9 класс – день 2

1. а) Точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно. Известно, что $BKPM$ — квадрат, а расстояния от точке K и M до прямой AC равны 13 и 17 соответственно. Найдите площадь квадрата $BKPM$.
Ответ: 458.

б) Точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно. Известно, что $BKPM$ — квадрат, а расстояния от точке K и M до прямой AC равны 11 и 18 соответственно. Найдите площадь квадрата $BKPM$.
Ответ: 445.

в) Точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно. Известно, что $BKPM$ — квадрат, а расстояния от точке K и M до прямой AC равны $7\sqrt{3}$ и 16 соответственно. Найдите площадь квадрата $BKPM$.
Ответ: 403.

г) Точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно. Известно, что $BKPM$ — квадрат, а расстояния от точке K и M до прямой AC равны 15 и $4\sqrt{17}$ соответственно. Найдите площадь квадрата $BKPM$.
Ответ: 497.

Точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC соответственно. Известно, что $BKPM$ — квадрат, а расстояния от точке K и M до прямой AC равны a и b соответственно. Найдите площадь квадрата $BKPM$.
Ответ: $a^2 + b^2$.

Решение. Пусть F и T — основания перпендикуляров, опущенных из точек K и M на сторону AC соответственно. Тогда треугольники FKP и TPM равны, поэтому $FP = MT = b$, $KP = \sqrt{FK^2 + FP^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Значит, площадь квадрата $BKPM$ равна $KP^2 = a^2 + b^2$.

2. а) Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям:

- число нечётное, но не является простым,
- оно может быть представлено в виде суммы таких двух натуральных чисел, что если одно из этих чисел увеличить в 178 раз, а другое — уменьшить в 178 раз, их сумма не изменится.

Ответ: 537.

Решение. Пусть данное число N представимо в виде $N = p+q$, $p, q \in \mathbb{N}$ и в виде $N = 178p+\frac{q}{178}$. Отсюда получаем равенство $p + q = 178p + \frac{q}{178}$, откуда $q = 178p$. Значит, $N = 179q$. Второе из данных условий выполнено при любых q. Минимальное q, для которого верное первое условие — это $q = 3$. Искомое число равно $3 \cdot 179 = 537$.

б) Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям:

- число нечётное, но не является простым,
- оно может быть представлено в виде суммы таких двух натуральных чисел, что если одно из этих чисел увеличить в 262 раза, а другое — уменьшить в 262 раза, их сумма не изменится.

Ответ: 789.

в) Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям:

- число нечётное, но не является простым,
- оно может быть представлено в виде суммы таких двух натуральных чисел, что если одно из этих чисел увеличить в 292 раза, а другое — уменьшить в 292 раза, их сумма не изменится.

Ответ: 879.

г) Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям:

- число нечётное, но не является простым,
- оно может быть представлено в виде суммы таких двух натуральных чисел, что если одно из этих чисел увеличить в 210 раз, а другое — уменьшить в 210 раз, их сумма не изменится.

Ответ: 633.

3. а) Назовём натуральное четырёхзначное число *хорошим*, если оно имеет в своей записи ровно две различные цифры, причём эти цифры имеют одну чётность. Найдите количество хороших чисел.
Ответ: 252.
Решение. Либо две цифры отличны от нуля и нечётны (это $C_5^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способа), либо чётны и отличны от нуля (это $C_4^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способа), либо чётны, и одна из них равна нулю (это $C_4^1 \cdot (C_3^1 + C_3^2 + C_3^3)$ способа).

б) Назовём натуральное пятизначное число *хорошим*, если оно имеет в своей записи ровно две различные цифры, причём эти цифры имеют одну чётность. Найдите количество хороших чисел.
Ответ: 540.

в) Назовём натуральное шестизначное число *хорошим*, если оно имеет в своей записи ровно две различные цифры, причём эти цифры имеют одну чётность. Найдите количество хороших чисел.
Ответ: 1 116.

г) Назовём натуральное семизначное число *хорошим*, если оно имеет в своей записи ровно две различные цифры, причём эти цифры имеют одну чётность. Найдите количество хороших чисел.
Ответ: 2 268.

4. а) Попарно различные натуральные числа m, n, k таковы, что $m+n+k=301$. Найдите наибольшее возможное значение суммы корней уравнения $2x^2+(m+k)n=(m+2n+k)x$.

Ответ: 299,5.

Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{k+m}{2}$ и $x_2=n$. Сумма корней оказывается наибольшей, если выбрать n макисмально возможным, а m и k — минимально возможными, то есть взять $n=298$, $k=1$, $m=2$ (или $n=298$, $k=2$, $m=1$).

