Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 10

Вариант 10-01

Шифр
(заполняется секретарём)

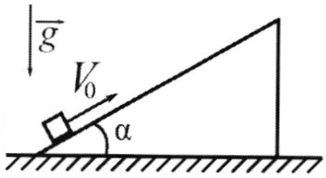
1. Фейерверк массой $m = 2$ кг стартует после мгновенной работы двигателя с горизонтальной поверхности, летит вертикально вверх и разрывается в высшей точке траектории на множество осколков, которые летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Высота точки разрыва $H = 65$ м. На землю осколки падают в течение $\tau = 10$ с.

1) Найдите начальную скорость V_0 фейерверка.

2) Найдите суммарную кинетическую энергию K осколков сразу после взрыва.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

2. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Шайбе, находящейся на наклонной поверхности клина, сообщают начальную скорость $V_0 = 2$ м/с (см. рис.), далее шайба безотрывно скользит по клину. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



1) На какую максимальную высоту H над точкой старта поднимется шайба на клине?

2) Найдите скорость V клина, в тот момент, когда шайба вернется в точку старта на клине. Массы шайбы и клина одинаковы. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

11,8 × 11,8 = 944 1118 139,24

15,4 × 15,4

136,9 | 12 11,8

3. По внутренней поверхности проволочной металлической сферы радиуса $R = 1,2$ м равномерно со скоростью $V_0 = 3,7$ м/с движется модель автомобиля. Движение происходит в горизонтальной плоскости большого круга. Масса модели $m = 0,4$ кг. Модель приводится в движение двигателем. Силу сопротивления считайте пренебрежимо малой.

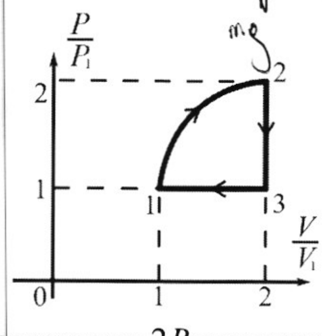
1) С какой по величине силой P модель действует на сферу?

2) Рассмотрим модель автомобиля равномерно движущуюся по окружности в плоскости большого круга, составляющей с горизонтом угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Вычислите минимальную допустимую скорость V_{MIN} такого равномерного движения. Коэффициент трения скольжения шин по поверхности сферы $\mu = 0,9$.

Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

3,7 × 3,7 259 111 13,69

4. Один моль одноатомного идеального газа участвует в цикле 1-2-3-1 (см. рис.), участок 1–2 –дуга окружности с центром в точке 3. Температура газа в состоянии 1 равна T_1.



1) Какое количество Q теплоты подведено к газу в процессе расширения?

2) Найдите работу A газа за цикл.

3) Найдите КПД η цикла.

Универсальная газовая постоянная R.

5. Заряд Q>0 однородно распределен по сфере радиуса R. В первом опыте на расстоянии $2R$ от центра сферы помещают небольшой по размерам шарик с зарядом q>0.

1) Найдите силу F_1, действующую на заряженный шарик.

Во втором опыте заряд q однородно распределяют по стержню длины R, стержень помещают на прямой, проходящей через центр заряженной сферы. Ближайшая к центру сферы точка стержня находится на расстоянии $2R$ от центра.

2) Найдите силу F_2, с которой заряд сферы действует на заряженный стержень.

Все силы, кроме кулоновских, считайте пренебрежимо малыми. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Явлениями поляризации пренебрегите.

44 | 7 −42 6,3 20

15,4
x 15,4
616
\+ 770
1 54
237,16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Снаряд движется в поле тяжести без сопротивления:

1) $H = \frac{V_0^2}{2g} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10\,м/с^2 \cdot 65\,м} = 10\sqrt{13}\,м/с$

2) Найдём скорость всех осколков в момент взрыва. Очевидно, что дольше всего летит осколок со скоростью, направленной вертикально вверх, а быстрее всего упадёт тот, чья скорость направлена вниз. Пусть скорость всех осколков u.

Для „самого быстрого" осколка: $\begin{cases} 0 = H - ut_1 - g\frac{t_1^2}{2} \\ 0 = H + u(t_1+\tau) - g\frac{(\tau+t_1)^2}{2} \end{cases}$

Для „самого медленного":

где t_1 – время падения „самого быстрого" осколка.

