

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Даны квадратный трёхчлен $f(x)$ и линейная функция $l(x)$ такая, что $l(1) = 2$. Известно, что функция $g(x) = f(l(x)) - l(f(x))$ принимает все действительные значения и $g(0) = 5$. Найдите $f(1)$, если $f(0) = 7$.
2. [4 балла] Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а остальные цифры — не более одного раза?
3. [5 баллов] В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть точка I — центр этой окружности. Прямые ac и ad , проведенные соответственно через точку C параллельно BI и через точку D параллельно AI , пересекаются в точке P . Найдите $\angle DPI$, если $\angle BCD = 100^\circ$.
4. [5 баллов] Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (a, b) таких, что

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = 30, \\ \text{НОК}(a, b) = 16! \end{cases}$$

5. [5 баллов] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE , которые пересекаются в точке H . Вокруг треугольника DHE описана окружность ω . Касательные к ω в точках D и E пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK , если радиус ω равен 10 и $\angle ABC = 60^\circ$.
6. [6 баллов] При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |x| - |x - y| = 2x - y, \\ x^2 + y^2 + 8y = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x^7 + y^7}{z^3} + \frac{y^7 + z^7}{x^3} + \frac{z^7 + x^7}{y^3} = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2, \\ (\sqrt{yz} - 2)(\sqrt{zx} - 4) \leq 0. \end{cases}$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Даны квадратный трёхчлен $f(x)$ и линейная функция $l(x)$ такая, что $l(1) = 2$. Известно, что функция $g(x) = f(l(x)) - l(f(x))$ принимает все действительные значения и $g(0) = 3$. Найдите $f(1)$, если $f(0) = 5$.
2. [4 балла] Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?
3. [5 баллов] В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть точка I — центр этой окружности. Прямые ac и ad , проведенные соответственно через точку C параллельно BI и через точку D параллельно AI , пересекаются в точке P . Найдите $\angle DPI$, если $\angle BCD = 92^\circ$.
4. [5 баллов] Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (a, b) таких, что

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = 60, \\ \text{НОК}(a, b) = 22! \end{cases}$$

5. [5 баллов] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE , которые пересекаются в точке H . Вокруг треугольника DHE описана окружность ω . Касательные к ω в точках D и E пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK , если радиус ω равен 20 и $\angle ABC = 30^\circ$.
6. [6 баллов] При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |x| - |x + y| = 2x + y, \\ x^2 + y^2 - 4y = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x^9 + y^9}{z} + \frac{y^9 + z^9}{x} + \frac{z^9 + x^9}{y} = 2x^4y^4 + 2y^4z^4 + 2z^4x^4, \\ (\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{yz} - 3) \leq 0. \end{cases}$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 3, то полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму всех четырёх корней этих уравнений.
2. [5 баллов] Спортсмен планирует свой режим тренировок на два месяца. В течение 60 дней ему необходимо провести 9 тренировок, причём после каждой тренировки, кроме последней, должны обязательно идти три дня перерыва, не включающие день тренировки. Сколькими способами он может составить себе расписание? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
3. [4 балла] Медиана AM треугольника ABC равна 2. На его стороне AC выбрана такая точка D , что $BD = 4$, а $\angle ADB = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки M до прямой AC .
4. [5 баллов] Сумма пяти подряд идущих двузначных чисел имеет ровно 6 делителей. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.
5. [5 баллов] CH — высота остроугольного треугольника ABC , вписанного в окружность с центром O , а $AC > BC$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника AOC равна 10, а площадь треугольника AOH равна 12.
6. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a + \frac{x^2}{a} = \max \left(2 + \frac{x}{a}; 1 - \frac{2x}{a} \right)$$

имеет нечётное количество решений.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{100}x_1, \\ |x_1 - 1| + |x_2 - 2| + \dots + |x_{100} - 100| \leq 2500. \end{cases}$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 2, то полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму всех четырёх корней этих уравнений.
2. [5 баллов] Спортсмен планирует свой режим тренировок на три месяца. В течение 90 дней ему необходимо провести 20 тренировок, причём после каждой тренировки, кроме последней, должны обязательно идти два дня перерыва, не включающие день тренировки. Сколькими способами он может составить себе расписание? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
3. [4 балла] Медиана AM треугольника ABC равна 6. На его стороне AC выбрана такая точка D , что $BD = 12$, а $\angle ADB = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки M до прямой AC .
4. [5 баллов] Сумма семи подряд идущих двузначных чисел имеет ровно 6 делителей. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.
5. [5 баллов] CH — высота остроугольного треугольника ABC , вписанного в окружность с центром O , а $AC > BC$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника AOC равна 20, а площадь треугольника AOH равна 28.
6. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a + \frac{x^2}{a} = \max \left(3 + \frac{2x}{a}; 2 - \frac{3x}{a} \right)$$

имеет нечётное количество решений.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{50}^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{50}x_1, \\ |x_1 + 1| + |x_2 + 2| + \dots + |x_{50} + 50| \leq 625. \end{cases}$$