0$ $\quad x_1 = \frac{2\sqrt{233} - 30}{2} = \sqrt{233} - 15$

$x_2 = -\sqrt{233} - 15$

$3^{\log_4(x) + \log_4(x+6)} + (x)(x+6) \geq (x)^{\log_4 5}(x+6)^{\log_4 5}$

$6^2 - 10^2 - 4^2 = 0$, $2^2 + 5^2 - 2^2 = 0$, $3^2 + 25 + 24 = \ldots$

$5 + 7 = 12$, $\frac{5}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$(2x-3y)(2x+3y)=$

$=4x^2-9y^2\frac{1}{2x+2}+2\geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$3y^2-4y=7$ $\quad 8x^2-34x+30=$
$=4x^2-17x+15$

$3-1{,}25=1{,}75=\frac{1{,}75}{2}=0{,}875$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$ $\quad 289-240=49$ $\quad D=$

ОДЗ: $3xy-2x-3y+2\geq 0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$ $\quad x_1=\frac{17-7}{8}=1{,}25$ $\quad \frac{17+7}{8}=\frac{24}{8}=3$ $\quad x_2=$

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+2x+3y+4x^2-2=0 \\ 3y^2-6x-4y+3x^2-4=0 \end{cases}$$

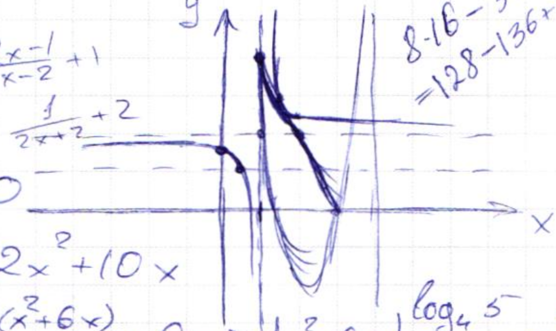
$ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$8\cdot 16-34\cdot 4+30=$
$=128-136+30=$

$\frac{2x-1}{2x-2}+1$

$\frac{1}{2x+2}+2$

~~$9y^2-9xy+7y+8x+x^2+2=0$~~



$15y^2-30xy+10x+10y+5x^2=0$

$(3y^2-30xy+3x^2)+(10y^2+10y+2{,}5)+2x^2+10x$

$2\sqrt{10}\cdot x=10$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} ?$$

$x^2+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

$x^2+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{-\log_4 3}$

$x^2+6x\geq(x^2+6x)\cdot(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}-(x^2+6x)\cdot(x^2+6x)^{-1-\log_4 3}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $\quad t=x^2+6x$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$ $\quad$ ОДЗ: $t>0$ $(x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty))$

$\frac{1}{t^{\log_4 3}}+t^{\log_4 4}\geq t^{\log_4 5} \,/\cdot t^{\log_4 3}$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$1+t^{\log_4 12}\geq t^{\log_4 15}$

$3^{\log_4 t}\geq t\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$

$1\geq\left(t^{\log_4 3}\right)\left(t^{\log_4 5}-t^{\log_4 4}\right)$

$\frac{1}{t^{\log_4 3}}$

$1\geq t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$x^2+6x-1=0$

$D=36+4=40$

$\frac{-6\pm 2\sqrt{10}}{2}=-3\pm\sqrt{10}$

$\frac{\log_a b}{\log_a c}=\log_c b$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3(x+y)^2-10(x+y)$

$9(3y-2x)^2+4$

$3(x+y)^2-10(x+y)=0$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

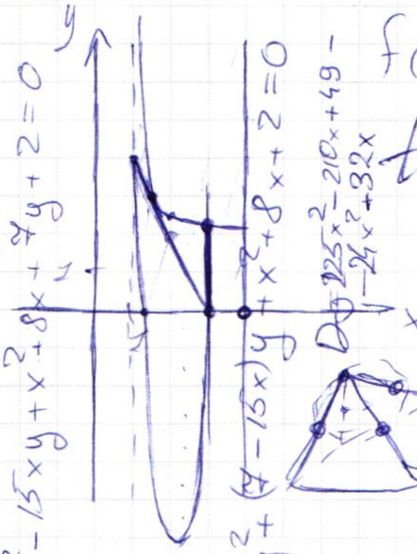
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \Rightarrow \frac{-1}{2x-2}+2 \geq ax+b \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$t^{\log_4 15} - t^{\log_4 12} \leq 1$



$t^n - t^m \vee 1 ?$

$f(x)=ax+b \Rightarrow a+b \geq 4$, $3a+3b \geq 4$

$3a+b \leq \frac{9}{2}$, $3a+b \geq 0$

$3a+b \geq 0$

$t^{\log_4 12} - t^{\log_4 15} + 1$

$t(t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}) \leq 1$

$3^{\log_4 t} - t^{\log_4 5}$

$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}}$

$\log_4 t = y$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\frac{1}{\log_4 3}}$

