МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n!+(n+1)!+(n+2)!$ делится на 361?

Ответ: $n=17$.

Решение. Преобразуем выражение

$$n!+(n+1)!+(n+2)!=n!(1+n+1+(n+1)(n+2))=n!(n+2)^2.$$

Так как $361=19^2$, и 19 – простое число, то $n!(n+2)^2$ делится на 19. Если $n!$ делится на 19, то $n\geqslant 19$. Если $(n+2)^2$ делится на 19, то $n+2\geqslant 19$. Значит, $n\geqslant 17$. Осталось заметить, что при $n=17$ выражение $n!(n+2)^2$ делится на 19^2.

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 20.

Решение. Представим указанную в условии величину в следующем виде:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2-10=5n^2,$$

где $n>2$. Тогда $5n^2=N^3, N>6$. Отсюда N делится на 5, то есть $N=5k, k>1$. Значит, $n^2=5^2k^3$, то есть k^3 – квадрат натурального числа. Поэтому в разложении числа k все простые множители будут в четных степенях, то есть $k>1$ – квадрат натурального числа. Наименьшее такое $k=2^2$. Поэтому наименьшее возможное $N=5\cdot 2^2=20$. Осталось заметить, что $N=20$ подходит.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right|\geqslant\left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right|+|7-2x|.$$

Ответ: $x\in\left[3;\frac{7}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что данное в условии неравенство имеет вид $|A+B|\geqslant|A|+|B|$, где $A=\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1$, $B=7-2x$. Данное неравенство равносильно следующему: $AB\geqslant 0$. При этом $A+B\geqslant 6$, поэтому ситуация, когда хотя бы одно из выражений A,B отрицательно, невозможна. Значит, оба выражения A,B неотрицательны. То есть неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\geqslant 0;\\ 7-2x\geqslant 0.\end{cases}$$

ОДЗ исходного неравенства будет множество $x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Если $x\in(-\infty;-1]$, то второе неравенство системы выполняется автоматически. Перепишем первое неравенство системы в виде $\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 1-2x$. Так как $1-2x>0$, то неравенство можно возвести в квадрат. Получим $x^2-2x-3\geqslant 1-4x+4x^2\Leftrightarrow 3x^2-2x+4\leqslant 0$. Данное неравенство не имеет решений.

Если $x\in[3;+\infty)$, то первое неравенство системы выполняется автоматически. Из второго неравенства получаем, что $x\leqslant\frac{7}{2}$. И в этом случае получаем, что $x\in\left[3;\frac{7}{2}\right]$.

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

Ответ: $4 \cdot 43 \cdot 43 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 44 \cdot 42 + 4 \cdot 47 \cdot 41 + 45 \cdot 45 = 28553$.

Решение. Заметим, что сторона ромба может либо быть параллельна одной из осей, либо быть гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, параллельными осям.

Рассмотрим левую вершину ромба (если таких две, то рассмотрим нижнюю) $O(x, y)$. Тогда смежной вершиной может быть одна из точек $A(x+3, y-4)$, $B(x+4, y-3)$, $C(x+5, y)$, $D(x+4, y+3)$, $E(x+3, y+4)$, $F(x, y+5)$.

Тройки AOB, AOD, BOE, DOE порождают ромбы "вписанные" в квадрат 7×7. Таких квадратов в исходном поле 43×43.

Тройки AOC, COE порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 8×4. Таких прямоугольников в исходном поле 42×46.

Тройки BOF, DOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 4×8.

Тройка AOE порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 6×8. Таких прямоугольников в исходном поле 44×42.

Тройка BOD порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 8×6.

Тройки AOF, EOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 3×9. Таких прямоугольников в исходном поле 47×41.

Тройки BOC, COD порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 9×3.

Тройка COF порождает ромб "вписанный" в квадрат 5×5. Таких квадратов в исходном поле 45×45.

Таким образом, ответ:

$$4 \cdot 43 \cdot 43 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 44 \cdot 42 + 4 \cdot 47 \cdot 41 + 45 \cdot 45 = 28553.$$

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

Ответ: $(8; \pm 83)$.

Решение. Заметим, что можно искать только неотрицательные значения y, так как пары чисел $(x; y)$ и $(x; -y)$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют уравнению. Очевидно также, что $x \geqslant 0$.

