МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Пусть $a$, $b$, $c$ — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, $a$, $b$ и $c$ выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1$, $f_2$, $\ldots$, $f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = 11$, а $f(1) = -1$. (Сами числа $a$, $b$ и $c$ не даны.)

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $b + ac$, $b^2 - a^2 + 21c^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 56 одинаковых шаров по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

4. [5 баллов] Окружность $\omega$, построенная на высоте $AH$ треугольника $ABC$ как на диаметре, пересекает сторону $AB$ этого треугольника в её середине $M$. Высота $AH$ лежит внутри треугольника. На стороне $AC$ отмечена точка $X$ такая, что $CM$ делит отрезок $HX$ пополам. Найдите отношение $AX : XC$, если $BC : AB = 2\sqrt{2}$.

5. [5 баллов] Цветочный луг, гречишное поле и липовая роща расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между лугом и полем так, чтобы сумма расстояний от улья до луга, поля и рощи была наименьшей. На каком расстоянии от луга установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1000 м, расстояния от улья до луга, рощи и поля (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от рощи до луга и расстояние от рощи до поля — соответственно вторым, четвертым и шестым членами некоторой арифметической прогрессии?

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $CQ$. Пусть $M$ и $T$ — соответственно середины сторон $AC$ и $AB$. Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите $QT$, если $AB = 3$, $BC = 5$.

7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра $a$, для каждого из которых найдется такое значение $b$, что система

$$\begin{cases} y = x + b, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(x - a) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Пусть $a$, $b$, $c$ — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, $a$, $b$ и $c$ выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1$, $f_2$, $\ldots$, $f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = -4$, а $f(1) = -7$. (Сами числа $a$, $b$ и $c$ не даны.)

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $c + ab$, $c^2 - a^2 + 26b^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 68 одинаковых шаров по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

4. [5 баллов] Окружность $\omega$, построенная на высоте $AH$ треугольника $ABC$ как на диаметре, пересекает сторону $AB$ этого треугольника в её середине $M$. Высота $AH$ лежит внутри треугольника. На стороне $AC$ отмечена точка $X$ такая, что $CM$ делит отрезок $HX$ пополам. Найдите отношение $AX : XC$, если $BC : AB = 5\sqrt{2}$.

5. [5 баллов] Лужайка с клевером, заросли вереска и поле подсолнечника расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между клевером и подсолнечником так, чтобы сумма расстояний от улья до клевера, вереска и подсолнечника была наименьшей. На каком расстоянии от подсолнечника установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1250 м, расстояния от улья до клевера, вереска и подсолнечника (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от вереска до клевера и расстояние от вереска до подсолнечника — соответственно вторым, пятым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $CQ$. Пусть $M$ и $T$ — соответственно середины сторон $AC$ и $AB$. Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите $QT$, если $AB = 4$, $BC = 5$.

7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра $a$, для каждого из которых найдется такое значение $b$, что система

$$\begin{cases} y = x + b, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Пусть $a$, $b$, $c$ — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, $a$, $b$ и $c$ выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1$, $f_2$, …, $f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = 5$, а $f(1) = -7$. (Сами числа $a$, $b$ и $c$ не даны.)

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $b + ac$, $b^2 - a^2 + 11c^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 92 одинаковых шара по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

4. [5 баллов] Окружность $\omega$, построенная на высоте $AH$ треугольника $ABC$ как на диаметре, пересекает сторону $AB$ этого треугольника в её середине $M$. Высота $AH$ лежит внутри треугольника. На стороне $AC$ отмечена точка $X$ такая, что $CM$ делит отрезок $HX$ пополам. Найдите отношение $AX : XC$, если $BC : AB = 4\sqrt{2}$.

5. [5 баллов] Цветочный луг, гречишное поле и липовая роща расположены в трёх различных точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между лугом и полем так, чтобы сумма расстояний от улья до луга, поля и рощи была наименьшей. На каком расстоянии от луга установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1500 м, расстояния от улья до луга, рощи и поля (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от луга до рощи и расстояние от поля до рощи — соответственно четвертым, шестым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $CQ$. Пусть $M$ и $T$ — соответственно середины сторон $AC$ и $AB$. Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите $QT$, если $AB = 6$, $BC = 9$.

7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся такое значение $b$, что система

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пусть $a$, $b$, $c$ — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, $a$, $b$ и $c$ выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1, f_2, \ldots, f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = -9$, а $f(1) = -6$. (Сами числа $a$, $b$ и $c$ не даны.)

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $c + ab$, $c^2 - a^2 + 16b^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 104 одинаковых шара по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

4. [5 баллов] Окружность $\omega$, построенная на высоте $AH$ треугольника $ABC$ как на диаметре, пересекает сторону $AB$ этого треугольника в её середине $M$. Высота $AH$ лежит внутри треугольника. На стороне $AC$ отмечена точка $X$ такая, что $CM$ делит отрезок $HX$ пополам. Найдите отношение $AX : XC$, если $BC : AB = 3\sqrt{2}$.

