10 класс – день 2

1. а) Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать три числа так, чтобы одно из них равнялось среднему арифметическому двух оставшихся?
Ответ: 2 450 или 2 550.
Решение. Если считаются тройки попарно различных чисел, то количество искомых троек такое же, как и количество пар чисел одинаковой чётности, т.е. $2 \cdot C_{50}^2$.
Если считать, что числа могут повторяться, то есть ещё 100 троек чисел вида $(k; k; k)$ — в сумме выходит $2\,450 + 100 = 2\,550$ троек чисел.

б) Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 1000 можно выбрать три числа так, чтобы одно из них равнялось среднему арифметическому двух оставшихся?
Ответ: 249 500 или 250 500.

в) Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 500 можно выбрать три числа так, чтобы одно из них равнялось среднему арифметическому двух оставшихся?
Ответ: 62 250 или 62 750.

г) Сколькими способами из натуральных чисел от 1 до 400 можно выбрать три числа так, чтобы одно из них равнялось среднему арифметическому двух оставшихся?
Ответ: 39 800 или 40 200.

2. а) Олег должен написать в тетради 373 подряд идущих натуральных числа таких, что их среднее арифметическое — простое число. Какое наименьшее число он мог написать в тетради?

Ответ: 5.

Решение. Пусть Олег записал числа $k, k+1, k+2, \ldots, k+372$. Тогда их среднее арифметическое равно

$$\frac{k+(k+1)+\ldots+(k+372)}{373} = \frac{(k+(k+372))\cdot 373}{2}\cdot\frac{1}{373} = k+186.$$

Минимальное значение k, при котором это число простое, равно 5 (выходит значение $k+186 = 191$).

б) Олег должен написать в тетради 987 подряд идущих натуральных чисел таких, что их среднее арифметическое — простое число. Какое наименьшее число он мог написать в тетради?

Ответ: 6.

в) Олег должен написать в тетради 799 подряд идущих натуральных чисел таких, что их среднее арифметическое — простое число. Какое наименьшее число он мог написать в тетради?

Ответ: 2.

г) Олег должен написать в тетради 859 подряд идущих натуральных чисел таких, что их среднее арифметическое — простое число. Какое наименьшее число он мог написать в тетради?

Ответ: 2.

3. а) На доске написано число 23 456 789. Петя заменил в нём 5 цифр: 4 последние цифры и ещё какую-то. В итоге получилось восьмизначное число, делящееся на 48, притом минимально возможное. Что это за число?

Ответ: 13 450 032.

Решение. Чтобы получить минимально возможное число, надо заменить первую цифру на 1 (если этого не сделать, любое другое число будет не менее 20 000 000). Значит, число имеет вид $1345****$, где звёздочки заменяют неизвестные цифры.

Число делится на 48 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 16. Признак делимости на 16 — число, образованное последними четырьмя цифрами, делится на 16. Чтобы получить наименьший результат, рассматриваем минимальные числа делящиеся на 16. Варианты 0 000 и 0 016 не подходят, так как итоговое число не делится на 3. А 0 032 — подходит. Итак, искомое число — это 13 450 032.

б) На доске написано число 23 456 789. Петя заменил в нём 5 цифр: 4 последние цифры и ещё какую-то. В итоге получилось восьмизначное число, делящееся на 72, притом минимально возможное. Что это за число?

Ответ: 13 450 032.

в) На доске написано число 23 456 789. Петя заменил в нём 4 цифры: 3 последние цифры и ещё какую-то. В итоге получилось восьмизначное число, делящееся на 56, притом минимально возможное. Что это за число?

Ответ: 13 456 016.

г) На доске написано число 23 456 789. Петя заменил в нём 4 цифры: 3 последние цифры и ещё какую-то. В итоге получилось восьмизначное число, делящееся на 144, притом минимально возможное. Что это за число?

Ответ: 13 456 080 или 13 456 224.

Замечание. В четвёртом варианте минимальное число вида $13456***$, делящееся на 144 — это 13 456 080. Но тогда предпоследняя цифра оставлена без изменений. Если изменить все три последние цифры, то минимально возможное число оказывается ровно на 144 больше — это 13 456 224.

