Олимпиада «Физтех» по физике 2022

Класс 9

Вариант 09-02

Шифр

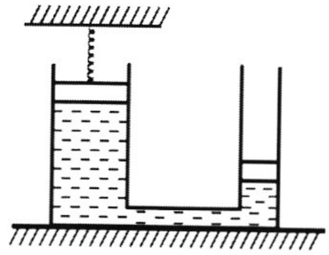
(заполняется секретарём)

1. Школьник бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с.

1) Через какое время t после старта скорость камня будет равна по величине $V_0/2$?
2) На какой высоте h, отсчитанной от точки старта скорость камня будет равна по величине $V_0/2$?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. На горизонтальной поверхности расположены два цилиндрических сообщающихся сосуда (см. рис.), в которых налита жидкость плотности ρ. На свободных поверхностях жидкости находятся лёгкие поршни. Зазоров между стенками сосудов и поршнями нет. Левый поршень соединён пружиной жёсткости k с верхней опорой. Деформация пружины равна x. Площадь сечения левого поршня S, правого $S/3$. Трение поршней о стенки сосудов пренебрежимо мало. Ускорение свободного падения g.

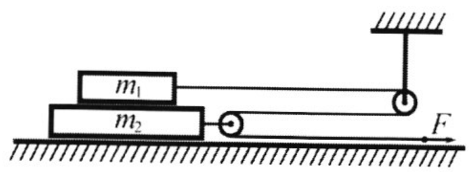


1) Найдите разность h уровней жидкости в сосудах.
2) Найдите массу m груза, который следует положить на правый поршень, чтобы пружина стала недеформированной.

3. Спутник обращается по круговой орбите вокруг планеты. Высота орбиты $h = R$, здесь R – радиус планеты. Плотность планеты ρ. Гравитационная постоянная G. Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

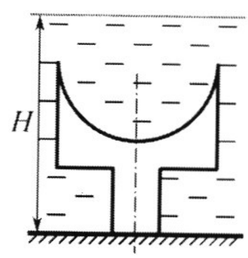
1) Найдите ускорение g свободного падения на расстоянии $3R$ от центра планеты.
2) Найдите период T обращения спутника.

4. На горизонтальном столе находятся бруски, соединённые нитью с системой блоков (см. рис.). Массы брусков $m_1 = 3m$, $m_2 = 5m$. Коэффициент трения скольжения нижнего бруска по столу и верхнего бруска по нижнему равен μ. Массы нити и блоков, а также трение в осях блоков пренебрежимо малы.



1) Найдите величину F_0 горизонтальной силы, которую следует приложить к свободному концу нити, чтобы нижний брусок скользил по столу, а сила трения, действующая на верхний брусок, была равна нулю.
2) Найдите минимальную силу F, при которой нижний брусок скользит по столу, а верхний брусок движется влево относительно нижнего бруска.

5. Ко дну бассейна глубиной H=3 м приклеена осесимметричная конструкция (см. рис.). Клей затвердел. Верхняя поверхность конструкции – полусфера. Объем конструкции V = 5 дм^3, площадь соприкосновения конструкции с дном через клей S = 10 см^2. Плотность воды ρ = 1 г/см^3, атмосферное давление P_0 = 100 кПа. Ускорение свободного падения g =10 м/с^2.

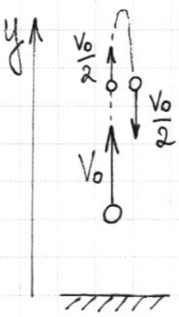


1) Найдите давление P_1 вблизи дна.
2) Найдите величину F силы (с указанием направления), с которой вода действует на конструкцию.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Решение:



Скорость камня будет равна по величине $\frac{V_0}{2}$ в двух случаях: до прохождения точки максимальной высоты, и после прохождение. Соответственно, возможно два значения времени t.