5. [5 баллов] Лужайка с клевером, заросли вереска и поле подсолнечника расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между клевером и подсолнечником так, чтобы сумма расстояний от улья до клевера, вереска и подсолнечника была наименьшей. На каком расстоянии от подсолнечника установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 2000 м, расстояния от улья до клевера, вереска и подсолнечника (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от вереска до клевера и расстояние от вереска до подсолнечника — соответственно первым, четвёртым и седьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AP$ и $CQ$. Пусть $M$ и $T$ — соответственно середины сторон $AC$ и $AB$. Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите $QT$, если $AB = 7$, $BC = 11$.

7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся такое значение $b$, что система

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 4(a - x) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 5, полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Какое наименьшее значение может принимать произведение всех четырёх корней этих уравнений?

2. [3 балла] Сумма пяти подряд идущих двузначных чисел является полным квадратом. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

3. [5 баллов] В научной лаборатории составляется план запуска численного решения задачи на кластере. За 100 дней требуется сделать 10 запусков, а после каждого запуска, кроме последнего, кластер загружен только данной задачей в течение 7 дней, включая день запуска. При последнем запуске требуется обработать результаты всех предыдущих запусков, на что требуется 8 дней работы кластера, включая день последнего запуска. Сколькими способами сотрудники лаборатории могут выбрать дни запусков расчётов? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

4. [5 баллов] Высоты $AA_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Луч $BH$ пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $P$. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников $AHP$ и $CHP$, если известно, что $BA_1 : BC_1 = 3 : 4$, а $AH : CH = 3 : 10$.

5. [5 баллов] От пристани $A$ к пристани $B$, расположенной от $A$ вниз по течению, одновременно отправились лодка и байдарка. Километром ниже от $A$ по течению к $B$ отправился также плот. Если сложить времена движения лодки, байдарки и плота до пристани $B$, то получится 22 часа. Найдите расстояние между пристанями, если известно, что байдарка прибыла к $B$ на 2 часа раньше лодки, скорости плота, лодки и байдарки являются тремя последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, а скорость плота, скорость в стоячей воде лодки и скорость в стоячей воде байдарки — тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

6. [5 баллов] Угол $A$ ромба $ABCD$ равен $60^\circ$. На продолжениях его сторон $AB$ и $AD$ за точки $B$ и $D$ взяты точки $Q$ и $P$ соответственно так, что прямая $PQ$ проходит через точку $C$. Найдите длину отрезка $BQ$, если $DP = 10$, а $DQ : BP = 11 : 10$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \max\left(8 + \dfrac{6y}{x}; 6 - \dfrac{8y}{x}\right), \\ y = ax - 9a + 8 \end{cases}$$

имеет нечётное количество решений.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 14

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 6, полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Какое наименьшее значение может принимать произведение всех четырёх корней этих уравнений?

2. [3 балла] Сумма семи подряд идущих двузначных чисел является полным квадратом. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

3. [5 баллов] В научной лаборатории составляется план запуска численного решения задачи на кластере. За 120 дней требуется сделать 11 запусков, а после каждого запуска, кроме последнего, кластер загружен только данной задачей в течение 6 дней, включая день запуска. При последнем запуске требуется обработать результаты всех предыдущих запусков, на что требуется 7 дней работы кластера, включая день последнего запуска. Сколькими способами сотрудники лаборатории могут выбрать дни запусков расчётов? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

4. [5 баллов] Высоты $AA_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Луч $BH$ пересекает окружность, описанную около треугольника $ABC$, в точке $P$. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников $AHP$ и $CHP$, если известно, что $BA_1 : BC_1 = 6 : 5$, а $AH : CH = 21 : 10$.

5. [5 баллов] От пристани $A$ к пристани $B$, расположенной от $A$ вниз по течению, одновременно отправились лодка и катер. Двумя километрами выше от $A$ по течению к $B$ отправился также плот. Если сложить времена движения лодки, катера и плота до пристани $B$, то получится 29 часов. Найдите расстояние между пристанями, если известно, что лодка прибыла к $B$ на 3 часа позже катера, скорости плота, лодки и катера являются соответственно первым, вторым и четвертым членами некоторой арифметической прогрессии, а скорость плота, скорость в стоячей воде лодки и скорость в стоячей воде катера — тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

6. [5 баллов] Угол $A$ ромба $ABCD$ равен $60^\circ$. На продолжениях его сторон $AB$ и $AD$ за точки $B$ и $D$ взяты точки $Q$ и $P$ соответственно так, что прямая $PQ$ проходит через точку $C$. Найдите длину отрезка $BQ$, если $DP = 20$, а $DQ : BP = 9 : 10$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \max\left(6 + \dfrac{8y}{x}; 8 - \dfrac{6y}{x}\right), \\ y = ax - 8a + 9 \end{cases}$$

имеет нечётное количество решений.