$\begin{cases} ut_1 = H - g\frac{t_1^2}{2} \\ u(t_1+\tau) = H - g\frac{(\tau+t_1)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 + \frac{\tau}{t_1} = \frac{H - g\frac{(\tau+t_1)^2}{2}}{H - g\frac{t_1^2}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow Ht_1 - g\frac{t_1^3}{2} + H\tau - g\frac{\tau t_1^2}{2} = Ht_1 - gt_1\frac{(\tau+t_1)^2}{2}$

Ур-ние примет вид: $g\frac{t_1^2}{2} + gt_1\tau + H = 0$, откуда численно:

$t_1 \approx \sqrt{87} - 10\,с \Rightarrow t_1 + \tau = \sqrt{87}\,с$

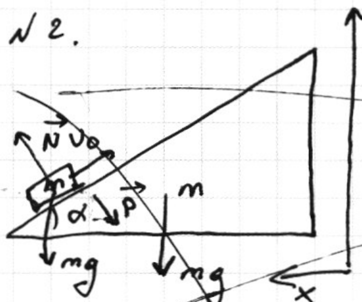
Подставим во второе ур-ние: $u = \frac{g(t_1+\tau)}{2} - \frac{H}{t_1+\tau} = 5\sqrt{87} - \frac{65}{\sqrt{87}} =$

$= \frac{5 \cdot 87\sqrt{87} - 65\sqrt{87}}{87} = \frac{370\sqrt{87}}{87}\,м/с$

$K = \sum m_i \frac{u_i^2}{2} = \frac{u^2}{2}\sum m_i = m\frac{u^2}{2} = 2 \cdot \frac{370^2}{2 \cdot 87} \approx$ ~~15,7·10²~~ ~~31,4 Дж~~ $15,7 \cdot 10^2$ Дж ~~3,1 кДж~~

Ответ: $V_0 \approx 17\,м/с$, K ~~≈ 31,4 Дж~~ ~~3,1 кДж~~ $K \approx 1,6$ кДж

№ 2.



~~Пусть ускорение шайбы вдоль клина a_1, ускорение клина a_2~~

~~$ma_1 = g\sin$~~

Ускорение шайбы a_1, клина a_2.

$$\begin{cases} ma_{1x} = N\sin\alpha & (1) \\ ma_{1y} = mg + N\cos\alpha & (2) \\ ma_2 = -P\sin\alpha = -N\sin\alpha & (3) \end{cases} \Rightarrow a_{1x} = -a_2$$

Т.к. шайба неотрывно едет по клину, в СО клина имеем кин. связь:

$$(a_{1x} - a_2)\cdot tg\alpha = a_{1y} \Rightarrow \cancel{2a_{1x}\,tg\alpha} \; 2a_{1x}\cdot tg\alpha = a_{1y} \quad (4)$$

1) ~~ЗСЭ: $\frac{mV_0^2}{2} = mgH + \frac{m(a_2\tau)^2}{2}$~~, где τ – время от начала

ЗСЭ: $\frac{mV_0^2}{2} = mgH + \frac{m(a_{1x}\tau)^2}{2} + \frac{m(a_2\tau)^2}{2}$ (5)

У шайбы останется только горизонтальная скорость

Из (1), (2) и (4): $\frac{a_{1x}}{a_{1y} - g} = -tg\alpha \Rightarrow a_{1x} = g\,tg\alpha - 2a_{1x}tg^2\alpha$

$$a_{1x} = \frac{g\,tg\alpha}{1+2tg^2\alpha}, \quad a_{1y} = \frac{2g\,tg^2\alpha}{1+2tg^2\alpha}$$

~~(5): $H = \frac{1}{2g}(V_0^2$~~ $\tau = \frac{V_0\sin\alpha}{a_{1y}} = \frac{V_0\sin\alpha(1+2tg^2\alpha)}{2g\,tg^2\alpha}$

$$(5): H = \frac{1}{2g}\left(V_0^2 - 2\left(\frac{g\,tg\alpha}{1+2tg^2\alpha}\cdot\frac{V_0\sin\alpha(1+2tg^2\alpha)}{2g\,tg^2\alpha}\right)^2\right) = \frac{1}{2g}\left(V_0^2 - 2\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{4\,tg^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2g}V_0^2\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\cdot10}\cdot4\left(1-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{8} = \boxed{\frac{1}{8}\text{ м}}$$