$3^y - \frac{1}{5^y} \geq \frac{4y-3}{4x-2}$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$4^y + 3^y - \frac{1}{5^y} \geq 0 \,|\, 5^y$

$0 \geq t^{\log_4 15} - t^{\log_4 12} - 1$

$a^{\log_b c} - a^{\log_b d}$

$20^y + 15^y - 1 \geq 0$

$3^{\log_4 t} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$20^y + 15^y \geq 1$

$\frac{1}{t^{\log_4 3}} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$5^y(4^y+3^y) \geq 1$

$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$9y^2-15xy+4x^2+x+8x+2=0$

$6y^2-15xy+x^2+8x+y+2=0$

$D = 225x^2-210x+49-24x^2+32x$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$-2x+4=\frac{1}{2x-2}$

$-4x^2+8x+4x-8=1$

$(2x-3)^2$

$4x^2+12x+9=0$

$-2x+6=\frac{1}{2(x+1)}$

$-2x+6=\frac{1}{2x-2}+2$

$-4x^2+12x-4x+12$

$2(3-x)=\frac{1}{(x-1)\cdot 2}$

$4x^2-8x-11=0$

$D=64+$

$4(3-x)(x-1)=1$

$4x^2-16x+12=-1$

$-2x+6=\frac{1}{2x+2}$

$-4x^2+12x+4x-12=1$

$4x^2-16x+13=0$

$D=256-13\cdot16=3\cdot16=4^2\cdot3$

$x_1=\frac{16+4\sqrt3}{8}=2+\frac{\sqrt3}{2}$

$x_2=\frac{16-4\sqrt3}{8}=2-\frac{\sqrt3}{2}$

$-4-\sqrt3+6=2-\sqrt3$

$-2x+6=$

$-4x^2+4x+12x-12=1$

$4x^2-16x+12=$

$4x^2-16x+13=0$

$\frac{1}{4-\sqrt3-2}$

$\frac{1}{2-\sqrt3}$

$7^{\log_3 4} \leq 7 +$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-1}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$

$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow 15y^2-30xy+5x^2+10x-10y=0$

$10(x+y)$

$5y^2-5x^2-10xy$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

ОДЗ: $3xy-2x-3y+2>0$

$x+y=a$ $\quad x-y=b$ $\quad xy-?$ $\quad x+y=a$ $\quad y-x=b$

$\frac{5b+a}{2}=\sqrt{3xy-2a-\frac{a+b}{2}+2}$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3a^2-6xy-5a+b=4 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3x^2+6xy+3y^2-10x-10y=0$

$$\begin{cases} 18y^2-30xy+8x^2+4x+6y=4 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$(3(x+y)-10)(x+y)$

$15y^2-30xy+5x^2-2x+2y=0$ log

$(5y^2-10xy+5x^2)+(10y^2-20+10x^2)-10x^2$

$(3x+3y-10)(x+y)=2(3y-2x)^2$

$3(x+y-\frac{10}{3})(x+y)$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$f(26)=3$

$f(27)=0$

$f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+f(2)$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$

$f(\frac{1}{4})=0$

$f(1{,}25)=1$

$f(8)+f(0{,}25)$

$\log_a b=-\log_a \frac{1}{b}$

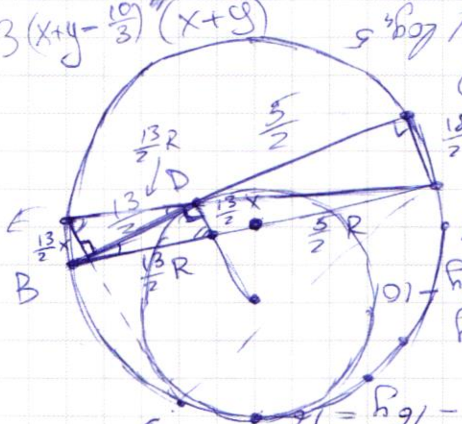
$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

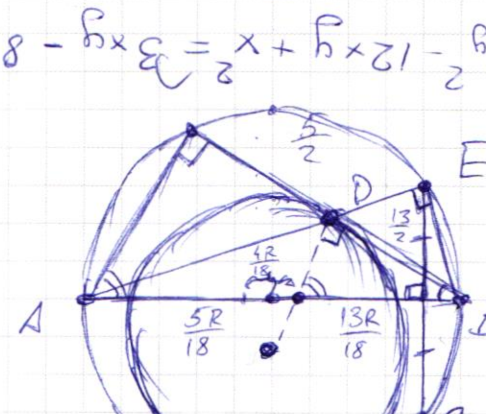
$18y^2-24+y$

$y\geq\frac{2}{3}x$

$3x^2+\frac{4}{3}x^2-6x-\frac{8}{3}x=4$

$\frac{13x^2}{3}-\frac{26x}{3}=4$





$BD=\frac{13}{2}$

$DC=\frac{5}{2}$

$0=\sqrt{2x^2-4x+2}=\sqrt{2}(x-1)^2$

$x=1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)