Действительно, если $n<298$, то сумма корней не максимальна: увеличив n на 1 и уменьшив одно из двух оставшихся чисел на 1, получим, что сумма корней увеличится на $\frac{1}{2}$.

б) Попарно различные натуральные числа m, n, k таковы, что $m+n+k=257$. Найдите наибольшее возможное значение суммы корней уравнения $2x^2+(m+k)n=(m+2n+k)x$.

Ответ: 255,5.

в) Попарно различные натуральные числа m, n, k таковы, что $m+n+k=432$. Найдите наибольшее возможное значение суммы корней уравнения $2x^2+(m+k)n=(m+2n+k)x$.

Ответ: 430,5.

г) Попарно различные натуральные числа m, n, k таковы, что $m+n+k=586$. Найдите наибольшее возможное значение суммы корней уравнения $2x^2+(m+k)n=(m+2n+k)x$.

Ответ: 584,5.

5. а) Про числа a, b, c, d известно, что $a^2+7b^2=14$, $bc-ad=7$, $ac+7bd=\sqrt{210}$. Найдите наибольшее значение выражения c^2+7d^2.

Ответ: 39,5.

Решение. Заметим, что $(a^2+7b^2)\cdot(c^2+7d^2)=7(bc-ad)^2+(ac+7bd)^2$, откуда

$$c^2+7d^2=\frac{7\cdot 49+210}{14}=39{,}5.$$

б) Про числа a, b, c, d известно, что $a^2+9b^2=18$, $bc-ad=9$, $ac+9bd=\sqrt{360}$. Найдите наибольшее значение выражения c^2+9d^2.

Ответ: 60,5.

в) Про числа a, b, c, d известно, что $a^2+11b^2=22$, $bc+ad=11$, $ac-11bd=\sqrt{517}$. Найдите наибольшее значение выражения c^2+11d^2.

Ответ: 84.

г) Про числа a, b, c, d известно, что $a^2+13b^2=26$, $bc+ad=13$, $ac-13bd=\sqrt{702}$. Найдите наибольшее значение выражения c^2+13d^2.

Ответ: 111,5.

6. а) Время работы ноутбука от батареи обратно пропорционально мощности, потребляемой всеми его компонентами. Если ноутбук полностью заряжен, то он проработает с максимальной яркостью экрана 4 часа. При этом 2/3 мощности потребляет экран. Вася использует ноутбук следующим образом: каждый раз, когда батарея разряжается на очередные 25% от изначального значения (то есть достигает уровня 75%, 50%, 25%), он уменьшает яркость экрана на 25% (от первоначального значения яркости). Сколько времени ему удастся проработать за ноутбуком? Мощность, потребляемая экраном, прямо пропорциональна яркости экрана. Ответ выразите в часах и при необходимости округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 5,7.

Решение. Пусть P_0 — полная мощность ноутбука при максимальной яркости экрана, $t_0 = 4$ часа — полное время работы при максимальной яркости. Каждые 25% эта мощность уменьшается на $\frac{\alpha}{4}P_0$, где $\alpha = \frac{2}{3}$. После уменьшения заряда батареи на 25% пройдет время $\frac{t_0}{4}$. На следующем участке, где заряд батареи меняется от 75% до 50%, потребляемая мощность равна $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) P_0$, поэтому пройдет время $\frac{t_0/4}{1-\alpha/4} = \frac{t_0}{4-\alpha}$. Аналогично, разрядка батареи с 50% до 25% займет время $\frac{t_0}{4-2\alpha}$, а от 25% заряда до полной разрядки ноутбука пройдет время $\frac{t_0}{4-3\alpha}$. Итак, Вася проработает за ноутбуком время $t_0 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4-\alpha} + \frac{1}{4-2\alpha} + \frac{1}{4-3\alpha}\right)$.

б) Время работы ноутбука от батареи обратно пропорционально мощности, потребляемой всеми его компонентами. Если ноутбук полностью заряжен, то он проработает с максимальной яркостью экрана 3 часа. При этом 2/5 мощности потребляет экран. Вася использует ноутбук следующим образом: каждый раз, когда батарея разряжается на очередные 25% от изначального значения (то есть достигает уровня 75%, 50%, 25%), он уменьшает яркость экрана на 25% (от первоначального значения яркости). Сколько времени ему удастся проработать за ноутбуком? Мощность, потребляемая экраном, прямо пропорциональна яркости экрана. Ответ выразите в часах и при необходимости округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 3,592.