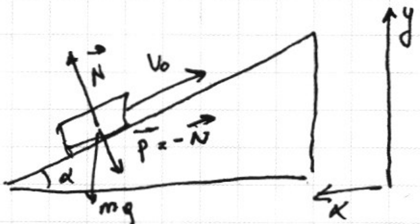
2) Силы не поменяются ⇒ ускорения те же ⇒ шайба вернётся в начало через 2τ после начала движения.

Скорость клина к этому времени: $|a_2|\cdot2\tau = a_{1x}\cdot2\tau = \frac{2g\,tg\alpha}{1+2tg^2\alpha}\cdot\frac{V_0\sin\alpha(1+2tg^2\alpha)}{2g\,tg^2\alpha}$

$V = \frac{V_0\sin\alpha}{tg\alpha} = V_0\cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ м/с

Ответ: $H = \frac{1}{8}$ м, $V \approx 1{,}7$ м/с

№ 2.



Пусть уск. шайбы a_1, клина a_2.

$$\begin{cases} ma_{1x} = N\sin\alpha \ (1) \\ ma_2 = -N\sin\alpha \ (2) \\ ma_{1y} = N\cos\alpha - mg \ (3) \end{cases} \Rightarrow a_{1x} = -a_2 \quad (4)$$

Из неотрывности движения в СО клина имеем:

$$(a_{1x} - a_2)\,tg\alpha = -a_{1y} \Rightarrow 2a_{1x}\,tg\alpha = -a_{1y} \quad (5)$$

Из (1), (2), (5): $\frac{a_{1y}+g}{a_{1x}} = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow -2a_{1x}\,tg^2\alpha + g\,tg\alpha = a_{1x} \Rightarrow a_{1x} = \frac{g\,tg\alpha}{1+2tg^2\alpha}$

$a_{1y} = \frac{-2g\,tg^2\alpha}{1+2tg^2\alpha}$, $a_2 = -a_{1x}$

Время движения шайбы до остановки по O_y: $\tau = \frac{V_0\sin\alpha(1+2tg^2\alpha)}{2g\,tg^2\alpha}$

Путь шайбы вверх: $H = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{-2a_{1y}} = \frac{V_0^2\sin^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}{4g\,tg^2\alpha} = \frac{V_0^2}{4g}\cdot\cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha) =$

$= \frac{4}{4\cdot 10}\cdot\frac{3}{4}\left(1+2\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}$ м

Шайба вернётся в исходную точку клина через 2τ от начала движения (силы не поменялись)

$$V = a_2\cdot 2\tau = -\frac{2g\,tg\alpha}{1+2tg^2\alpha}\cdot\frac{V_0\sin\alpha(1+2tg^2\alpha)}{2g\,tg^2\alpha} = -V_0\cdot\cos\alpha = -\sqrt{3}\ м/с$$

Ответ: $\frac{1}{8}$ м; $\sqrt{3}$ м/с $\approx 1,7$ м/с (по модулю)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

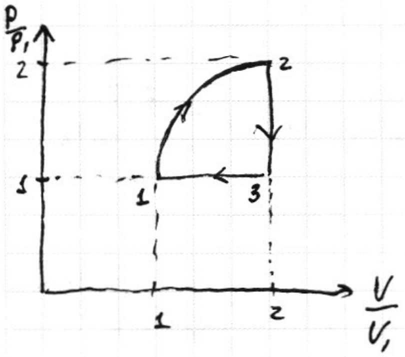
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



1) $Q = A_{12} + U_{12}$

Начало: $P_1V_1 = \nu RT_1$,

т. 2: $2P_1 \cdot 2V_1 = \nu R T_2 \Rightarrow T_2 = 4T_1 \Rightarrow U_{12} = \frac{3}{2}\nu R \cdot 3T_1$

~~...~~ Масштаб графика позволяет перейти к стандартным PV координатам без изменения его формы.