Перепишем уравнение в виде:

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45).$$

Заметим, что тогда $y - 45 > 0$, а $y + 45 > 90$. При $x = 0$ решений нет, а при $x > 0$ числа $y - 45$ и $y + 45$ должны быть чётными, причём ровно одно из них кратно четырём, так как разность этих чисел делится на 2, но не делится на 4. Кроме того, ровно одно из этих чисел делится на 19. Так как $19 \cdot 2^x = 19 \cdot 2 \cdot 2^{x-1}$ и $y + 45 > 90$, то возможны два варианта:

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2, \\ y + 45 = 2^{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8;\ y = 83,$$

или

$$\begin{cases} y - 45 = 2, \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-1}. \end{cases}$$

В последнем случае решений нет.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения x^2-6x+a равно 8.

Ответ: $a=1$; $a=\dfrac{5-\sqrt{57}}{2}$.

Решение. Множество $x^2+y^2=a^2$ представляет собой точку $O(0,0)$ при $a=0$ и окружность с центром в $O(0,0)$ и радиусом $|a|$ при $a\neq 0$.

$$x^2-6x+a=(x-3)^2-9+a.$$

$(x-3)^2$ — квадрат расстояния от точки $(x;y)$ до прямой $x=3$. Наибольшее расстояние от точек окружности равно $|a|+3$.

$$(|a|+3)^2-9+a=a^2+6|a|+a=8;$$
$$a^2+6|a|+a-8=0.$$

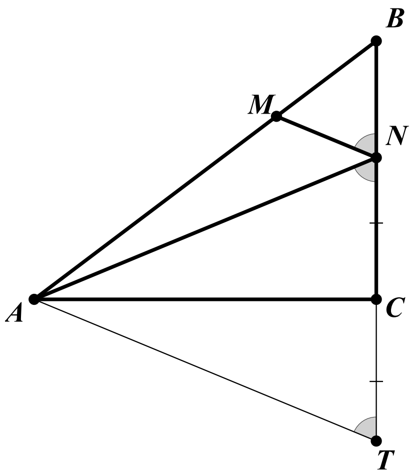
Рассмотрев два случая раскрытия модуля, получаем $a=1$ и $a=\dfrac{5-\sqrt{57}}{2}$.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

Ответ: 10°.

Решение. Отметим на продолжении отрезка BC за точку C точку T такую, что $CN=CT$. Тогда $NT=2NC$, и данное в условии равенство можно переписать так:

$$BN\cdot MA=BM\cdot NT \iff \frac{BN}{BM}=\frac{NT}{MA}.$$



Отсюда по теореме о пропорциональных отрезках следует, что $MN\parallel AT$. Значит, $\angle ATN=\angle MNB=80^\circ$, но тогда в треугольнике ANT равны углы при вершинах N и T, то есть этот треугольник равнобедренный. Его медиана AC является также высотой. Значит, $\angle ACN=90^\circ$, $\angle CAN=90^\circ-80^\circ=10^\circ$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n-1)!+n!+(n+1)!$ делится на 289?

   Ответ: $n=16$.

   Решение. Преобразуем выражение

   $$(n-1)!+n!+(n+1)!=(n-1)!(1+n+n(n+1))=(n-1)!(n+1)^2.$$

   Так как $289=17^2$, и 17 – простое число, то $(n-1)!(n+1)^2$ делится на 17. Если $(n-1)!$ делится на 17, то $n \geqslant 18$. Если $(n+1)^2$ делится на 17, то $n+1 \geqslant 17$. Значит, $n \geqslant 16$. Осталось заметить, что при $n=16$ выражение $(n-1)!(n+2)^2$ делится на 17^2.

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N, большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N.

   Ответ: 28.

   Решение. Представим указанную в условии величину в следующем виде:

   $$(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2-28=7n^2,$$

   где $n>3$. Тогда $7n^2=N^5, N>8$. Отсюда N делится на 7, то есть $N=7k, k>1$. Значит, $n^2=7^4k^5$, то есть k^5 – квадрат натурального числа. Поэтому в разложении числа k все простые множители будут в четных степенях, то есть $k>1$ – квадрат натурального числа. Наименьшее такое $k=2^2$. Поэтому наименьшее возможное $N=7\cdot 2^2=28$. Осталось заметить, что $N=28$ подходит.

3. [4 балла] Решите неравенство

   $$\left|\sqrt{x^2-x-2}+5\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-x-2}+x-1\right|+|6-x|.$$

   Ответ: $[2;6]$.

   Решение. Заметим, что данное в условии неравенство имеет вид $|A+B| \geqslant |A|+|B|$, где $A=\sqrt{x^2-x-2}+x-1$, $B=6-x$. Данное неравенство равносильно следующему: $AB \geqslant 0$. При этом $A+B \geqslant 5$, поэтому ситуация, когда хотя бы одно из выражений A, B отрицательно, невозможна. Значит, оба выражения A, B неотрицательны. То есть неравенство равносильно системе:

   $$\begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}+x-1 \geqslant 0;\\ 6-x \geqslant 0;\end{cases}$$

   ОДЗ исходного неравенства будет множество $x \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$.

