11 класс – день 2

1. а) Олег выписал в строку 110 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 12-е число делится на 12, 75-е — на 75, а 110-е — на 110. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

Ответ: 52 801.

Решение. Пусть $12k$ — двенадцатое из выписанных чисел. Тогда при прибавлении к нему 63 должно выйти число, делящееся на 75, откуда получаем уравнение $12k + 63 = 75n$ с двумя целочисленными переменными. решая его, находим, что $k = 1 + 25p$, $n = 1 + 4p$, $p \in \mathbb{Z}$. Значит, $12k = 12(1+25p) = 12+300p$. Если к 12-ому числу прибавить 98, получится 110-ое число, которое должно делится на 110. Отсюда следует, что $12+300p+98 = 110m$, т.е. $30p = 11(m-1)$, откуда следует, что p — произвольное целое число, кратное 11. Значит, $p = 11q$, а $12k = 12+300p = 12+3300q$. Так как это двенадцатое число, первое число равно $3300q+1$. Решая неравенство $3300q+1 > 50\,000$, находим, что минимальное значение $q = 16$. Соответствующее значение первого выписанного на доску числа равно 52 801.

б) Олег выписал в строку 110 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 36-е число делится на 36, 40-е — на 40, а 110-е — на 110. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

Ответ: 51 481.

в) Олег выписал в строку 130 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 12-е число делится на 12, 50-е — на 50, а 130-е — на 130. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

Ответ: 50 701.

г) Олег выписал в строку 130 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 24-е число делится на 24, 45-е — на 45, а 130-е — на 130. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

Ответ: 51 481.

2. а) Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2-y^2=31^{405}$.
Ответ: 812.
Решение. Раскладывая левую часть на множители, получаем $(2x+y)(2x-y)=31^{405}$. Так как каждый из множителей должен быть целым числом, получаем

$$\begin{cases}2x+y=31^k,\\ 2x-y=31^{405-k}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x+y=-31^k,\\ 2x-y=-31^{405-k},\end{cases} \quad \text{где} \quad 0\leqslant k\leqslant 405, k\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Рассмотрим первую систему. Решая её, находим, что $x=\frac{31^k+31^{405-k}}{4}$, $y=\frac{31^k-31^{405-k}}{2}$. В выражении для y в числителе дроби при любом k записана разность двух нечётных чисел; она чётна и потому делится на 2, то есть $y\in\mathbb{Z}$. Что касается x, нужно исследовать, делится ли числитель на 4. Так как $31^k\equiv(-1)^k \pmod 4$, $31^{405-k}\equiv(-1)^{405-k} \pmod 4$, получаем $31^k+31^{405-k}\equiv(-1)^k+(-1)^{405-k} \pmod 4$. При любом целом k числа k и $405-k$ имеют разную чётность, следовательно, $(-1)^k+(-1)^{405-k}=0$, и числитель дроби делится на 4. Итак, при любых значениях k получаем, что x и y — целые. Таким образом, первая система (1) имеет 406 решений. Аналогично устанавливается, что и вторая система имеет 406 решений, и общее количество решений составляет 812.

б) Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2-y^2=43^{453}$.
Ответ: 908.

в) Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $9x^2-y^2=23^{501}$.
Ответ: 1004.

г) Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $9x^2-y^2=41^{417}$.
Ответ: 836.

3. а) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 1001\cos x = 1000$. Найдите максимальное значение выражения $|1001\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 44,744.

Решение.

$$a^2+1=(\sin^2 x+\cos^2 x)(a^2+1)=$$
$$=(\sin^2 x+2a\sin x\cos x+a^2\cos^2 x)+(a^2\sin^2 x-2a\sin x\cos x+\cos^2 x)=$$
$$=(\sin x+a\cos x)^2+(a\sin x-\cos x)^2.$$

Отсюда $|a\sin x-\cos x|=\sqrt{a^2-b^2+1}$.

б) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 2003\cos x = 2002$. Найдите максимальное значение $|2003\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 63,293.

в) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 3002\cos x = 3000$. Найдите максимальное значение выражения $|3002\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 109,567.

г) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 4001\cos x = 4000$. Найдите максимальное значение выражения $|4001\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 89,454.

4. а) Натуральное число N имеет 198 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $13N$ (включая единицу и само число $13N$) равно 264. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 7 787 520.

Решение. Пусть разложение числа N на простые множители имеет вид $N = 13^m \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$. Тогда количество его делителей составляет

$$(m+1)(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_n+1).$$

После домножения на 13 получаем число $13N = 13^{m+1} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, количество делителей которого равно

$$(m+2)(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_n+1).$$

Разделив одно равенство на другое, получаем $\frac{m+2}{m+1} = \frac{4}{3}$, поэтому $m = 2$. Отсюда следует, что

$$(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_n+1) = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11.$$

Так как в правой части равенства три простых множителя, количество множителей в его левой части не превосходит трёх. Несложно видеть, что минимальное значение исходного числа получается при $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. Это значение равно $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 = 7\,787\,520$.

