1 11 класс

1. (a) Две окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса 10 пересекаются в точках B и C. На окружности ω_1 выбрана точка A, которая не лежит внутри ω_2. Луч AB пересекает ω_2 в точке D, причем B лежит на отрезке AD. Точка E симметрична точке D относительно точки C. Найдите AE, если $AD = 25$, $BC = 15$. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

   Ответ: 28,35.

   Решение. Так как $\angle CDB = \angle CAB$ (опираются на дугу BC в равных окружностях), то треугольник ACD является равнобедренным. Точка C равноудалена от A, D и E и является серединой DE, поэтому треугольник ADE прямоугольный, а $AE = AD \operatorname{tg} \angle ADE$. По теореме синусов для треугольника BCD имеем $BC = 2R \sin \angle ADE$. Остаётся выразить $\operatorname{tg} \angle ADE$ через $\sin \angle ADE = \dfrac{BC}{2R}$ и подставить в выражение для AE.

   (b) Две окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса 20 пересекаются в точках B и C. На окружности ω_1 выбрана точка A, которая не лежит внутри ω_2. Луч AB пересекает ω_2 в точке D, причем B лежит на отрезке AD. Точка E симметрична точке D относительно точки C. Найдите AE, если $AD = 60$, $BC = 26$. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

   Ответ: 51,32.

   (c) Две окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса 40 пересекаются в точках B и C. На окружности ω_1 выбрана точка A, которая не лежит внутри ω_2. Луч AB пересекает ω_2 в точке D, причем B лежит на отрезке AD. Точка E симметрична точке D относительно точки C. Найдите AE, если $AD = 120$, $BC = 34$. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

   Ответ: 56,34.

   (d) Две окружности ω_1 и ω_2 равного радиуса 80 пересекаются в точках B и C. На окружности ω_1 выбрана точка A, которая не лежит внутри ω_2. Луч AB пересекает ω_2 в точке D, причем B лежит на отрезке AD. Точка E симметрична точке D относительно точки C. Найдите AE, если $AD = 90$, $BC = 40$. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

   Ответ: 23,24.

2. (a) Маша и Саша играют в следующую игру. Несколько раз бросается симметричный кубик. Его грани пронумерованы натуральными числами от 1 до 6, а выпадение любой грани равновероятно. Маша побеждает при выпадении подряд двух шестёрок, а Саша — при выпадении подряд двух нечётных цифр. Какова вероятность того, что Маша победила, если известно, что игра закончилась за четыре хода? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

   Ответ: 0,121.

   Решение. Пусть подбрасывается игральная кость с N гранями, событие M — победа Маши, событие C — победа Саши, а событие F — завершение игры за 4 хода. Вычислим условную вероятность $P(M|F)$: по определению она равна $\dfrac{P(M \cap F)}{P(F)}$. Вероятность $P(M \cap F) = \dfrac{m}{N^4}$, а $P(F) = \dfrac{m+s}{N^4}$, где m и s — количества партий, заканчивающихся победой Маши и Саши соответственно за 4 хода. Итак, $P(M|F) = \dfrac{m}{m+s}$.

   Остаётся вычислить $m = N^2 - \dfrac{N^2}{4} - N$ (из всех вариантов первых двух ходов удаляются выигрышные для Саши на первых двух шагах, а также выигрышные для Маши ранее, чем за 4 хода), а $s = \dfrac{N^2}{4} \cdot \left(N \cdot \left(\dfrac{N}{2} - 1\right) + 1 \cdot (N-1)\right)$ (выбор последних двух выигрышных для Саши ходов, а также выбор чётного и не равного шести результата на втором шаге, либо равного шести на втором шаге, но не равного шести на первом). После подстановки $N = 6$ получаем $P(M|F) = \dfrac{7}{58}$.

(b) Маша и Саша играют в следующую игру. Несколько раз бросается десятигранная кость. Её грани пронумерованы натуральными числами от 1 до 10, а выпадение любой грани равновероятно. Маша побеждает при выпадении подряд двух десяток, а Саша — при выпадении подряд двух нечётных цифр. Какова вероятность того, что Саша победила, если известно, что игра закончилась за четыре хода? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,950.