4. а) Найдите максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$, если $90 - 12y + y^2 - 16x + x^2 = 0$.
Ответ: 3.
Решение. Данное в условии уравнение задаёт окружность с центром $(8, 6)$ и радиусом $\sqrt{10}$. Пусть $y = kx$ — касательная к указанной окружности с наименьшим положительным угловым коэффициентом. Тогда требуемое максимальное значение есть $\frac{1}{k}$. Нетрудно получить, что искомой касательной является прямая $y = \frac{x}{3}$, поэтому максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$ равно 3.

б) Найдите максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$, если $117 - 14x + x^2 - 18y + y^2 = 0$.
Ответ: 1,5.

в) Найдите максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$, если $116 - 16x + x^2 - 18y + y^2 = 0$.
Ответ: 2,5.

г) Найдите максимальное значение отношения $\frac{x}{y}$, если $125 - 18x + x^2 - 14y + y^2 = 0$.
Ответ: 2.

5. а) Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D. Пусть E — середина BC, а точка F взята на стороне AC так, что $BF \perp AI$. Найдите длину отрезка CF, если $AB = 20$, $BC = 16$, $DE = 2$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть вписанная окружность треугольника касается AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим $BP = BD = y$, $CD = CQ = z$. Биссектриса AI делит угол ABC пополам и перпендикулярна прямой BF, поэтому треугольник ABF равнобедренный, а $AP = AQ$, $FQ = BP = y$. Тогда $CF = z - y$. Поскольку E — середина BC, отрезки CE и BE равны $\frac{z+y}{2}$. Тогда $DE = \frac{z-y}{2}$, а значит, $CF = 2DE$.

б) Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D. Пусть E — середина BC, а точка F взята на стороне AC так, что $BF \perp AI$. Найдите длину отрезка CF, если $AB = 100$, $BC = 95$, $DE = 8$.

Ответ: 16.

в) Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D. Пусть E — середина BC, а точка F взята на стороне AC так, что $BF \perp AI$. Найдите длину отрезка CF, если $AB = 20$, $BC = 23$, $DE = 3$.

Ответ: 6.

г) Окружность с центром I вписана в треугольник ABC и касается его стороны BC в точке D. Пусть E — середина BC, а точка F взята на стороне AC так, что $BF \perp AI$. Найдите длину отрезка CF, если $AB = 100$, $BC = 125$, $DE = 18$.

Ответ: 36.

6. а) Антон выписал на доску числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2025}$ такие, что не все они равны между собой. Внимательно изучив числа на доске, Константин заметил следующую закономерность: для любого натурального значения $k \in [2; 2024]$ число $A_{k+1} - A_k$ вдвое меньше, чем $A_{k+1} - A_{k-1}$. Каково наименьшее возможное значение отношения $\frac{A_{100}-A_{98}}{A_{2023}-A_{2013}}$?

Ответ: 0,2.

Решение. Обозначим $A_{k+1}-A_k = p_k$. Тогда $A_{k+1}-A_{k-1} = (A_{k+1} - A_k)+(A_k - A_{k-1}) = p_k+p_{k-1}$. По условию $2p_k = p_k + p_{k-1}$, откуда $p_k = p_{k-1}$, то есть все члены последовательности $\{p_k\}$ равны между собой. Но тогда

$$\frac{A_{100} - A_{98}}{A_{2023} - A_{2013}} = \frac{p_{99} + p_{98}}{p_{2022} + p_{2021} + \ldots + p_{2013}} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

б) Антон выписал на доску числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2025}$ такие, что не все они равны между собой. Внимательно изучив числа на доске, Константин заметил следующую закономерность: для любого натурального значения $k \in [2; 2024]$ число $A_{k+1} - A_k$ вдвое меньше, чем $A_{k+1} - A_{k-1}$. Каково наименьшее возможное значение отношения $\dfrac{A_{200} - A_{197}}{A_{2022} - A_{2012}}$?

Ответ: 0,3.