$$A_{12} = \int_{V_1}^{2V_1} p\,dV = \underbrace{p_1V_1}_{\text{квадратик под четвертью круга}} + \underbrace{\frac{\pi}{4}p_1V_1}_{\text{четверть круга}} = \left(\frac{\pi}{4}+1\right)\nu RT_1$$

$$Q = \left(\frac{\pi}{4}+1+\frac{9}{2}\right)\nu RT_1 = \frac{22+\pi}{4}RT_1 \approx \frac{22+\frac{22}{7}}{4}RT_1 = \frac{2\cdot 22}{7}RT_1 \approx 6{,}3\,RT_1$$

2) Работа за цикл – размерная площадь четверти круга:

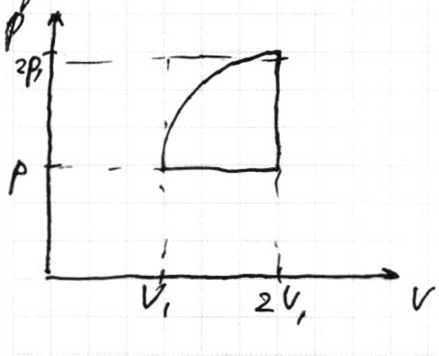
$$A = \frac{\pi}{4}\nu RT_1 = \frac{\pi}{4}RT_1$$

3) На других (кроме 12) участках тепло отводится $\Rightarrow$

$$КПД = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}+\frac{11}{2}} = \frac{\pi}{\pi+22} \approx \frac{\frac{22}{7}}{\frac{22}{7}+22} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+1} = \frac{1}{8}$$

Ответ: $Q = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{11}{2}\right)RT_1 \approx 6{,}3\,RT_1$; $A = \frac{\pi}{4}RT_1$; $\eta = \frac{\pi}{\pi+22} \approx \frac{1}{8}$

P.S. График при ~~...~~ том же масштабе отношением осей примет вид:



Этим графиком и пользуемся для площадей.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

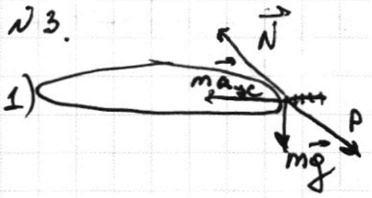
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

1) 

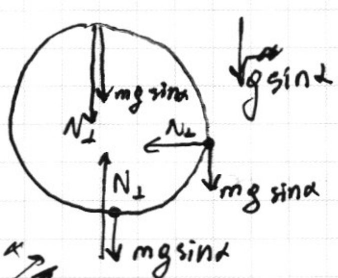
движение в горизонтальной плоскости

$\vec N + m\vec g = m\vec a_{уc} \Rightarrow \vec P = m(\vec g - \vec a_{уc})$

$|\vec P| = m\sqrt{g^2 + a_{уc}^2} = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{V_0^2}{R}\right)^2} = 0{,}4\sqrt{\left(\frac{3{,}7^2}{1{,}2}\right)^2 + 10^2} \approx$

$\approx 0{,}4\sqrt{11{,}8^2 + 10^2} \approx 0{,}4 \cdot 15{,}4 \approx 6{,}2H.$

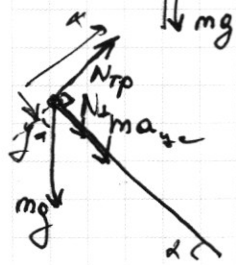
2) Рассмотрим плоскость движения (в ней ускорение $g \sin\alpha$ а также не видно $F_{тр}$)



$mg\sin\alpha + \vec N_1 = m\vec a_{уc}$

По рисунку видно, что $a_{уc} \to max$ при одном направлении N_1 и $mg\sin\alpha$. Это соответствует крайней верхней точке.

Вернёмся в нормальную плоскость. Сила трения ⊥ диаметру. Удобно выбрать оси вдоль и ⊥ диаметру.