(c) Маша и Саша играют в следующую игру. Несколько раз бросается восьмигранная кость. Её грани пронумерованы натуральными числами от 1 до 8, а выпадение любой грани равновероятно. Маша побеждает при выпадении подряд двух восьмёрок, а Саша — при выпадении подряд двух нечётных цифр. Какова вероятность того, что Маша победила, если известно, что игра закончилась за четыре хода? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,075.

(d) Маша и Саша играют в следующую игру. Несколько раз бросается двенадцатигранная кость. Её грани пронумерованы натуральными числами от 1 до 12, а выпадение любой грани равновероятно. Маша побеждает при выпадении подряд двух пятёрок, а Саша — при выпадении подряд двух чётных чисел. Какова вероятность того, что Саша победила, если известно, что игра закончилась за четыре хода? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,964.

3. (a) Решите уравнение $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{4x+4} = \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{3x+7}$. В ответе укажите сумму найденных корней.

Ответ: 0,2.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x+5} = a$, $\sqrt[3]{4x+4} = b$, $\sqrt[3]{2x+2} = c$, $\sqrt[3]{3x+7} = d$. Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
a+b=c+d \quad &\iff \quad (a+b)^3 = (c+d)^3 \quad \iff \\
&\iff \quad a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = c^3+d^3+3c^2d+3cd^2 \quad \stackrel{a^3+b^3=c^3+d^3}{\iff} \\
\stackrel{a^3+b^3=c^3+d^3}{\iff} \quad ab(a+b) = cd(c+d) \quad &\stackrel{a+b=c+d}{\iff} \quad ab(a+b) = cd(a+b) \quad \iff \\
&\iff \quad \left[\begin{array}{l} a+b=0, \\ ab=cd \end{array}\right. \quad \iff \quad \left[\begin{array}{l} a^3=(-b)^3, \\ (ab)^3=(cd)^3. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Сделаем обратную замену и получим

$$\left[\begin{array}{l} x+5=-4x-4, \\ (x+5)(4x+4)=(2x+2)(3x+7) \end{array}\right. \quad \iff \quad \left[\begin{array}{l} x=-9/5, \\ x=-1, \\ x=3. \end{array}\right.$$

(b) Решите уравнение $\sqrt[3]{6x-9} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{3x-3} + \sqrt[3]{2x-5}$. В ответе укажите сумму найденных корней.

Ответ: 4,6.

(c) Решите уравнение $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4x-4}=\sqrt[3]{2x-2}+\sqrt[3]{3x+1}$. В ответе укажите сумму найденных корней.

Ответ: 6,2.

(d) Решите уравнение $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{6x+6}=\sqrt[3]{4x+4}+\sqrt[3]{x+4}$. В ответе укажите сумму найденных корней.

Ответ: -3.

4. (a) В турнире у волейбольной команды было 10 побед и 6 поражений, причём все её победы были получены тремя «сериями» (серия — это одна или несколько последовательных побед, между которыми не было ни одного поражения). Сколькими способами это могло случиться? Под способом понимается последовательность побед и поражений. Ничьих в волейболе не бывает.

Ответ: 1260.

Решение. Пусть серии побед были длины x_1, x_2 и x_3, а серии поражений до первой были длины y_1, y_2, y_3 и y_4 — до серии длины x_1 случилось y_1 поражений, между сериями длины x_1 и x_2 было y_2 поражений и так далее. Тогда $x_1+x_2+x_3=10$, причём все $x_i>0$, а $y_1+y_2+y_3+y_4=6$, причем y_1, $y_4\geqslant 0$, $y_2,y_3>0$. Первое уравнение имеет C_9^2 натуральных решений. Второе уравнение имеет C_7^3 решений (достаточно добавить к y_1 и y_4 по единице и получить уравнение с правой частью 8 и четырьмя натуральными переменными в левой части). Получаем искомое число способов: $C_9^2\cdot C_7^3=1260$.

(b) В турнире у волейбольной команды было 11 побед и 7 поражений, причём все её победы были получены тремя «сериями» (серия — это одна или несколько последовательных побед, между которыми не было ни одного поражения). Сколькими способами это могло случиться? Под способом понимается последовательность побед и поражений. Ничьих в волейболе не бывает.

Ответ: 2520.