   Если $x \in (-\infty;-1]$, то второе неравенство системы выполняется автоматически. Перепишем первое неравенство системы в виде $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 1-x$. Так как $1-x>0$, то неравенство можно возвести в квадрат. Получим $x^2-x-2 \geqslant 1-2x+x^2 \Leftrightarrow x-3 \geqslant 0$. Данное неравенство не имеет решений при $x \leqslant -1$.

   Если $x \in [2;+\infty)$, то первое неравенство системы выполняется автоматически. Из второго неравенства получаем, что $x \leqslant 6$. И в этом случае получаем, что $x \in [2;6]$.

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

Ответ: . $4 \cdot 38 \cdot 38 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 2 \cdot 39 \cdot 37 + 4 \cdot 42 \cdot 36 + 40 \cdot 40 = 22378$.

Решение. Заметим, что сторона ромба может либо быть параллельна одной из осей, либо быть гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, параллельными осям.

Рассмотрим левую вершину ромба (если таких две, то рассмотрим нижнюю) $O(x, y)$. Тогда смежной вершиной может быть одна из точек $A(x+3, y-4)$, $B(x+4, y-3)$, $C(x+5, y)$, $D(x+4, y+3)$, $E(x+3, y+4)$, $F(x, y+5)$.

Тройки AOB, AOD, BOE, DOE порождают ромбы "вписанные" в квадрат 7×7. Таких квадратов в исходном поле 38×38.

Тройки AOC, COE порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 8×4. Таких прямоугольников в исходном поле 37×41.

Тройки BOF, DOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 4×8.

Тройка AOE порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 6×8. Таких прямоугольников в исходном поле 39×37.

Тройка BOD порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 8×6.

Тройки AOF, EOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 3×9. Таких прямоугольников в исходном поле 42×36.

Тройки BOC, COD порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 9×3.

Тройка COF порождает ромб "вписанный" в квадрат 5×5. Таких квадратов в исходном поле 40×40.

Таким образом, ответ:

$$4 \cdot 38 \cdot 38 + 4 \cdot 37 \cdot 41 + 2 \cdot 39 \cdot 37 + 4 \cdot 42 \cdot 36 + 40 \cdot 40 = 22378.$$

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

Ответ: $(3; \pm 47)$.

Решение. Заметим, что можно искать только неотрицательные значения y, так как пары чисел $(x; y)$ и $(x; -y)$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют уравнению. Очевидно также, что $x \geqslant 0$.

Перепишем уравнение в виде:

$$23 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45).$$

Заметим, что тогда $y - 45 > 0$, а $y + 45 > 90$. При $x = 0$ решений нет, а при $x > 0$ числа $y - 45$ и $y + 45$ должны быть чётными, причём ровно одно из них кратно четырём, так как разность этих чисел делится на 2, но не делится на 4. Кроме того, ровно одно из этих чисел делится на 23. Так как $23 \cdot 2^x = 23 \cdot 2 \cdot 2^{x-1}$ и $y + 45 > 90$, то возможны два варианта:

$$\begin{cases} y - 45 = 2, \\ y + 45 = 23 \cdot 2^{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3;\ y = 47,$$

или

$$\begin{cases} y - 45 = 23 \cdot 2, \\ y + 45 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

В последнем случае решений нет.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения y^2-4y-a равно 6.

Ответ: $a=-1$; $a=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Решение. Множество $x^2+y^2=a^2$ представляет собой точку $O(0{,}0)$ при $a=0$ и окружность с центром в $O(0{,}0)$ и радиусом $|a|$ при $a\neq 0$.

$$y^2-4y-a=(y-2)^2-4-a.$$

$(y-2)^2$ — квадрат расстояния от точки $(x;y)$ до прямой $y=2$. Наибольшее расстояние от точек окружности равно $|a|+2$.

$$(|a|+2)^2-4-a=a^2+4|a|-a=6;$$
$$a^2+4|a|-a-6=0.$$

Рассмотрев два случая раскрытия модуля, получаем $a=-1$ и $a=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

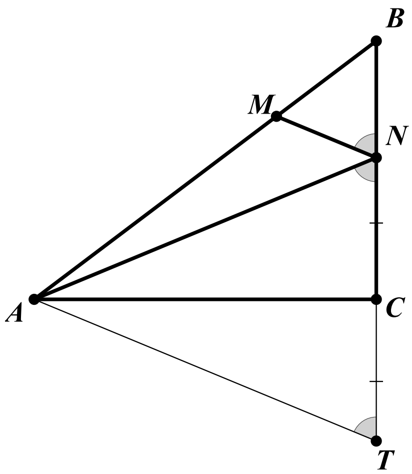
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

Ответ: 20°.