Отличие этих случаев друг от друга в том, что в одном случае проекция скорости камня на ось y, показанную на рисунке, будет положительной, а в другом случае отрицательной:

1 случай: $\frac{V_0}{2} = V_0 - gt; \Rightarrow t = \frac{V_0}{2g} = \frac{10\,м/с}{2\cdot 10\,м/с^2} = 0{,}5\,с.$

2 случай: $-\frac{V_0}{2} = V_0 - gt; \Rightarrow t = \frac{3V_0}{2g} = \frac{3\cdot 10\,\frac{м}{с}}{2\cdot 10\,м/с^2} = 1{,}5\,с.$

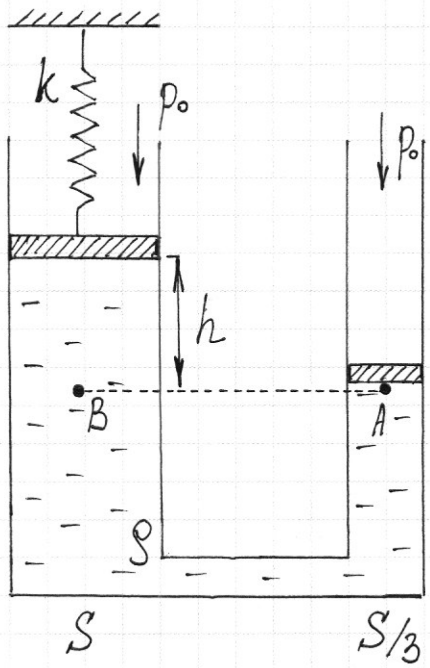
В обоих случаях скорость $\frac{V_0}{2}$ достигается на одной и той же высоте h, которую можно определить из закона сохранение энергии (m - масса камня):

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2} + mgh, \Rightarrow h = \frac{3V_0^2}{8g} = \frac{3\cdot 100\,м^2/с^2}{8\cdot 10\,м/с^2} = 3{,}75\,м.$$

Ответ: $t = \frac{V_0}{2g} = 0{,}5\,с$ и $t = \frac{3V_0}{2g} = 1{,}5\,с$; $h = \frac{3V_0^2}{8g} = 3{,}75\,м.$

Задача 2.

Решение:



Пусть атмосферное давление равно p_0.

Заметим, что пружина могла быть как растянута, так и сжата. ~~Если пружина сжата, то~~

Следуя рисунку в условии задачи, правый поршень находится ниже, чем левый.

Запишем равенство давлений в точках A и B:

$$\begin{cases} p_A = p_0; \\ p_B = p_0 + \rho g h \pm \frac{kx}{S}; \end{cases} \Rightarrow \quad \rho g h = \pm \frac{kx}{S}.$$

Ясно, что чтобы h было положительным, пружина должна быть растянута, тогда $\rho g h = \frac{kx}{S}$; $\Rightarrow h = \frac{kx}{\rho g S}$.

Если на правый поршень поставить ~~гирю~~ груз, то он опустится, а левый поршень поднимется, из-за этого пружина, которая изначально была растянута, сожмется и примет недеформированный вид.

Пусть правый поршень опустится на y_1, а левый поднимется на y_2.

Равенство вытесненных объёмов:

$$\frac{S}{3} \cdot y_1 = S \cdot y_2, \Rightarrow \quad y_1 = 3y_2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Новая разница высот между поршнями будет равна $h+y_1+y_2 = h+4y_2$, поэтому аналогичное равенство давлений будет выглядеть так:

$$p_0 + \frac{mg}{S/3} = p_0 + \rho g(h+4y_2); \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{S}{3}\cdot \rho(h+4y_2).$$

Из того, что пружина стала недеформированной, делаем вывод, что $y_2 = x$.

Итого, $m = \frac{S}{3}\cdot\rho(h+4x) = \frac{S}{3}\cdot\rho x\left(\frac{k}{\rho g S}+4\right)$.

Ответ: $h = \frac{kx}{\rho g S}$; $m = \frac{\rho x S}{3}\left(\frac{k}{\rho g S}+4\right)$.

Задача 3.

Решение:

Масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

На тело массой m, находящимся на расстоянии $3R$ от центра планеты, будет действовать сила $F = mg$. С другой стороны, $F = G\frac{mM}{(3R)^2}$ как сила гравитационного взаимодействия между телом и планетой.

Отсюда $g = \frac{GM}{(3R)^2} = \frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{9R^2} = \frac{4}{27}\frac{\pi G\rho}{R}$.