(c) В турнире у волейбольной команды было 12 побед и 8 поражений, причём все её победы были получены тремя «сериями» (серия — это одна или несколько последовательных побед, между которыми не было ни одного поражения). Сколькими способами это могло случиться? Под способом понимается последовательность побед и поражений. Ничьих в волейболе не бывает.

Ответ: 4620.

(d) В турнире у волейбольной команды было 11 побед и 10 поражений, причём все её победы были получены тремя «сериями» (серия — это одна или несколько последовательных побед, между которыми не было ни одного поражения). Сколькими способами это могло случиться? Под способом понимается последовательность побед и поражений. Ничьих в волейболе не бывает.

Ответ: 7425.

5. (a) Найдите все положительные числа x такие, что оба числа $x+\dfrac{1}{x}$ и x^2-4x являются целыми. В ответ запишите наибольшее из них, вычисленное с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,73.

Решение. Пусть $x + \dfrac{1}{x} = m, x^2 - 4x = n$, где m и n — целые числа. Тогда $x^2 - mx + 1 = 0$, и $x^2 - 4x - n = 0$. Вычитая из одного уравнения другое, получаем, что $(m-4)x = n+1$.

Если $m \neq 4$, то из этого равенства следует, что x – рациональное число, т. е. $x = \dfrac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые натуральные числа. Но для натуральных взаимно простых p и q сумма $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$ может быть целым числом тогда и только тогда, когда $p = q = 1$, т. е. $x = 1$.

Если же $m = 4$, то $n = -1$, и тогда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Наибольшее из этих чисел с точностью до двух знаков после запятой равно 3,73.

(b) Найдите все положительные числа x такие, что оба числа $x + \dfrac{1}{x}$ и x^2-3x являются целыми. В ответ запишите наибольшее из них, вычисленное с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,62.

(c) Найдите все положительные числа x такие, что оба числа $x + \dfrac{1}{x}$ и x^2-5x являются целыми. В ответ запишите наибольшее из них, вычисленное с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,79.

(d) Найдите все положительные числа x такие, что оба числа $x + \dfrac{1}{x}$ и x^2-6x являются целыми. В ответ запишите наибольшее из них, вычисленное с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,83.

6. (a) Сколько существует таких прямоугольных треугольников ABC, что в них высота CD, проведённая из вершины прямого угла, связана с гипотенузой AB соотношением

$$2DC + 2 = AB,$$

отрезки CD, AD и BD имеют целочисленные длины, а длина гипотенузы AB лежит в промежутке $[10, 1000]$?

Ответ: 15.

Решение. Пусть O — середина AB. Тогда $OB = OA = OC = r$, а $CD = r - 1$. Из условия $AB = 2CD + 2$ длина гипотенузы AB есть чётное число, поэтому $r \in \mathbb{N}$. Тогда $OD = \left|\dfrac{AD - BD}{2}\right| \in \mathbb{N}$. Заметим, что в треугольнике OCD гипотенуза равна r, а катет $r - 1$, откуда $OD = \sqrt{2r-1}$. Это натуральное число, поэтому $2r-1 = a^2$ для некоторого натурального a. Поскольку r натуральное, a нечётно. Значит, $2r - 1 = (2k+1)^2$. Длина гипотенузы $AB = 2r = (2k+1)^2 + 1$. Остаётся найти количество значений $2r$, попадающих в промежуток $[10, 1000]$ — таких значений 15.

(b) Сколько существует таких прямоугольных треугольников ABC, что в них высота CD, проведённая из вершины прямого угла, связана с гипотенузой AB соотношением

$$2DC + 2 = AB,$$

отрезки CD, AD и BD имеют целочисленные длины, а длина гипотенузы AB лежит в промежутке $[100, 1500]$?

Ответ: 14.

(c) Сколько существует таких прямоугольных треугольников ABC, что в них высота CD, проведённая из вершины прямого угла, связана с гипотенузой AB соотношением

$$2DC + 2 = AB,$$

отрезки CD, AD и BD имеют целочисленные длины, а длина гипотенузы AB лежит в промежутке $[150, 1400]$?

Ответ: 13.