$\begin{cases} N_1\mu = N_{тр} = mg\cos\alpha \\ N_1 + mg\sin\alpha = ma_{уc} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\cos\alpha = N_1\mu \\ ma_{уc} - mg\sin\alpha = N_1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_{уc} - g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{1}{\mu}$

$a_{уc} = \frac{V^2}{R} = \frac{g\cos\alpha}{\mu} + g\sin\alpha \Rightarrow V = \sqrt{gR\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \sin\alpha\right)}$

$V = \sqrt{10 \cdot 1{,}2\left(\frac{\sqrt3}{2 \cdot 0{,}9} + \frac12\right)} \approx \sqrt{17}$ м/с $\approx 4{,}1$ м/с

Ответ: $P \approx 6{,}2H$; $V \approx 4{,}1$ м/с

P. S. $F_{тр}$ ⊥ диаметру, т.к. мы имеем дело с окружностью и касательной к плоскости соприкосновения. По той же причине в плоскости движения её не видно.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5.

Напряжённость электрического поля сферы $E_0 = \frac{Q}{R^2}k$

1) На расстоянии r $E(r) = \frac{Qk}{r^2}$ (при $r \geq R$).

Отсюда $F_1 = k\frac{Qq}{(2R)^2} = k\frac{Qq}{4R^2}$

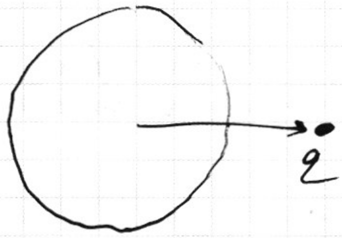
2) ~~Для F_2 имеем интеграл $F_2 = \int_{2R}^{3R} F'(r)\,dr = kQq\int_{2R}^{3R} 2\cdot\frac{1}{r^3}\,dr =$~~

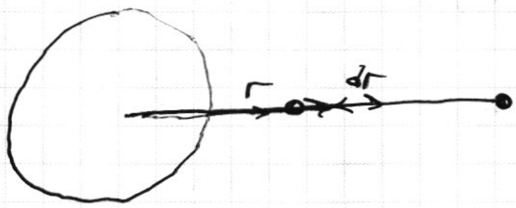
~~$= -2kQq($~~

Пусть $\sigma = \frac{q}{R}$ — заряд единицы длины стержня.

Тогда $F_2 = \int_{2R}^{3R} E(r)\,dq = \int_{2R}^{3R} E(r)\cdot\sigma\,dr = \frac{kQq}{R}\cdot\int_{2R}^{3R}\frac{1}{r^2}\,dr$

$$F_2 = \frac{kQq}{R}\cdot\left(\frac{1}{(3R)} - \frac{1}{(2R)}\right)\cdot(-1) = \frac{kQq}{6R^2}$$





$$-g\frac{t^3}{2}+H\tau-g\frac{\tau t_1^2}{2}=-g\frac{t_1\tau^2+2\tau t_1^2+\cancel{t_1^3}}{2}$$

$$g\frac{\tau t_1^2}{2}+g\tau^2 t_1+H\tau=0$$

$$5t_1^2+100t_1+65=0 \qquad \cancel{65} \quad 13$$

$$t_1=\frac{-100\pm\sqrt{10000-65\cdot5\cdot4}}{10}=\frac{-100+\sqrt{10000-1300}}{10}=-10+\sqrt{100-13}=$$

$$=\sqrt{87}-10$$

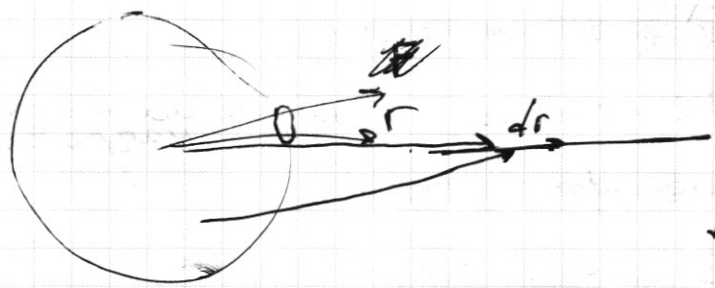
$$87 \times 5 = 435$$
$$435-65=370$$

$$37\times37=259 \quad 111$$

$$1369 : 87 = 15,97$$
$$-87,\ 499,\ 435,\ 640,\ 609,\ 31$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{2\cdot100\cdot13}{2}$$