Период обращения T спутника определяется из III з-на Кеплера:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2R)^3}{G\cdot M}} = 2\pi\sqrt{\frac{8R^3\cdot 3}{G\cdot 4\pi R^3\rho}} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{G\rho}}$ ($2R$ - радиус орбиты спутника).

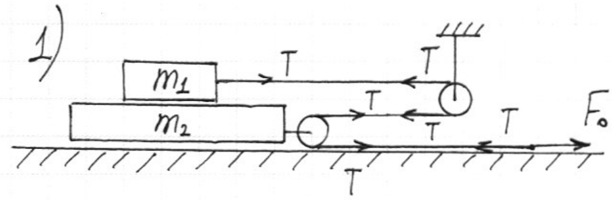
Ответ: $g = \frac{4}{27}\frac{\pi G\rho}{R}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{6}{G\rho}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

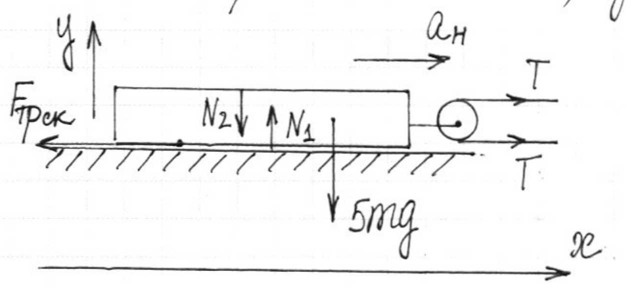
Решение:

1)



При действии силы F_0 возникает сила натяжения T (см. рис.), $F_0 = T$.

Рассмотрим все силы, действующие на бруски.



На нижний брусок действуют:

$5mg$ – сила тяжести;

T – силы натяжения нити;

N_1 – сила реакции со стороны стола;

N_2 – сила давления со стороны верхнего бруска;

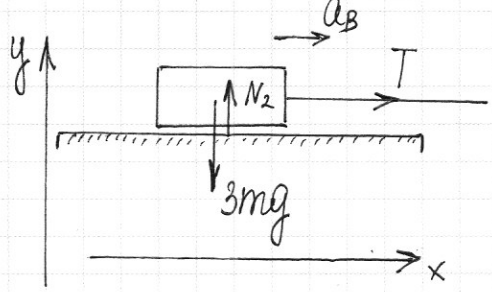
вследствие движения бруска возникает сила трения скольжения $F_{трск} = \mu \cdot N_1$.

II з-н Ньютона по осям x и y, показанные на рисунке:

x: $5m \cdot a_н = 2T - \mu \cdot N_1$; (1)

y: $N_1 = N_2 + 5mg$; (2)

На верхний брусок действуют:



$3mg$ - сила тяжести;

T - сила натяжения нити;

N_2 - сила реакции со стороны ~~верхнего бруска~~ нижнего бруска.

II з-н Ньютона по ~~осям~~ осям:

x: $3m \cdot a_в = T$; (3)

y: $N_2 = 3mg$; (4)

Сила трения, действующая на верхний брусок, равна нулю, только если отсутствует относительное ускорение верхнего бруска, т.е. $a_н = a_в$ (5).

Получаем систему уравнений (1) - (5). В ходе решения получим:

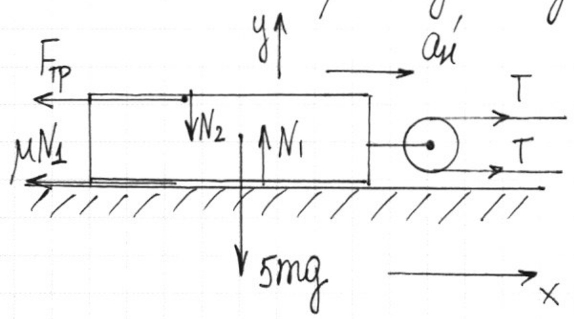
$$\frac{2T - \mu \cdot (3mg + 5mg)}{5m} = \frac{T}{3m};$$

$$6T - 3\mu \cdot 8mg = 5T; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 3\mu \cdot 8mg = 24\mu mg = F_0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