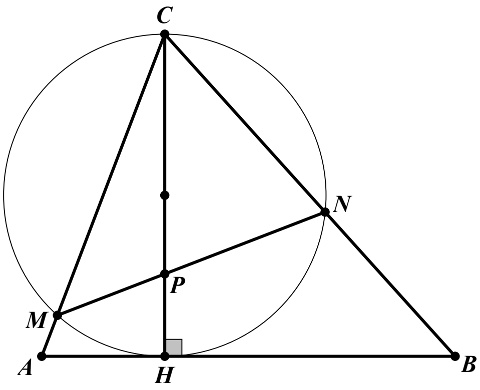
(d) Сколько существует таких прямоугольных треугольников ABC, что в них высота CD, проведённая из вершины прямого угла, связана с гипотенузой AB соотношением

$$2DC + 2 = AB,$$

отрезки CD, AD и BD имеют целочисленные длины, а длина гипотенузы AB лежит в промежутке $[50, 900]$?

Ответ: 12.

7. (a) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH, а затем на отрезке CH как на диаметре построена окружность. Точки M, N и P отмечены, как показано на рисунке. Найдите отношение $BH : CH$, если $(MP \cdot NP) : CP^2 = 0{,}75$ и $AH : CH = 0{,}5$.



Ответ: 1,5.

Решение. Пусть $\angle MCH = \alpha$, а $\angle NCH = \beta$. Тогда, по теореме о вписанном угле, $\angle MNH = \alpha$ и $\angle NMH = \beta$. Так как CH – диаметр, то $\angle HMC = \angle HNC = 90°$. Поэтому $\angle CMN = 90° - \beta$ и $\angle CNM = 90° - \alpha$.

По теореме синусов для треугольника MCP имеем: $MP : CP = \sin\alpha : \sin(90° - \beta) = \sin\alpha : \cos\beta$. По теореме синусов, примененной к треугольнику NCP, аналогично получим, что $NP : CP = \sin\beta : \cos\alpha$. Перемножая полученные равенства, имеем $(MP \cdot NP) : CP^2 = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Однако, из прямоугольных треугольников ACH и BCH получаем, что $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{AH}{CH} \cdot \frac{BH}{CH}$. Поэтому $\frac{BH}{CH} = \frac{MP \cdot NP}{CP^2} : \frac{AH}{CH} = 1{,}5$.

(b) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH, а затем на отрезке CH как на диаметре построена окружность. Точки M, N и P отмечены, как показано на рисунке. Пусть P — точка пересечения отрезков MN и CH. Найдите отношение $CH : AH$, если $(MP \cdot NP) : CP^2 = 3 : 5$ и $BH : CH = 9 : 5$.

Ответ: 3.

(c) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH, а затем на отрезке CH как на диаметре построена окружность. Точки M, N и P отмечены, как показано на рисунке.

Пусть P — точка пересечения отрезков MN и CH. Найдите отношение $BH : CH$, если $(MP \cdot NP) : CP^2 = 3{,}5$ и $AH : CH = 1{,}25$.

Ответ: 2,8.

(d) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH, а затем на отрезке CH как на диаметре построена окружность. Точки M, N и P отмечены, как показано на рисунке. Пусть P — точка пересечения отрезков MN и CH. Найдите отношение $CH : AH$, если $(MP \cdot NP) : CP^2 = 4 : 3$ и $BH : CH = 8 : 5$.

Ответ: 1,2.

8. (a) Имеется 2600 наборов по 50 карточек. На каждой карточке написано натуральное число, причем в каждом наборе все числа, написанные на карточках, различны. Оказалось, что какие бы два набора ни взять, на 100 карточках этих наборов будет написано ровно 99 различных натуральных чисел. Какое наименьшее количество различных натуральных чисел может быть написано на всех карточках этих 2600 наборов?

Ответ: 127401.

Решение. Заметим сначала, что по условию в любых двух наборах будет ровно одно общее число. Докажем, что при данных условиях у всех наборов есть ровно одно общее число. Пусть это не так. Выберем какой-нибудь набор S_1. В этом наборе найдется карточка с числом N, которое написано на карточках еще по крайней мере в 50 наборах (иначе всего наборов будет не больше $49 \cdot 50 + 1 < 2600$). Обозначим эти наборы $S_2, S_3, \ldots, S_{51}$. По предположению, есть набор, на карточках которого не написано число N. Этот набор должен иметь общие числа с наборами $S_1, S_2, \ldots, S_{51}$, при этом все эти числа должны быть различны. Но тогда в этом наборе по крайней мере 51 карточка. Получили противоречие. Значит, у всех наборов есть ровно одно общее число. Тогда общее количество различных натуральных чисел есть $2600 \cdot 49 + 1 = 127401$.