б) Натуральное число N имеет 280 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $17N$ (включая единицу и само число $17N$) равно 350. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 127 344 960.

в) Натуральное число N имеет 468 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $27N$ (включая единицу и само число $27N$) равно 702. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 174 182 400.

г) Натуральное число N имеет 120 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $529N$ (включая единицу и само число $529N$) равно 180. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 8 760 240.

5. а) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,8, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,18.

Решение. Пусть начало координат находится в середине стороны первого квадрата, ось Ox направлена вдоль его стороны, а ось Oy проходит через его центр так, что он находится в точке с координатами $(0, 1/2)$. Пересечение двух квадратов — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Обозначим через a и b длины сторон этого прямоугольника, параллельные осям Ox и Oy соответственно. Тогда с помощью теоремы Пифагора несложно показать, что расстояние d между центрами квадратов удовлетворяет равенству

$$d^2 = (1/2 - a + 1/2)^2 + (3/2 - b - 1/2)^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2.$$

Пусть $S = ab$. Тогда $d^2 = (a+b)^2 - 2(a+b) + 2 - 2S$, откуда $2S = (a+b-1)^2 + 1 - d^2$. Минимальная площадь равна $(1 - d^2)/2$.

б) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,9, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,095.

в) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,75, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,21875.

г) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,85, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,13875.

6. а) В треугольнике ABC со стороной $BC = 3\sqrt{193}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 25,2. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 8.

Решение. Поскольку проекции отрезка BM на прямые AB и AC равны, этот отрезок образует равные углы с прямыми. Обозначим $\angle ABM = \angle AMB = \alpha$, $AB = x$. У треугольника ABM два угла равны, значит, он равнобедренный, следовательно, $AC = 2AM = 2AB = 2x$, $\angle BAM = 180^\circ - 2\alpha$.

Далее находим: $BM = 2x\cos\alpha$, проекция BM на сторону AC равна $BM\cos\alpha = 2x\cos^2\alpha$. Из условия получаем, что $2x\cos^2\alpha = 25{,}2$, поэтому $x(1+\cos 2\alpha) = \frac{126}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{126}{5x} - 1$. Кроме того, по теореме косинусов для треугольника ABC имеем равенство $BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos(180^\circ - 2\alpha)$, то есть $5x^2 + 4x^2\cos 2\alpha = 9\cdot 193$. Подставляя сюда найденное выше значение $\cos 2\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно x, имеющее единственный положительный корень $x = 15$. Тогда $\cos 2\alpha = \frac{17}{25}$, $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

Искомая биссектриса находится по формуле

$$AL = \frac{2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)}{AB+AC} = \frac{4x^2\cos(90^\circ - \alpha)}{3x} = \frac{4x}{3}\sin\alpha = 8.$$

б) В треугольнике ABC со стороной $BC = 12\sqrt{217}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 115,2. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 16.

в) В треугольнике ABC со стороной $BC = 15\sqrt{34}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 56,25. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 10.

г) В треугольнике ABC со стороной $BC = 9\sqrt{73}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 48. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 12.

7. а) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $3x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2022}-x_{2020}}{x_{2025}-x_{2021}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,7.

Решение. Заметим, что данное в условии равенство можно записать в виде $3\left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) = \left(x_{n+1} - x_n\right)$. Если обозначить $x_{n+1} - x_n = y_n$, это равенство принимает вид $3y_{n+1} = y_n$. Искомое отношение при этом равно

$$\frac{\left(x_{2022} - x_{2021}\right) + \left(x_{2021} - x_{2020}\right)}{\left(x_{2025} - x_{2024}\right) + \left(x_{2024} - x_{2023}\right) + \left(x_{2023} - x_{2022}\right) + \left(x_{2022} - x_{2021}\right)} =$$
$$= \frac{y_{2021} + y_{2020}}{y_{2024} + y_{2023} + y_{2022} + y_{2021}} = \frac{81y_{2024} + 27y_{2024}}{y_{2024} + 3y_{2024} + 9y_{2024} + 27y_{2024}} = \frac{27}{10} = 2{,}7.$$

Итак, искомое отношение определено однозначно и равно 2,7.

б) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $5x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2025}-x_{2021}}{x_{2022}-x_{2020}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,208.

в) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $7x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2022}-x_{2020}}{x_{2025}-x_{2021}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 6,86.

г) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $10x_{n+2} - 11x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2025}-x_{2021}}{x_{2022}-x_{2020}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,101.

8. а) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка увеличили на 13 гектаров, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 2 раза больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 3,5 тысячи рублей больше налога, а с большего — на 4 тысячи рублей меньше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 52.