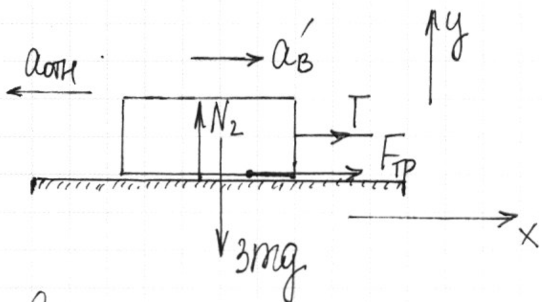
2) Расставим силы, ~~на~~ действующие на бруски, аналогично первому пункту:



$x:\ 5m\cdot a_н' = 2T - \mu N_1 - F_{тр};$

$y:\ N_1 = N_2 + 5mg;$

($F_{тр}$ – сила, ~~трения~~ возникающая из-за взаимодействия верхнего и нижнего брусков)



$x:\ 3m\cdot a_в' = T + F_{тр};$

$y:\ N_2 = 3mg;$

$a_{отн} = a_н' - a_в' > 0$ – ускорение верхнего бруска относительно нижнего.

~~Также~~ Также $F_{тр} \le \mu\cdot N_2 = 3\mu mg.$

Получаем систему из четырёх уравнений и двух неравенств:

$$a_{отн} = \frac{2T - \mu\cdot 8mg - F_{тр}}{5m} - \frac{T + F_{тр}}{3m} = \frac{T}{15m} - \frac{8F_{тр}}{15m} - \frac{24\mu mg}{15m} > 0; \Rightarrow$$

$\Rightarrow T > 8F_{тр} + 24\mu mg.$

$F = T_{min} = 8F_{тр_{min}} + 24\mu mg$, а $F_{тр\,min} = 0$, $\Rightarrow$ $F = 24\mu mg.$

Ответ: $F_0 = 24\mu mg$, $F = 24\mu mg.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

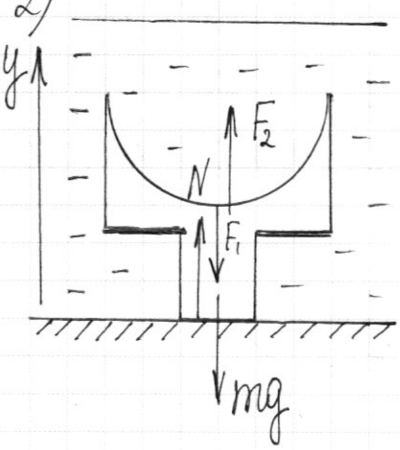
Задача 5.

Решение:

1) Давление P_1 вблизи дна определяется суммой атмосферного давления и давления столба воды высотой H: $P_1 = P_0 + \rho g H$.

$P_1 = 10^5$ Па $+ 1000 \frac{кг}{м^3} \cdot \cancel{10 \frac{Н}{кг}}\ 10 \frac{Н}{кг} \cdot 3 м = 10^5$ Па $+ 3 \cdot 10^4$ Па $=$
$= 1{,}3 \cdot 10^5$ Па.

2)



Рассмотрим силы, действующие на конструкцию.

F_1 – сила, с которой вода действует на верхнюю поверхность конструкции;

F_2 – сила, с которой вода действует на нижнюю поверхность конструкции (выделена жирным);

N – сила со стороны дна;

mg – сила тяжести ~~кон~~ конструкции.

(Здесь уже учтено, что из-за симметрии конструкции силы давления воды на боковые поверхности компенсируют друг друга)

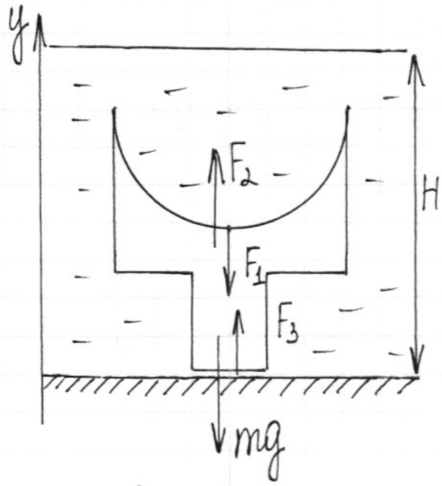
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~II з-н Ньютона в проекции на ось y:~~

$\cancel{N + F_y - mg = 0}$;

~~где~~ $F_y = \cancel{F_2' - F_1'} = F_2 - F_1$, а искомая сила - это $F = |F_y|$.