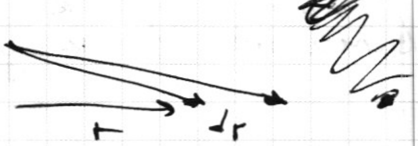
$$\Phi=\frac{Q}{\varepsilon_0}=ES \qquad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi R^2\varepsilon_0}$$



Φ

$E(R)$ $\int E(r)\,dq$

$$\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad kQ\int\frac{1}{r^2}\,\sigma$$



$$F_2=\sum_{2R}^{3R}k\frac{Qq}{r^2}=kQq\sum_{2R}^{3R}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{r^2}=r^{-2}\Rightarrow(r^{-2})'=-2\int\frac{1}{r^3}\,dr$$

$$\cancel{\frac{1}{4R^2}-\frac{1}{9R}}$$

$$-2\cdot\int r^{-3}dr=-2\cdot\frac{r^{-2}}{-2}\quad -1$$

$$F(r)=kQr\frac{1}{r^2}\Rightarrow F_2=\sum_{2R}^{3R}\frac{1}{r^2}\cdot kQq$$

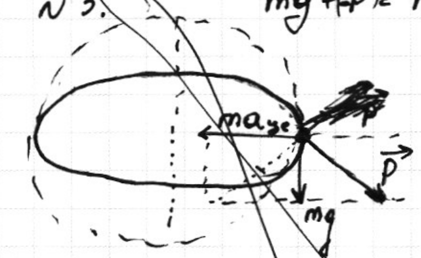
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$m\vec{g} + \vec{P} = m\vec{a}_{цс} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_{цс} - m\vec{g}$



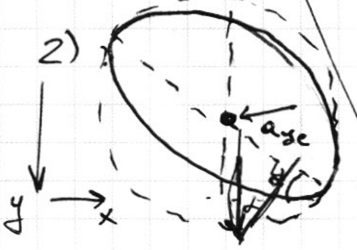
1) $P = m\sqrt{a_{цс}^2 + g^2} = m\sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + g^2} = 0{,}4 \cdot \sqrt{\left(\frac{3{,}7^2}{1{,}2}\right)^2 + 10^2} =$

$\approx 0{,}4 \cdot \sqrt{11{,}8^2 + 10^2} = 0{,}4\sqrt{239{,}24} \approx 0{,}4 \cdot 15{,}4 =$

$\approx 6{,}2$ Н

~~Все тоже~~

2)



Во втором случае изменяется направление $a_{цс}$, он направлен к центру окружности.

$\vec{P} + m\vec{g} = m\vec{a}_{цс} \Rightarrow$ необходимо найти крайний случай максимального ускорения, оно будет соответствовать минимальной требуемой скорости.

~~Рассмотрим вертика Необходим случай~~

Рассмотрим проекции:

$O_x: P_x = ma_{цс\,x}$ ~~$= m\frac{V^2}{R}\cos\alpha = const$~~

$O_y: mg + P_y = \mu P_x$ ~~$mg + \mu P_x$~~ $= ma_{цс\,y}$ — проекция меняет направление

~~Крайнее положение при $P_y = \mu P_x$~~

Из него $\mu = \dfrac{a_{цс\,y} - g}{\underset{const}{a_{цс\,x}}} = \dfrac{a_{цс\,y} - g}{\frac{V^2}{R}\cos\alpha}$

Ускорение максимально при $a_{цс\,y}$ max $\Rightarrow$ верхняя точка,

$a_{цс\,y} = \frac{V^2}{R}\sin\alpha$

$\mu \cdot \frac{V^2}{R}\cos\alpha = \frac{V^2}{R}\sin\alpha - g$

$V = \sqrt{gR \cdot \frac{1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = \sqrt{\dfrac{gR}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = \dfrac{10 \cdot 1{,}2}{\frac{1}{2} - 0{,}9}$

$12\left(\frac{1{,}7}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{2{,}6}{1{,}8}\right) = \cancel{12}\frac{26}{\cancel{18}_3} = \frac{52}{3}$

$4{,}1 \times 4{,}1$

41

164

$16{,}81$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)