Решение. Пусть x, xq, xq^2 (га) — площади участков (без ограничения общности $q>1$). После увеличения площадей участков, их площади равны соответственно

$$x+13, \quad xq+13, \quad xq^2+13. \tag{2}$$

По условию $xq^2+13=2(x+13)$, поэтому $x=\frac{13}{q^2-2}$. Подставляя это значение x в (2), получаем что новые площади участков равны

$$\frac{13(q-1)(q+1)}{q^2-2}, \quad \frac{13(q-1)(q+2)}{q^2-2}, \quad \frac{13(q-1)(2q+2)}{q^2-2}. \tag{3}$$

Первоначально налог распределялся в отношении $1:q:q^2$, а после увеличения площадей участков — в отношении $(q+1):(q+2):(2q+2)$. Отсюда получаем уравнения

$$\frac{S(q+1)}{4q+5}-\frac{S}{1+q+q^2}=\frac{7}{2}, \quad \frac{S(2q+2)}{4q+5}-\frac{Sq^2}{1+q+q^2}=-4.$$

Делим первое уравнение на второе (в результате чего получаем уравнение с одной переменной q), и после преобразований получаем уравнение $2q^3-3q^2-4q+6$, откуда $(2q-3)\left(q^2-2\right)=0$. Так как второй множитель не может обращаться в ноль, $q=\frac{3}{2}$ и $x=\frac{13}{q^2-2}=52$.

б) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка уменьшили на 5 гектаров, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 10 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 67,5 тысяч рублей меньше налога, а с большего — на 90 тысяч рублей больше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 12.

в) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка увеличили на 4 гектара, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 5 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 5 тысяч рублей больше налога, а с большего — на 7 тысяч рублей меньше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 4.

г) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка уменьшили на 1 гектар, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 5 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 21 тысячу рублей меньше налога, а с большего — на

27 тысяч рублей больше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.
Ответ: 25.

9. а) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади $\frac{1625}{4}$, $\frac{1885}{4}$, 585, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 360. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 3 780.

Решение. Известно, что в пирамиде, боковые грани которой образуют равные двугранные углы с основанием, вершина проецируется в центр вписанной окружности основания, а высоты боковых граней, проведённых из вершины пирамиды, равны. Обозначим через h длины этих высот, а через H — высоту пирамиды, проведённую из вершины к основанию. Обозначим также через α величину двугранного угла, под которым боковые грани наклонены к основанию пирамиды. Если S_0 — площадь основания, а S_1, S_2 и S_3 — площади боковых граней, то из формулы площади ортогональной проекции получаем

$$(S_1 + S_2 + S_3)\cos\alpha = S_0.$$

Объём пирамиды V будем вычислять по формуле

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_0 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot S_0 \cdot h \sin\alpha.$$

Остаётся вычислить высоту боковой грани h, проведённую к ребру основания пирамиды. Заметим, что стороны основания пирамиды равны $\frac{2S_1}{h}$, $\frac{2S_2}{h}$ и $\frac{2S_3}{h}$. Если $\overline{S} = S_1 + S_2 + S_3$, то из формулы Герона следует, что

$$S_0^2 = \frac{1}{h^4} \cdot \overline{S} \cdot (\overline{S} - 2S_1) \cdot (\overline{S} - 2S_2) \cdot (\overline{S} - 2S_3).$$

Итак, получаем окончательно, что

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_0 \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt[4]{\frac{\overline{S} \cdot (\overline{S} - 2S_1) \cdot (\overline{S} - 2S_2) \cdot (\overline{S} - 2S_3)}{S_0^2}}.$$

б) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 286, $\frac{507}{2}$, $\frac{221}{2}$, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 330. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 1 232.

в) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 130, 125, 85, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 204. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 544.

г) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 175, $\frac{500}{3}$, $\frac{325}{3}$, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 126. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 672.

10. а) В некоторые из 40 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 39.

Решение. Занумеруем конверты числами от 1 до 40. Покажем, что за 39 операций можно найти конверт с открыткой. Зададим вопросы про пары конвертов $(1,2)$, $(1,3)$, $\ldots$, $(1,40)$. Если все ответы «да», то в первом конверте лежит открытка (иначе есть еще хотя бы один пустой конверт, и один из ответов был бы «нет»). Если есть ответ «нет», то первый конверт пустой, и открытки будут лежать в тех конвертах, про которые ответили «да».

Покажем, что меньшего количества операций может не хватить. Предположим, что существует стратегия, позволяющая гарантированно найти конверт с открыткой за меньшее число операций. Будем всегда отвечать «да». Тогда максимум после 38 операций можно будет указать на конверт с открыткой (будем считать, что это конверт 1). Но тогда какого-то из вопросов вида $(1, N)$ задано не будет. Положим открытки во все конверты, кроме 1 и N. Тогда все ответы будут «да», но в конверте 1 открытки не будет. Противоречие.

б) В некоторые из 50 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 49.

в) В некоторые из 60 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 59.

г) В некоторые из 70 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 69.