Решение. Отметим на продолжении отрезка BC за точку C точку T такую, что $CN=CT$. Тогда $NT=2NC$, и данное в условии равенство можно переписать так:

$$BN\cdot MA=BM\cdot NT \iff \frac{BN}{BM}=\frac{NT}{MA}.$$

Отсюда по теореме о пропорциональных отрезках следует, что $MN\parallel AT$. Значит, $\angle ATN=\angle MNB=80^\circ$, но тогда в треугольнике ANT равны углы при вершинах N и T, то есть этот треугольник равнобедренный. Его медиана AC является также высотой. Значит, $\angle ACN=90^\circ$, $\angle CAN=90^\circ-70^\circ=20^\circ$.



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 3, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 2. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число d, и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 4. Найдите d.

   Ответ: $d = 6$.

   Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Квадрат разности его корней можно найти непосредственно или с помощью теоремы Виета:

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{a}\right)^2 = \frac{D}{a^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}.$$

   Пусть первоначально был дан квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда сначала его изменили на $ax^2 + bx + (c+3)$, а затем — на $ax^2 + bx + (c+d+3)$. Квадрат разности его корней менялся следующим образом:

$$\frac{b^2-4ac}{a^2} \longrightarrow \frac{b^2-4a(c+3)}{a^2} \longrightarrow \frac{b^2-4a(c+d+3)}{a^2}.$$

   Значит, в первый раз квадрат разности изменился на

$$\frac{b^2-4a(c+3)}{a^2} - \frac{b^2-4ac}{a^2} = -\frac{12}{a},$$

   а во второй раз — на

$$\frac{b^2-4a(c+d+3)}{a^2} - \frac{b^2-4a(c+3)}{a^2} = -\frac{4d}{a}.$$

   По условию $\frac{12}{a} = 2$, $\frac{4d}{a} = 4$, откуда получаем, что $a = 6$, $d = 6$.

2. [4 балла] Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{3x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}}\ ?$$

   Ответ: 1013.

   Решение. Перенесём $\sqrt{3x}$ вправо, а затем возведём обе части в квадрат:

$$\sqrt{2y} = 2024 \cdot \sqrt{45} - \sqrt{3x} \iff \begin{cases} 2y = 2024^2 \cdot 45 + 3x - 4048 \cdot 3 \cdot \sqrt{15x}, & (I) \\ 2024 \cdot \sqrt{45} - \sqrt{3x} \geqslant 0. & (II) \end{cases}$$

   Заметим сначала, что подкоренное выражение в равенстве (I) должно быть квадратом целого числа, в противном случае разность целых чисел окажется равна иррациональному числу. Тогда $3x$ должно быть чётным числом, так как все остальные числа в равенстве (I) чётные. Поэтому $x = 15n^2$, где n — чётное (т.е. $x = 60k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$).

   При этом из (II) получаем $2024 \cdot \sqrt{45} - \sqrt{180k^2} \geqslant 0$. Значит, $6072\sqrt{5} \geqslant 6k\sqrt{5}$, откуда $k \leqslant 1\,012$. Таким образом, возможны $1\,013$ целых значений k, которым соответствует $1\,013$ целых x.

   Остаётся заметить, что для каждого найденного x однозначно находится подходящий y (и правда, правая часть (I) при найденных x является чётным числом, поэтому y также оказывается целым).

3. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 10\cdot\min(a;b)+\max(a;b)=2a+3b,\\ \big(\min(a;b)\big)^2+\text{НОД}(a;b)=6. \end{cases}$$

Ответ: $(2;8)$, $(14;2)$.

Решение. Рассмотрим два случая.

- Пусть $a\geqslant b$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 10b+a=2a+3b,\\ b^2+\text{НОД}(a;b)=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=7b,\\ b^2+\text{НОД}(7b;b)=6. \end{cases}$$

  Так как $\text{НОД}(7b;b)=b$, второе уравнение системы принимает вид $b^2+b=6$, откуда $b=-3$ или $b=2$. По условию $b\in\mathbb{N}$, поэтому $b=2$, $a=7b=14$.