в) Антон выписал на доску числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2025}$ такие, что не все они равны между собой. Внимательно изучив числа на доске, Константин заметил следующую закономерность: для любого натурального значения $k \in [2; 2024]$ число $A_{k+1} - A_k$ вдвое меньше, чем $A_{k+1} - A_{k-1}$. Каково наименьшее возможное значение отношения $\dfrac{A_{300} - A_{296}}{A_{2021} - A_{2011}}$?

Ответ: 0,4.

г) Антон выписал на доску числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2025}$ такие, что не все они равны между собой. Внимательно изучив числа на доске, Константин заметил следующую закономерность: для любого натурального значения $k \in [2; 2024]$ число $A_{k+1} - A_k$ вдвое меньше, чем $A_{k+1} - A_{k-1}$. Каково наименьшее возможное значение отношения $\dfrac{A_{400} - A_{395}}{A_{2020} - A_{2010}}$?

Ответ: 0,5.

7. а) Какое наименьшее значение может принимать сумма 20 различных натуральных чисел таких, что

- ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7,
- сумма любых двух чисел делится на 2,
- сумма любых трёх чисел делится на 3,
- сумма любых пяти чисел делится на 5,
- сумма любых семи чисел делится на 7?

Ответ: 39 920.

Решение. Из последних четырёх условий следует, что все числа имеют одинаковые остатки от деления на каждое из чисел 2, 3, 5, 7. Покажем, например, что остатки от деления на 3 у всех чисел одинаковы. И правда, каждая из сумм $a_1 + a_2 + a_3$ и $a_1 + a_2 + a_4$ делится на 3, но тогда и разность этих сумм, равная $a_3 - a_4$ также делится на 3, поэтому a_3 и a_4 имеют одинаковые остатки от деления на 3.

Поскольку все числа имеют одинаковые остатки от деления на *взаимно простые* числа 2, 3, 5, 7, отсюда следует, что у них одинаковые остатки от деления на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Таким образом, данные числа представимы в виде $210k + m$, где $m \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём m фиксировано, а k должно быть различным для каждого из чисел. Чтобы ни одно из чисел не делилось ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7, необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяло число m. Минимально возможное значение m равно 1, а минимальное значение суммы всех чисел есть

$$1 + (1 + 210) + (1 + 2 \cdot 210) + \ldots + (1 + 19 \cdot 210) = 39\,920.$$

б) Какое наименьшее значение может принимать сумма 30 различных натуральных чисел таких, что

- ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 19,
- сумма любых двух чисел делится на 2,
- сумма любых трёх чисел делится на 3,
- сумма любых пяти чисел делится на 5,
- сумма любых девятнадцати чисел делится на 19?

Ответ: 247 980.

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма 40 различных натуральных чисел таких, что

- ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 5, ни на 7, ни на 11,
- сумма любых двух чисел делится на 2,
- сумма любых пяти чисел делится на 5,
- сумма любых семи чисел делится на 7,
- сумма любых одиннадцати чисел делится на 11?

Ответ: 600 640.

г) Какое наименьшее значение может принимать сумма 50 различных натуральных чисел таких, что

- ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 7, ни на 13,
- сумма любых двух чисел делится на 2,
- сумма любых трёх чисел делится на 3,
- сумма любых семи чисел делится на 7,
- сумма любых тринадцати чисел делится на 13?

Ответ: 668 900.

8. а) Окружности ω_1 и ω_2 имеют радиусы 5 и 8, а расстояние между их центрами больше 13. Оказалось, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, ограниченного одной общей внешней и двумя общими внутренними касательными к этим окружностям.
Ответ: 40.
Решение. Пусть B — точка пересечения общих внутренних касательных, A и C — точки пересечения этих касательных с общей внешней касательной (притом отрезок AB касается окружности ω радиуса 5, а его продолжение — окружности Ω радиуса 8 в точке T; отрезок BC касается Ω в точке N; продолжение AC за точку C касается Ω в точке Q). Используя равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем, что полупериметр треугольника ABC есть

$$p_{ABC} = \frac{1}{2}(AB+AC+BC) = \frac{1}{2}(AB+AC+BN+NC) = \frac{1}{2}(AB+AC+BT+CQ) = \frac{1}{2}(AT+AQ) = AT.$$

Окружность ω является вневписанной для треугольника ABC, следовательно, площадь треугольника может быть выражена по формуле $S = r(p-a)$, где r — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a треугольника, p — его полупериметр. Итак, $S_{ABC} = 5\cdot(p_{ABC} - AB) = 5(AT - AB) = 5BT = 5\cdot 8 = 40$.