Теперь представим ту же самую конструкцию, только не приклеенную ко дну. В этом ~~сл~~ случае $N=0$, т.к. вода подтекает, а также ~~на~~ появляется сила $F_3 = \rho g H \cdot S$ – сила давления воды на нижнюю грань.

„Новая" результирующая сила давления воды на конструкцию равна $F_y' = F_3 + F_2 - F_1 = F_3 + F_y$, при этом, эта сила равна силе Архимеда на конструкцию, т.е. $F_y' = \rho \cdot V \cdot g$.

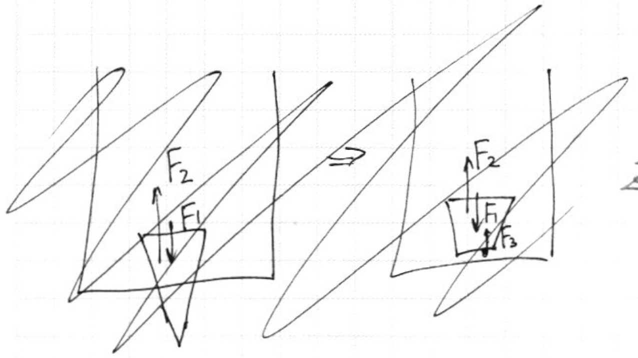
Отсюда следует $F_y = \rho V g - \rho g H S = \rho g (V - HS)$, и

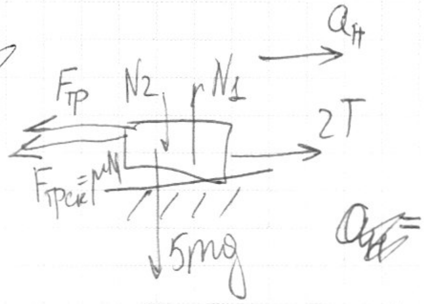
$F = |\rho g (V - HS)| = \rho g \cdot |V - HS|$.

Численно: $F = 1 \frac{г}{см^3} \cdot \cancel{10}\ 0{,}01 \frac{Н}{г} \cdot |5000\ см^3 - 300\ см \cdot 10\ см^2| =$
$= 0{,}01 \frac{Н}{см^3} \cdot 2000\ см^3 = 20\ Н$.

Ответ: $P_1 = 1{,}3 \cdot 10^5$ Па; $F = \rho g (V - HS) = 20 Н$, $\vec{F}$ направлен вертикально вверх.

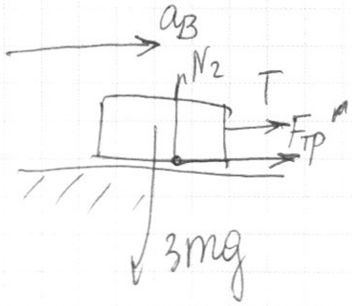
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$5m \cdot a_H = 2T - \mu N_1 - F_{тр};$$

$$N_1 = N_2 + 5mg;$$



$$3m \cdot a_B = T + F_{тр};$$

$$N_2 = 3mg;$$

$$F_{тр} \leq \mu \cdot N_2;$$

$$a_{отн} = a_H - a_B > 0$$

$$a_{отн} = \frac{2T - \mu \cdot 8mg - F_{тр}}{5m} - \frac{T + F_{тр}}{3m} =$$

$$= \frac{2T}{5m} - \frac{8}{5}\mu g - \frac{F_{тр}}{5m} - \frac{T}{3m} - \frac{F_{тр}}{3m} =$$

$$= \cancel{\frac{2T}{5m} - \frac{8}{5}\mu g} \underbrace{\left(\frac{2T}{5m} - \frac{T}{3m}\right)}_{\frac{6T-5T}{15m}} - \left(\frac{F_{тр}}{5m} + \frac{F_{тр}}{3m}\right) - \frac{8}{5}\mu g =$$

$$\frac{6T - 5T}{15m} - \frac{8F_{тр}}{15m} - \frac{24\mu gm}{15m} > 0$$

$$\begin{cases} T - 8F_{тр} - 24\mu g > 0; \\ F_{тр} \leq 3\mu mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - 8F_{тр} - 24\mu mg > 0; \\ F_{тр} \leq 3\mu mg; \end{cases}$$

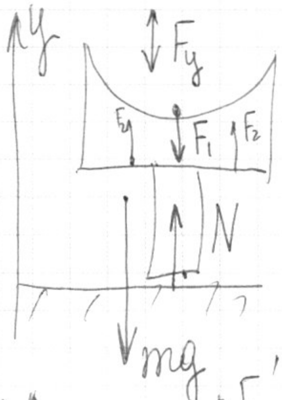
$$T > 8F_{тр} + 24\mu mg$$

5.