(b) Имеется 1700 наборов по 40 карточек. На каждой карточке написано натуральное число, причем в каждом наборе все числа, написанные на карточках, различны. Оказалось, что какие бы два набора ни взять, на 80 карточках этих наборов будет написано ровно 79 различных натуральных чисел. Какое наименьшее количество различных натуральных чисел может быть написано на всех карточках этих 1700 наборов?

Ответ: 66301.

(c) Имеется 1000 наборов по 30 карточек. На каждой карточке написано натуральное число, причем в каждом наборе все числа, написанные на карточках, различны. Оказалось, что какие бы два набора ни взять, на 60 карточках этих наборов будет написано ровно 59 различных натуральных чисел. Какое наименьшее количество различных натуральных чисел может быть написано на всех карточках этих 1000 наборов?

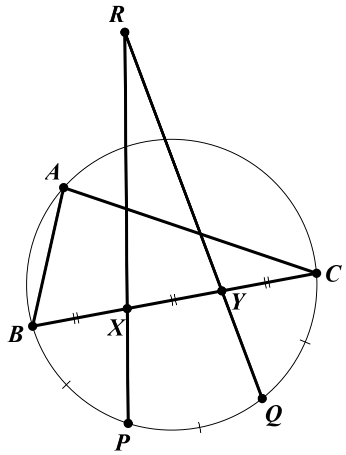
Ответ: 29001.

(d) Имеется 700 наборов по 25 карточек. На каждой карточке написано натуральное число, причем в каждом наборе все числа, написанные на карточках, различны. Оказалось, что какие бы два набора ни взять, на 50 карточках этих наборов будет написано ровно 49 различных натуральных чисел. Какое наименьшее количество различных натуральных чисел может быть написано на всех карточках этих 700 наборов?

Ответ: 16801.

9. (a) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y, а на меньшей дуге BC его описанной окружности отмечены точки P и Q так, что указанные на чертеже штрихами

дуги и отрезки равны. Лучи PX и QY пересекаются в точке R. Найдите угол BAC, если угол BRC равен α.



Ответ: $\angle BAC = \dfrac{3}{2}\alpha$.

Решение. Пусть O — центр окружности. Заметим, что $BQ \perp OP$, поскольку дуги BP и PQ равны. Покажем, что BQ перпендикулярна и BR. Пусть лучи QP и RB пересекаются в точке Z. Тогда, поскольку RX — медиана треугольника RBY, RP — медиана треугольника RQZ, то есть $QP = PZ$. Поскольку в треугольнике BQZ медиана BP равна $PQ = PZ$, этот треугольник прямоугольный.

Поскольку $OP \parallel RB$, а $OQ \parallel RC$, угол BRC равен центральному углу POQ. А угол BAC опирается на втрое большую дугу BPC, поэтому $\angle BAC = \dfrac{3}{2}\angle BRC$.

(b) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y, а на меньшей дуге BC его описанной окружности отмечены точки P и Q так, что указанные на чертеже штрихами дуги и отрезки равны. Лучи PX и QY пересекаются в точке R. Найдите угол BAC, если угол BRC равен $52°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 78.

(c) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y, а на меньшей дуге BC его описанной окружности отмечены точки P и Q так, что указанные на чертеже штрихами дуги и отрезки равны. Лучи PX и QY пересекаются в точке R. Найдите угол BAC, если угол BRC равен $42°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 63.

(d) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y, а на меньшей дуге BC его описанной окружности отмечены точки P и Q так, что указанные на чертеже штрихами дуги и отрезки равны. Лучи PX и QY пересекаются в точке R. Найдите угол BAC, если угол BRC равен $36°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54.

(e) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y, а на меньшей дуге BC его описанной окружности отмечены точки P и Q так, что указанные на чертеже штрихами дуги и отрезки равны. Лучи PX и QY пересекаются в точке R. Найдите угол BAC, если угол BRC равен $44°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 66.

10. (a) Найдите количество пар $(x;y)$ таких, что $x,\ y \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi y}{12}\right), \\ |2x + y - 45| + |y| \leqslant 45. \end{cases}$$

Ответ: 140.