- Пусть теперь $a<b$. Тогда

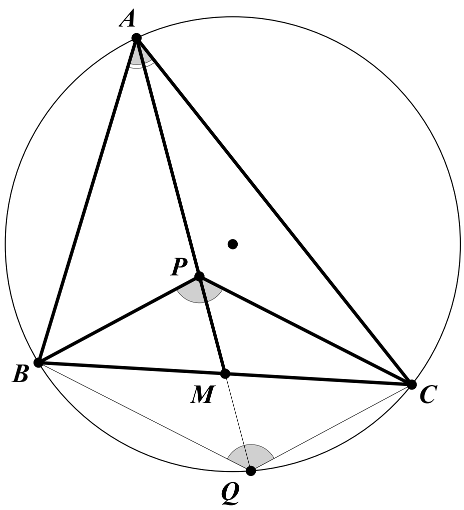
$$\begin{cases} 10a+b=2a+3b,\\ a^2+\text{НОД}(a;b)=6 \end{cases} \iff \begin{cases} b=4a,\\ a^2+\text{НОД}(a;4a)=6 \end{cases} \iff \begin{cases} b=4a,\\ a^2+a=6. \end{cases}$$

  Из второго уравнения получаем, что $a=2$ (так как $a\in\mathbb{N}$); соответствующее значение b равно 8.

4. [5 баллов] На медиане AM треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle BAC+\angle BPC= 180^\circ$. Найдите AC, если известно, что $AB=5$, $BP=3$, $CP=4$.

Ответ: $\dfrac{20}{3}$.

Решение. Пусть $AB=x$, $BP=y$, $CP=z$. Отложим на продолжении медианы AM за точку M точку Q такую, что $PM=MQ$. Тогда $BPCQ$ — параллелограмм и $\angle BQC=\angle BPC$. Кроме того, $CQ=BP=y$, $BQ=CP=z$. Заметим, что $\angle BAC+\angle BQC=180^\circ$, поэтому около четырёхугольника $ABQC$ можно описать окружность.



Обозначим $AM=a$, $MQ=b$. По теореме о пересекающихся хордах получаем, что $BM\cdot CM=ab$, $BM=CM=\sqrt{ab}$. Из подобия треугольников ABM и CQM следует, что

$$\frac{AB}{CQ}=\frac{BM}{MQ} \iff \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{ab}}{b},$$

а из подобия треугольников BQM и ACM — что

$$\frac{BQ}{AC}=\frac{BM}{AM} \iff \frac{z}{AC}=\frac{\sqrt{ab}}{a}.$$

Перемножая эти два равенства, получаем, что $\frac{xz}{y\cdot AC}=1$, откуда $AC=\frac{xz}{y}=\frac{5\cdot 4}{3}$.

5. [5 баллов] 5 сундуков закрыты на 3 замка каждый, все ключи ко всем замкам различны. Найдите количество способов выбрать из всех 15 ключей 6 так, чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы один сундук.

Ответ: $C_5^2+C_5^1\left(C_4^3\cdot 3^3+C_4^1\cdot C_3^2\cdot C_3^1\cdot 3\right)=C_5^2+C_5^1\cdot 3^3\cdot\left(C_4^3+C_4^1\right)=1090$.

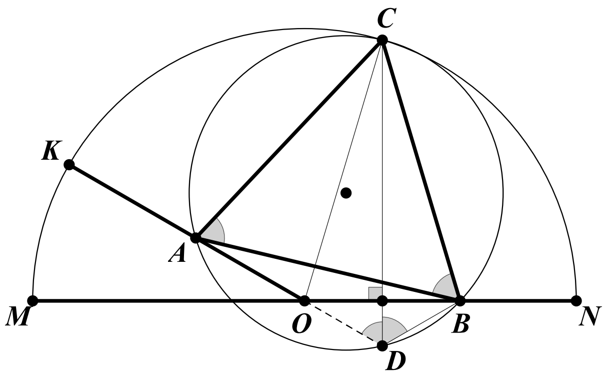
Решение. Хотя бы один замок открыть можно в двух случаях: среди 6 ключей есть две тройки «подходящих» ключей к двум разным сундукам (их можно выбрать C_5^2 способами) или есть только одна «подходящая тройка» (её можно выбрать C_5^1 способами) и ещё три ключа, с помощью которых нельзя открыть ни один сундук. Эти три ключа могут быть все от разных сундуков ($C_4^3 \cdot 3^3$ способов), либо два подходят к одному сундуку ($C_4^1 \cdot C_3^2$), а один — к другому ($C_3^1 \cdot 3$ способов). Получаем итоговый ответ:

$$C_5^2 + C_5^1 \left(C_4^3 \cdot 3^3 + C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot 3\right) = C_5^2 + C_5^1 \cdot 3^3 \cdot \left(C_4^3 + C_4^1\right) = 1090.$$

6. [5 баллов] На дуге полукруга с центром O и диаметром MN взята точка K. Построен равносторонний треугольник ABC с длиной стороны, равной радиусу полукруга, так, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите $\angle MOK$.