б) Окружности ω_1 и ω_2 имеют радиусы 9 и 7, а расстояние между их центрами больше 16. Оказалось, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, ограниченного одной общей внешней и двумя общими внутренними касательными к этим окружностям.
Ответ: 63.

в) Окружности ω_1 и ω_2 имеют радиусы 15 и 4, а расстояние между их центрами больше 19. Оказалось, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, ограниченного одной общей внешней и двумя общими внутренними касательными к этим окружностям.
Ответ: 60.

г) Окружности ω_1 и ω_2 имеют радиусы 10 и 20, а расстояние между их центрами больше 30. Оказалось, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, ограниченного одной общей внешней и двумя общими внутренними касательными к этим окружностям.
Ответ: 200.

9. а) В лесничестве организовали три пункта A, B, C подкорма птиц на время зимних холодов. В силу особенностей их расположения в пункт A прилетает больше всего птиц, а в пункт C — меньше всего. Ежедневно на эти три пункта в сумме выделяется S килограммов корма, который распределяется пропорционально количеству птиц, прилетевших в данный пункт накануне. Известно, что:

- 1 января количества птиц, прилетевших в три пункта, составили геометрическую прогрессию;
- 2 января в каждый из пунктов прилетело на 130 птиц больше, чем 1 января;
- 2 января в пункт C прилетело ровно в 3 раза меньше птиц, чем в пункт A;
- 3 января в пункт A выделили на 2,34 кг меньше корма, чем 2 января;
- 3 января в пункт C выделили на 1,56 кг больше корма, чем 2 января.

Найдите S. Ответ укажите в килограммах.

Ответ: 11,34.

Решение. Пусть количества птиц, прилетевших в пункты A, B, C 1 января составили соответственно nx^2, nx, n. Значит, 2 января корм между пунктами A, B, C был распределён в отношении $x^2 : x : 1$. Исходя из второго условия получаем, что 2 января в пункты A, B, C прилетело соответственно nx^2+130, $nx+130$, $n+130$ птиц. Согласно третьему условию отсюда $nx^2+130 = 3(n+130)$, откуда $n = \frac{260}{x^2-3}$. Подставляя это значение в формулы для количества птиц во второй день и преобразуя, получаем $\frac{130(3x+3)(x-1)}{x^2-3}$, $\frac{130(x+3)(x-1)}{x^2-3}$, $\frac{130(x+1)(x-1)}{x^2-3}$. Это означает, что 3 января корм должен быть распределён в отношении $(3x+3) : (x+3) : (x+1)$. Используя четвёртое и пятое условия задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{Sx^2}{1+x+x^2} - \frac{S(3x+3)}{5x+7} = 2{,}34, \\ \frac{S}{1+x+x^2} - \frac{S(x+1)}{5x+7} = -1{,}56. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем уравнение с одной переменной x, из которого после упрощения выходит $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$, $\left(x^2-3\right)(x-4) = 0$. Так как $x^2 \neq 3$, получаем единственное возможное значение $x = 4$. Подставляя его в любое из уравнений системы, находим, что $S = 11{,}34$.

б) В лесничестве организовали три пункта A, B, C подкорма птиц на время зимних холодов. В силу особенностей их расположения в пункт A прилетает больше всего птиц, а в пункт C — меньше всего. Ежедневно на эти три пункта в сумме выделяется S килограммов корма, который распределяется пропорционально количеству птиц, прилетевших в данный пункт накануне. Известно, что:

- 1 января количества птиц, прилетевших в три пункта, составили геометрическую прогрессию;
- 2 января в каждый из пунктов прилетело на 200 птиц меньше, чем 1 января;
- 2 января в пункт C прилетело ровно в 3 раза меньше птиц, чем в пункт A;
- 3 января в пункт A выделили на 1,3 кг больше корма, чем 2 января;
- 3 января в пункт C выделили на 1,1 кг меньше корма, чем 2 января.