$P_1 = P_0 + \rho \cdot g \cdot H$

Если приклеена:

$y: \cancel{mg}\ N - mg + F_y = 0;$



$F = |F_1 - F_2|$

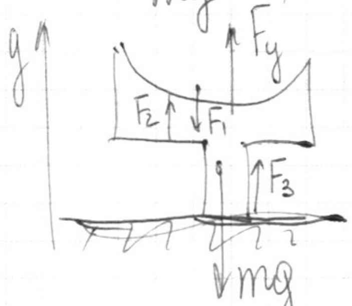
Если не приклеена:

$y: -mg + F_y' = 0;$

$F_y = F_2 - F_1$

$F_y' = F_2 + F_3 - F_1$

$\cancel{N = mg - F_y = -(F_y' + F_y) = -F_y' = -}$



$F_y + N - mg = 0$

$F_y' - mg = 0$

$F_y + N - F_y' = 0;$

$N = F_y' - F_y = F_3 = P_1 \cdot S$

$F_A = F_y' = F_2 \cancel{+ F_1 + F_3}$

$= F_y + P_1 \cdot S =$

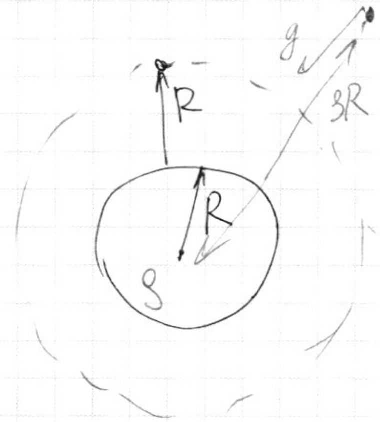
$= \rho \cdot V \cdot g; \Rightarrow$

$\Rightarrow F_y = \rho V g - P_1 S$

$V - Sh = 5000\ см^3 - \cancel{1} \cdot 10\ см^2 \cdot 300\ см = 2000\ см^3.$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ +\ 30000 \\ \hline 130000 \end{array}$$

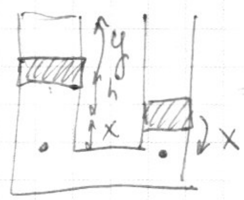
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



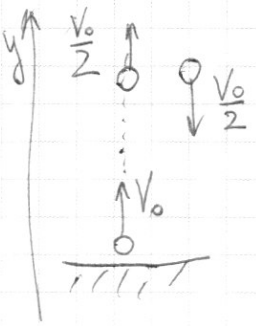
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(2R)^3}{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{8\cdot 3}{G\rho\cdot 4}} = 2\pi\sqrt{\frac{6}{G\rho}}$$

$$mg = G\frac{mM}{(3R)^2}$$

$$g = \frac{GM}{9R^2}$$



$h + x + y$



y: $\frac{V_0}{2} = V_0 - gt; \Rightarrow t = \frac{V_0}{2g}$ (1)

y: $-\frac{V_0}{2} = V_0 - gt; \Rightarrow t = \frac{3V_0}{2g}$.