в) Время работы ноутбука от батареи обратно пропорционально мощности, потребляемой всеми его компонентами. Если ноутбук полностью заряжен, то он проработает с максимальной яркостью экрана 4 часа. При этом 1/6 мощности потребляет экран. Вася использует ноутбук следующим образом: каждый раз, когда батарея разряжается на очередные 25% от изначального значения (то есть достигает уровня 75%, 50%, 25%), он уменьшает яркость экрана на 25% (от первоначального значения яркости). Сколько времени ему удастся проработать за ноутбуком? Мощность, потребляемая экраном, прямо пропорциональна яркости экрана. Ответ выразите в часах и при необходимости округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 4,277.

г) Время работы ноутбука от батареи обратно пропорционально мощности, потребляемой всеми его компонентами. Если ноутбук полностью заряжен, то он проработает с максимальной яркостью экрана 3 часа. При этом 1/2 мощности потребляет экран. Вася использует ноутбук следующим образом: каждый раз, когда батарея разряжается на очередные 25% от изначального значения (то есть достигает уровня 75%, 50%, 25%), он уменьшает яркость экрана на 25% (от первоначального значения яркости). Сколько времени ему удастся проработать за ноутбуком? Мощность, потребляемая экраном, прямо пропорциональна яркости экрана. Ответ выразите в часах и при необходимости округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 3,807.

7. а) На доске написано число 987 656 789. Вася заменил в нём какие-то 4 цифры так, что получилось минимально возможное девятизначное число, делящееся на 275. Найдите это число.

Ответ: 107 656 725.

Решение. Делимость на 275 эквивалентна делимости на 25 и на 11. Для делимости на 25 надо заменить две последние цифры числа на одну из комбинаций 00, 25, 50, 75. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакочередующаяся сумма цифр делится на 11. Чтобы в итоге получить наименьшее возможное число, надо минимизировать первые две цифры исходного числа таким образом, чтобы при этом возникла делимость на 11. Рассмотрим случаи.

Пусть последние две цифры — это 50. Получим число $\overline{xy7\,656\,750}$. Для делимости на 11 необходимо и достаточно, чтобы $x-y+7-6+5-6+7-5+0=x-y+2$ делилось на 11. Значит, надо взять $x=1$, $y=3$, и получится число 137 656 750.

Пусть последние две цифры — это 25. Получим число $\overline{xy7\,656\,725}$. Для делимости на 11 необходимо и достаточно, чтобы $x-y+7-6+5-6+7-2+5=x-y+10$ делилось на 11. Значит, надо взять $x=1$, $y=0$, и получится число 107 656 725.

Два других случая разбираются аналогично. Минимально возможное число равно 107 656 725.

б) На доске написано число 876 545 678. Вася заменил в нём какие-то 4 цифры так, что получилось минимально возможное девятизначное число, делящееся на 275. Найдите это число.

Ответ: 101 545 675.

в) На доске написано число 765 434 567. Вася заменил в нём какие-то 4 цифры так, что получилось минимально возможное девятизначное число, делящееся на 275. Найдите это число.

Ответ: 115 434 550.

г) На доске написано число 664 323 466. Вася заменил в нём какие-то 4 цифры так, что получилось минимально возможное девятизначное число, делящееся на 275. Найдите это число.

Ответ: 104 323 450.

8. а) Окружность ω касается оснований AD и BC равнобокой трапеции $ABCD$ в их серединах и пересекает боковую сторону AB в точках K и L таких, что K лежит между A и L, а $AK = 24$, $KL = 30$, $BL = 10$. Найдите квадрат радиуса окружности ω.

Ответ: 960.

Решение. Пусть T и F — точки касания окружности с основаниями AD и BC соответственно. По теореме о касательной и секущей получаем, что $AT^2 = AK \cdot AL = 24 \cdot 54$, $BF^2 = BL \cdot BK = 10 \cdot 40$, поэтому $AT = 36$, $BF = 20$. Из прямоугольной трапеции $ABFT$ находим, что $FT^2 = AB^2 - (AT - BF)^2 = 64^2 - 16^2 = 3\,840$. Остаётся заметить, что FT — диаметр окружности, поэтому квадрат её радиуса равен $\frac{1}{4} FT^2 = \frac{1}{4} \cdot 3\,840 = 960$.

б) Окружность ω касается оснований AD и BC равнобокой трапеции $ABCD$ в их серединах и пересекает боковую сторону AB в точках K и L таких, что K лежит между A и L, а $AK = 6$, $KL = 48$, $BL = 2$. Найдите квадрат радиуса окружности ω.

Ответ: 768.

в) Окружность ω касается оснований AD и BC равнобокой трапеции $ABCD$ в их серединах и пересекает боковую сторону AB в точках K и L таких, что K лежит между A и L, а $AK = 4$, $KL = 96$, $BL = 2$. Найдите квадрат радиуса окружности ω.

Ответ: 2592.