Ответ: $30°$.

Решение. Опишем окружность ω около ΔABC и проведём OC. Из условия $AC = BC = OC$. Построим серединный перпендикуляр ℓ к отрезку OB. Пусть он пересекает ω в точке D. Соединим точку D с точками O и B. Так как ΔOCB — равнобедренный, $C \in \ell$. Кроме того, $OD = BD$. По теореме о вписанном угле $\angle CDB = \angle CAB = 60°$. Заметим, что CD — прямая, содержащая высоту равнобедренного ΔODB, поэтому она содержит биссектрису, а значит, $\angle ODC = 60° = \angle ABC$. Поэтому точки A, O, D лежат на одной прямой, откуда $\angle MOK = \angle BOD = 90° - 60° = 30°$.



Замечание. Равенство $\angle MOK = \dfrac{1}{2}\angle ACB$ можно доказать следующим образом. Построим вспомогательную окружность с центром в точке C и радиусом AC. Тогда по теореме о вписанном и центральном угле $2\angle BAO = \angle BCO$ и $2\angle ABO = \angle BCO$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle MOK = \angle OAB + \angle OBA = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

7. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $M = |b| + |5a - b| + |2a + b - 3|$, где a и b — действительные числа. При каких a и b оно достигается?

Ответ: $M_{\min} = \frac{15}{7}$; достигается при $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{15}{7}$.

Решение. Фиксируем некоторое значение b и рассмотрим $f(a) = |b| + |5a - b| + |2a + b - 3|$. Выражения под модулями обращаются в ноль в точках $a = \frac{b}{5}$ и $a = \frac{3-b}{2}$. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка (на два, если они совпадают). Так как на каждом из них функция линейная, график состоит из двух лучей и отрезка. При раскрытии модуля на крайнем правом промежутке коэффициент при a положителен, а на крайнем левом — отрицателен, следовательно, минимум достигается в одной из двух точек $a = \frac{b}{5}$ и $\frac{3-b}{2}$.

- Если $a = \frac{b}{5}$, то $M = |b| + \left|\frac{7b}{5} - 3\right|$. Рассуждая аналогично, получаем, что его минимум достигается при $b = 0$ или при $b = \frac{15}{7}$. Если $b = 0$, то $M = 3$, а если $b = \frac{15}{7}$, то $M = \frac{15}{7}$.
- Если $a = \frac{3-b}{2}$, то $M = |b| + \left|\frac{15-7b}{2}\right|$. Минимальное значение может достигаться в одной из точек $b = 0$ или $b = \frac{15}{7}$. Подставляя, получаем, что $M = \frac{15}{2}$ при $b = 0$, и $M = \frac{15}{7}$ при $b = \frac{15}{7}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 4, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 8. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число d, и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 2. Найдите d.

   Ответ: $d = 1$.

   Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, $a \neq 0$. Квадрат разности его корней можно найти непосредственно или с помощью теоремы Виета:

$$(x_1-x_2)^2 = \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{a}\right)^2 = \frac{D}{a^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2};$$

$$(x_1-x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}.$$

   Пусть первоначально был дан квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2+bx+c$. Тогда сначала его изменили на $ax^2+bx+(c+4)$, а затем — на $ax^2+bx+(c+d+4)$. Квадрат разности его корней менялся следующим образом:

$$\frac{b^2-4ac}{a^2} \longrightarrow \frac{b^2-4a(c+4)}{a^2} \longrightarrow \frac{b^2-4a(c+d+4)}{a^2}.$$

   Значит, в первый раз квадрат разности изменился на

$$\frac{b^2-4a(c+4)}{a^2} - \frac{b^2-4ac}{a^2} = -\frac{16}{a},$$

   а во второй раз — на

$$\frac{b^2-4a(c+d+4)}{a^2} - \frac{b^2-4a(c+4)}{a^2} = -\frac{4d}{a}.$$

   По условию $\frac{16}{a} = 8$, $\frac{4d}{a} = 2$, откуда получаем, что $a = 2$, $d = 1$.

2. [4 балла] Сколько пар целых чисел $(x;y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}}\ ?$$

   Ответ: 434.

   Решение. Перенесём $\sqrt{7x}$ вправо, а затем возведём обе части в квадрат:

$$\sqrt{2y} = 2024\cdot\sqrt{45} - \sqrt{7x} \iff \begin{cases} 2y = 2024^2\cdot 45 + 7x - 4048\cdot 3\cdot\sqrt{35x}, & (I)\\ 2024\cdot\sqrt{45} - \sqrt{7x} \geqslant 0. & (II)\end{cases}$$

   Заметим сначала, что подкоренное выражение в равенстве (I) должно быть квадратом целого числа, в противном случае разность целых чисел окажется равна иррациональному числу. Тогда $7x$ должно быть чётным числом, так как все остальные числа в равенстве (I) чётные. Поэтому $x = 35n^2$, где n – чётное (т.е. $x = 140k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$).