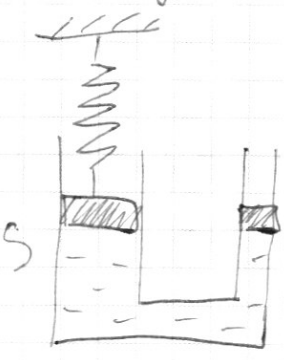
$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{m(V_0/2)^2}{2};$$

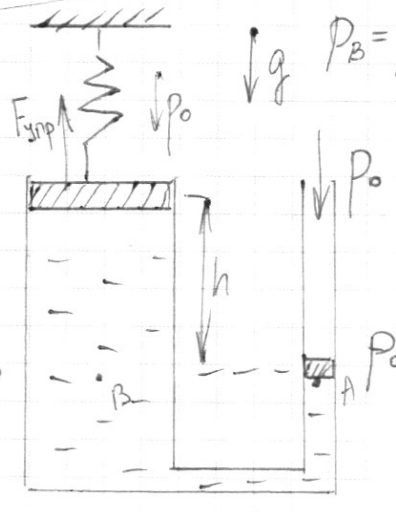
$$mgh = \frac{m}{2}V_0^2 - \frac{m}{2}\cdot\frac{V_0^2}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{2}V_0^2$$

$$h = \frac{3V_0^2}{8g}$$

$P_A = P_0$

$P_B = P_0 + \rho g h - \frac{F_{упр}}{S}$





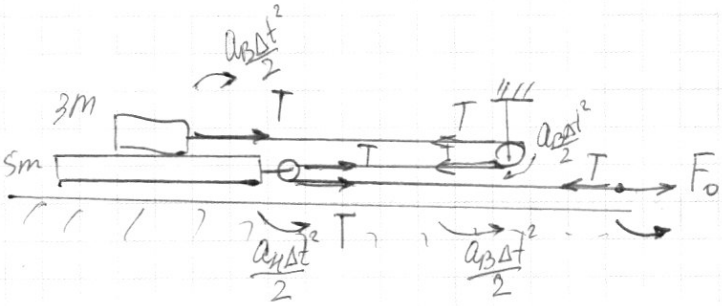
$\frac{kx}{S} = \rho g h; \Rightarrow$

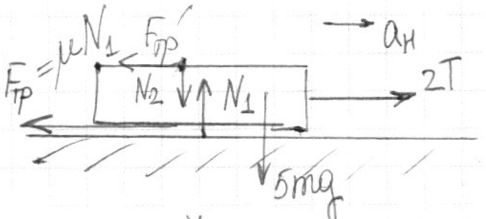
$\Rightarrow h = \frac{kx}{\rho g S}$

$15 : 4 = 3,75$

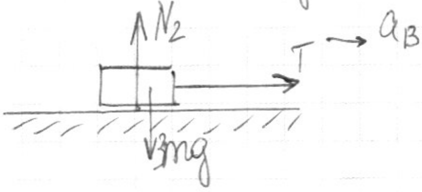
$P_0 + \frac{mg}{S} = \rho g$

$$\frac{3\cdot 10}{8} = \frac{3\cdot5\cdot2}{4\cdot2} = \frac{15}{4} =$$





$$\begin{cases} 5m\cdot a_н = 2T - \mu N_1; \\ N_1 = N_2 + 5mg \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3m\cdot a_B = T; \\ N_2 = 3mg \end{cases}$$

$T = F_0$

$a_н = a_B$?

$$\frac{2T - \mu\cdot 8mg}{5m} = \frac{T}{3m};$$

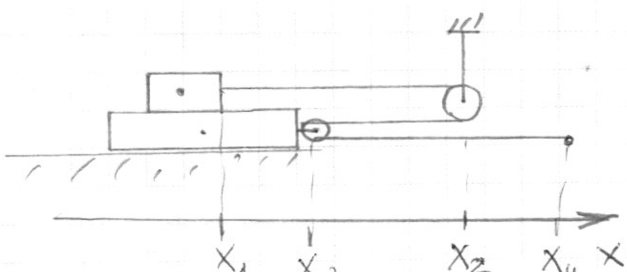
$6Tm - \mu\cdot 8m^2 g\cdot 3 = 5Tm;$

$24\mu m^2 g = Tm;$

$T = F_0 = 24\mu mg$

$5ma_н = 2T - \mu N_1 - F_{тр}'$

$N_1 = N_2 + 5mg$



$l = (x_2 - x_1) + (x_2 - x_3) + (x_4 - x_3) =$

$= 2x_2 - x_1 + x_4 - 2x_3 =$

$= const;$

$0 = 2\cdot 0 - a_{xB} + a - 2\cdot a_{xБл}$

$a = 2a_{xБл} + a_{xB}$

$a_{отн_x} < 0$

$\parallel a_{xB} - a$