Решение. Решим первое уравнение системы:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2}\right).$$

Отсюда получаем два семейства решений:

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} + 2\pi k \quad \text{или} \quad \frac{\pi x}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Упрощаем полученный результат:

$$\left[\begin{aligned} &x + y = 1 + 4k, \\ &x - y = 1 + 4k, \end{aligned}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаем решение второго уравнения системы:

$$\left[\begin{aligned} &x + y = 3 + 12n, \\ &x = -3 + 12n, \end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда решение системы двух уравнений из условия сводится к решению

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = 1 + 4k, \\ x + y = 3 + 12n, \end{cases} \\ &\begin{cases} x + y = 1 + 4k, \\ x = -3 + 12n, \end{cases} \\ &\begin{cases} x - y = 1 + 4k, \\ x + y = 3 + 12n, \end{cases} \\ &\begin{cases} x - y = 1 + 4k, \\ x = -3 + 12n \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\varnothing, \\ &\begin{cases} x = -3 + 12n, \\ y = 4 + 4k - 12n, \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 2 + 2k + 6n, \\ y = 1 + 6n - 2k, \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -3 + 12n, \\ y = -4 + 12n - 4k \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -3 + 12n, \\ y = 4 + 4k - 12n, \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 2 + 2k + 6n, \\ y = 1 + 6n - 2k, \end{cases} \end{aligned}\right.$$

где $k,\ n \in \mathbb{Z}$. Подставим значения $x = -3 + 12n$ и $y = 4 + 4k - 12n$ в неравенство из условия:

$$|12n + 4k - 47| + |4 + 4k - 12n| \leqslant 45 \tag{1}$$

Множество точек на на плоскости Okn, заданное неравенством (1) — это прямоугольник

$$\left\{(k;n)\colon\ -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant 11,\ \frac{1}{4} \leqslant n \leqslant 4\right\}.$$

В нём $12 \cdot 4 = 48$ точек с целочисленными координатами. Подставим значения $x = 2 + 2k + 6n$ и $y = 1 + 6n - 2k$ в неравенство из условия:

$$|2k + 18n - 40| + |1 + 6n - 2k| \leqslant 45 \quad \Longrightarrow \tag{2}$$
$$\Longrightarrow \quad |(2k + 18n - 40) + (1 + 6n - 2k)| \leqslant 45 \quad \Longleftrightarrow \quad |24n - 39| \leqslant 45.$$

С учётом, что $n \in \mathbb{Z}$, получаем, что $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.

- При $n=0$ $\quad |2k-40|+|1-2k| \leqslant 45 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leqslant k \leqslant \frac{43}{2} \quad \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad k \in \{-1; 0; 1; 2; \ldots; 21\}$.
- При $n=1$ $\quad |2k-22|+|7-2k| \leqslant 45 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leqslant k \leqslant \frac{37}{2} \quad \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad k \in \{-4; -3; -2; -1; \ldots; 18\}$.
- При $n=2$ $\quad |2k-4|+|13-2k| \leqslant 45 \quad \Longleftrightarrow \quad -7 \leqslant k \leqslant \frac{31}{2} \quad \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad k \in \{-7; -6; -5; -4; \ldots; 15\}$.
- При $n=3$ $\quad |2k+14|+|19-2k| \leqslant 45 \quad \Longleftrightarrow \quad -10 \leqslant k \leqslant \frac{25}{2} \quad \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad k \in \{-10; -9; -8; -7; \ldots; 12\}$.

Всего точек с целочисленными координатами, удовлетворяющих неравенству (2) $4 \cdot 23 = 92$.

Итоговый ответ: $48 + 92 = 140$ точек.

(b) Найдите количество пар $(x; y)$ таких, что x, $y \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi x - 2\pi y}{12}\right), \\ |x+52| + |x-2y| \leqslant 52. \end{cases}$$

Ответ: 160.

(c) Найдите количество пар $(x; y)$ таких, что x, $y \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi x + 2\pi y}{12}\right), \\ |x+45| + |x+2y| \leqslant 45. \end{cases}$$

Ответ: 136.

(d) Найдите количество пар $(x; y)$ таких, что x, $y \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi y}{12}\right), \\ |2x - y + 52| + |y| \leqslant 52. \end{cases}$$

Ответ: 187.