   При этом из (II) получаем $2024\cdot\sqrt{45} - \sqrt{5\cdot(14k)^2} \geqslant 0$. Значит, $6072\sqrt{5} \geqslant 14k\sqrt{5}$, откуда $k \leqslant \frac{3\,036}{7} = 433\frac{5}{7}$. Таким образом, возможны 434 целых значения k, которым соответствует 434 целых x.

   Остаётся заметить, что для каждого найденного x однозначно находится подходящий y (и правда, правая часть (I) при найденных x является чётным числом, поэтому y также оказывается целым).

3. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 12 \cdot \min(a;b) + \max(a;b) = 2a + 6b, \\ 2\big(\min(a;b)\big)^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a;b). \end{cases}$$

Ответ: $(3;6)$, $(18;3)$.

Решение. Рассмотрим два случая.

- Пусть $a \geqslant b$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 12b + a = 2a + 6b, \\ 2b^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a;b) \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6b, \\ 2b^2 - 7 \cdot \text{НОД}(6b;b) + 3 = 0. \end{cases}$$

Так как $\text{НОД}(6b;b) = b$, второе уравнение системы принимает вид $2b^2 - 7b + 3 = 0$, откуда $b = 3$ или $b = \frac{1}{2}$. По условию $b \in \mathbb{N}$, поэтому $b = 3$, $a = 6b = 18$.

- Пусть теперь $a < b$. Тогда

$$\begin{cases} 12a + b = 2a + 6b, \\ 2a^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a;b) \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a, \\ 2a^2 - 7 \cdot \text{НОД}(a;2a) + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2a, \\ 2a^2 - 7a + 3 = 0. \end{cases}$$

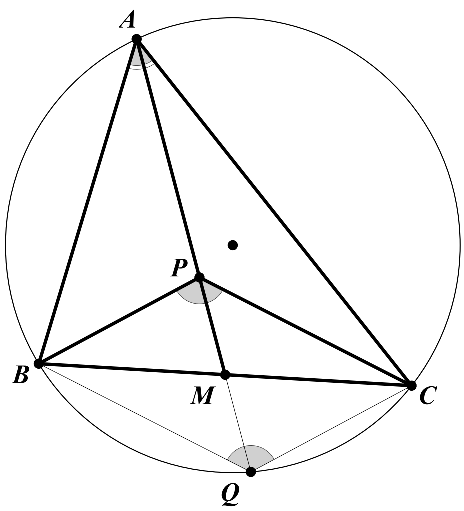
Из второго уравнения получаем, что $a = 3$ (так как $a \in \mathbb{N}$); соответствующее значение b равно 6.

4. [5 баллов] На медиане AM треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$. Найдите AC, если известно, что $AB = 15$, $BP = 9$, $CP = 6$.

Ответ: 10.

Решение. Пусть $AB = x$, $BP = y$, $CP = z$. Отложим на продолжении медианы AM за точку M точку Q такую, что $PM = MQ$. Тогда $BPCQ$ — параллелограмм и $\angle BQC = \angle BPC$. Кроме того, $CQ = BP = y$, $BQ = CP = z$. Заметим, что $\angle BAC + \angle BQC = 180^\circ$, поэтому около четырёхугольника $ABQC$ можно описать окружность.

Обозначим $AM = a$, $MQ = b$. По теореме о пересекающихся хордах получаем, что $BM \cdot CM = ab$, $BM = CM = \sqrt{ab}$. Из подобия треугольников ABM и CQM следует, что



$$\frac{AB}{CQ} = \frac{BM}{MQ} \iff \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{ab}}{b},$$

а из подобия треугольников BQM и ACM — что

$$\frac{BQ}{AC} = \frac{BM}{AM} \iff \frac{z}{AC} = \frac{\sqrt{ab}}{a}.$$

Перемножая эти два равенства, получаем, что $\frac{xz}{y \cdot AC} = 1$, откуда $AC = \frac{xz}{y} = \frac{15 \cdot 6}{9} = 10$.

Замечание. Равенство $\angle MOK = \dfrac{1}{2}\angle ACB$ можно доказать следующим образом. Построим вспомогательную окружность с центром в точке C и радиусом AC. Тогда по теореме о вписанном и центральном угле $2\angle BAO = \angle BCO$ и $2\angle ABO = \angle BCO$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle MOK = \angle OAB + \angle OBA = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

5. [5 баллов] 6 сундуков закрыты на 3 замка каждый, все ключи ко всем замкам различны. Найдите количество способов выбрать из всех 18 ключей 6 так, чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы один сундук.