г) Окружность ω касается оснований AD и BC равнобокой трапеции $ABCD$ в их серединах и пересекает боковую сторону AB в точках K и L таких, что K лежит между A и L, а $AK = 20$, $KL = 160$, $BL = 2$. Найдите квадрат радиуса окружности ω.

Ответ: 7840.

9. а) Дано множество чисел $M = \{2024, 2025, \ldots, 2031\}$. Для каждого непустого подмножества множества M (включая само множество M) вычислили сумму чисел, входящих в это подмножество, а затем все эти суммы сложили, получив число S. На какое двузначное число заканчивается S?

Ответ: 60.

Решение. Рассмотрим некоторое подмножество A множества M. Сопоставим этому подмножеству множество $\overline{A}$ (дополняющее его до M). Тогда все подмножества множества M (включая пустое) разобьются на пары, причем в каждой паре будут присутствовать все числа множества M ровно по одному разу. Так как в множестве M 8 чисел, то количество всевозможных подмножеств множества M (включая пустое) равно 2^8. Значит, количество пар равно 2^7. Поэтому число $S = 2^7 \cdot (2024 + 2025 + \ldots + 2031)$. Заметим, что на последние две цифры S влияют только последние две цифры сомножителей, входящих в выражение. Так как 2^7 заканчивается на 28, а $2024 + 2025 + \ldots + 2031$ – на 20, то S заканчивается на 60.

б) Дано множество чисел $M = \{3182, 3183, \ldots, 3189\}$. Для каждого непустого подмножества множества M (включая само множество M) вычислили сумму чисел, входящих в это подмножество, а затем все эти суммы сложили, получив число S. На какое двузначное число заканчивается S?

Ответ: 52.

в) Дано множество чисел $M = \{5277, 5278, \ldots, 5284\}$. Для каждого непустого подмножества множества M (включая само множество M) вычислили сумму чисел, входящих в это подмножество, а затем все эти суммы сложили, получив число S. На какое двузначное число заканчивается S?

Ответ: 32.

г) Дано множество чисел $M = \{7350, 7351, \ldots, 7357\}$. Для каждого непустого подмножества множества M (включая само множество M) вычислили сумму чисел, входящих в это подмножество, а затем все эти суммы сложили, получив число S. На какое двузначное число заканчивается S?

Ответ: 84.

10. а) На клетки доски 12×12 положили камни попарно различного веса (в каждую клетку положили ровно один камень). Тройку клеток назовем *хорошей*, если они расположены в виде «уголка», а камень, лежащий в «вершине» уголка, тяжелее каждого из двух камней, лежащих в двух остальных клетках уголка. Какое наибольшее количество хороших троек клеток может быть на доске? Тройки могут пересекаться.

Ответ: 242.

Решение. Рассмотрим любой квадрат 2×2 клетки на доске. Он содержит 4 уголка. Тогда в этом квадрате не больше 2 хороших троек. Так как каждый уголок находится в каком-то квадрате 2×2, то хороших троек на доске не больше половины от общего количества уголков. Это количество равно $4 \cdot 11^2 = 484$, так как всего на доске есть 11^2 квадрат размером 2×2. Таким образом, хороших троек не больше $2 \cdot 11^2 = 242$.

Покажем, что на доске может быть 242 хороших тройки. Раскрасим клетки доски в два цвета в шахматном порядке, и положим на чёрные клетки 72 более тяжелых камня, а на белые – более легкие 72 камня. Тогда в каждом квадрате 2×2 будет ровно две хороших тройки.

б) На клетки доски 14×14 положили камни попарно различного веса (в каждую клетку положили ровно один камень). Тройку клеток назовем *хорошей*, если они расположены в виде «уголка», а камень, лежащий в «вершине» уголка, тяжелее каждого из двух камней, лежащих в двух остальных клетках уголка. Какое наибольшее количество хороших троек клеток может быть на доске? Тройки могут пересекаться.

Ответ: 338.

в) На клетки доски 16×16 положили камни попарно различного веса (в каждую клетку положили ровно один камень). Тройку клеток назовем *хорошей*, если они расположены в виде «уголка», а камень, лежащий в «вершине» уголка, тяжелее каждого из двух камней, лежащих в двух остальных клетках уголка. Какое наибольшее количество хороших троек клеток может быть на доске? Тройки могут пересекаться.

Ответ: 450.

г) На клетки доски 18×18 положили камни попарно различного веса (в каждую клетку положили ровно один камень). Тройку клеток назовем *хорошей*, если они расположены в виде «уголка», а камень, лежащий в «вершине» уголка, тяжелее каждого из двух камней, лежащих в двух остальных клетках уголка. Какое наибольшее количество хороших троек клеток может быть на доске? Тройки могут пересекаться.

Ответ: 578.