Найдите S. Ответ укажите в килограммах.

Ответ: 112,7.

в) В лесничестве организовали три пункта A, B, C подкорма птиц на время зимних холодов. В силу особенностей их расположения в пункт A прилетает больше всего птиц, а в пункт C — меньше всего. Ежедневно на эти три пункта в сумме выделяется S килограммов корма, который распределяется пропорционально количеству птиц, прилетевших в данный пункт накануне. Известно, что:

- 1 января количества птиц, прилетевших в три пункта, составили геометрическую прогрессию;

- 2 января в каждый из пунктов прилетело на 500 птиц больше, чем 1 января;
- 2 января в пункт C прилетело ровно в 3 раза меньше птиц, чем в пункт A;
- 3 января в пункт A выделили на 5 кг меньше корма, чем 2 января;
- 3 января в пункт C выделили на 4 кг больше корма, чем 2 января.

Найдите S. Ответ укажите в килограммах.
Ответ: 119

г) В лесничестве организовали три пункта A, B, C подкорма птиц на время зимних холодов. В силу особенностей их расположения в пункт A прилетает больше всего птиц, а в пункт C — меньше всего. Ежедневно на эти три пункта в сумме выделяется S килограммов корма, который распределяется пропорционально количеству птиц, прилетевших в данный пункт накануне. Известно, что:

- 1 января количества птиц, прилетевших в три пункта, составили геометрическую прогрессию;
- 2 января в каждый из пунктов прилетело на 390 птиц больше, чем 1 января;
- 2 января в пункт C прилетело ровно в 3 раза меньше птиц, чем в пункт A;
- 3 января в пункт A выделили на 12 кг меньше корма, чем 2 января;
- 3 января в пункт C выделили на 9 кг больше корма, чем 2 января.

Найдите S. Ответ укажите в килограммах.
Ответ: 117

10. а) Фокусник попросил 60 зрителей загадать различные числа, каждого — одно число. За один вопрос фокусник может выбрать любых трёх зрителей и спросить, какие числа они загадали. В ответ ему скажут множество из трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов фокусник может указать, какие числа загадал каждый из зрителей?

Ответ: 30.

Решение. Пусть фокусник задал N вопросов. Заметим, что нужно спросить про числа у каждого зрителя. Пусть есть M зрителей, которых спрашивали ровно один раз. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких зрителей, иначе они могут «обменяться числами». Следовательно, $M \leq N$. Других зрителей спрашивали хотя бы два раза. Если просуммировать для каждого зрителя количество вопросов, в которых он участвовал, то получится утроенное количество вопросов. Значит, $3N \geq M + 2(60 - M) = 120 - M \geq 120 - N$, откуда $N \geq 30$.

Покажем, как узнать требуемое за 30 вопросов. Для этого разобьем зрителей на 10 шестёрок, и покажем, как за 3 вопроса определить числа в одной шестёрке. Пусть люди в шестёрке – это A, B, C, D, E, F. Тогда спросим числа у троек (A, B, C), (C, D, E) и (E, F, A). Зрители A, C, E участвуют в двух вопросах (разные зрители – в разных парах вопросов). Поэтому их числа можно определить. А оставшиеся числа зрителей B, D, F определяются однозначно.

б) Фокусник попросил 90 зрителей загадать различные числа. За один вопрос фокусник может выбрать любых трёх зрителей и спросить, какие числа они загадали. В ответ ему скажут множество из трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов фокусник может указать, какие числа загадал каждый из зрителей?

Ответ: 45.

в) Фокусник попросил 120 зрителей загадать различные числа. За один вопрос фокусник может выбрать любых трёх зрителей и спросить, какие числа они загадали. В ответ ему скажут множество из трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов фокусник может указать, какие числа загадал каждый из зрителей?

Ответ: 60.

г) Фокусник попросил 150 зрителей загадать различные числа. За один вопрос фокусник может выбрать любых трёх зрителей и спросить, какие числа они загадали. В ответ ему скажут множество из трёх чисел. За какое наименьшее количество вопросов фокусник может указать, какие числа загадал каждый из зрителей?

Ответ: 75.