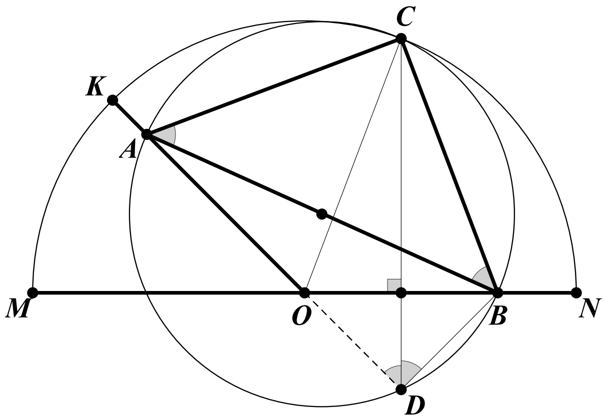
Ответ: $C_6^2 + C_6^1\left(C_5^3\cdot 3^3 + C_5^1\cdot C_3^2\cdot C_4^1\cdot 3\right) = C_6^2 + C_6^1\cdot 3^2\left(3C_5^3 + 4C_5^1\right) = 2715.$

Решение. Хотя бы один замок открыть можно в двух случаях: среди 6 ключей есть две тройки «подходящих» ключей к двум разным сундукам (их можно выбрать C_6^2 способами) или есть только одна «подходящая тройка» (её можно выбрать C_6^1 способами) и ещё три ключа, с помощью которых нельзя открыть ни один сундук. Эти три ключа могут быть все от разных сундуков ($C_5^3\cdot 3^3$ способов), либо два подходят к одному сундуку ($C_5^1\cdot C_3^2$), а один — к другому ($C_4^1\cdot 3$ способов). Получаем итоговый ответ:

$$C_6^2 + C_6^1\left(C_5^3\cdot 3^3 + C_5^1\cdot C_3^2\cdot C_4^1\cdot 3\right) = C_6^2 + C_6^1\cdot 3^2\cdot\left(3C_5^3 + 4C_5^1\right) = 2715.$$

6. [5 баллов] На дуге полукруга с центром O и диаметром MN взята точка K. Построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и BC, равными по длине радиусу полукруга, так, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите $\angle MOK$.

Ответ: 45°.



Решение. Опишем окружность ω около ΔABC и проведём OC. Из условия $AC = BC = OC$. Построим серединный перпендикуляр ℓ к отрезку OB. Пусть он пересекает ω в точке D. Соединим точку D с точками O и B. Так как ΔOCB — равнобедренный, $C \in \ell$. Кроме того, $OD = BD$. По теореме о вписанном угле $\angle CDB = \angle CAB = 45^\circ$. Заметим, что CD — прямая, содержащая высоту равнобедренного ΔODB, поэтому она содержит биссектрису, а значит, $\angle ODC = 45^\circ = \angle ABC$. Поэтому точки A, O, D лежат на одной прямой, откуда $\angle MOK = \angle BOD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

7. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1|$, где a и b — действительные числа. При каких a и b оно достигается?

Ответ: $M_{\min} = \frac{3}{4}$; достигается при $a = 0$, $b = -\frac{1}{4}$.

Решение. Фиксируем некоторое значение a и рассмотрим $f(b) = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1|$. Выражения под модулями обращаются в ноль в точках $b = \frac{a}{3}$ и $b = \frac{a-1}{4}$. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка (на два, если они совпадают). Так как на каждом из них функция линейная, её график состоит из двух лучей и отрезка. При раскрытии модуля на крайнем правом промежутке коэффициент при b положителен, а на крайнем левом — отрицателен, следовательно, минимум достигается в одной из двух точек $b = \frac{a}{3}$ и $b = \frac{a-1}{4}$.

- Если $b = \frac{a}{3}$, то $M = |a| + \left|\frac{a}{3} + 1\right|$. Рассуждая аналогично, получаем, что его минимум достигается при $a = 0$ или при $a = -3$. Если $a = 0$, то $M = 1$, а если $a = -3$, то $M = 3$.
- Если $b = \frac{a-1}{4}$, то $M = |a| + \left|\frac{a+3}{4}\right|$. Минимальное значение может достигаться в одной из точек $a = 0$ или $a = -3$. Подставляя, получаем, что $M = \frac{3}{4}$ при $a = 0$, и $M = 3$ при $a = -3$.