МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 11$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а каждая из остальных цифр — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(5y - x) \cdot \log_y(5x - y) = 4, \\ \log_x(5x - y) + \log_y(5y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 24$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 13.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{8} + \left(2 \sin 2x - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = 5$, $SB = 2\sqrt{5}$, $SA = SC = 3\sqrt{5}$, $SD = 2\sqrt{10}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(x - a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -7, а $f(0) = 5$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(4y - x) \cdot \log_y(4x - y) = 4, \\ \log_x(4x - y) + \log_y(4y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 30$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 17.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1 - \sin x \sin \frac{\pi}{8}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{8} - \left(2\cos 2x - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{14}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3\sqrt{2}$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 6(a - x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 26$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(7y - x) \cdot \log_y(7x - y) = 4, \\ \log_x(7x - y) + \log_y(7y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 80$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 41.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{6}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{6} + (2\cos 2x - 1)^2 \leqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{5}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 4(x - a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -4, а $f(0) = 23$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(6y-x) \cdot \log_y(6x-y) = 4, \\ \log_x(6x-y) + \log_y(6y-x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 48$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 25.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1 - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{6} - \left(2 \sin 2x - \sqrt{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{7}$, $SB = \sqrt{2}$, $SA = SC = 3$, $SD = 2$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 2(a-x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 3, полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*}+3{*}{*}{*}={*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2-x)+\log_{(x-1)^2}(x^2-x)\geqslant\dfrac{9}{4}$.

4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, угол ACD прямой. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD, AB и CD в точках E, F и C соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{3}$.

5. [5 баллов] Решите уравнение
$$\cos 4x-6\sqrt{2}\sin x-4\sin 2x+6\sqrt{2}\cos x=15.$$

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B=60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE=ED=DF=FB=10$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF=4$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x+\dfrac{y^2}{x}=\min\left(6+\dfrac{8y}{x};8-\dfrac{6y}{x}\right),\\ y=ax-7a+1\end{cases}$$
имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 4, полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*}+4{*}{*}{*}={*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+2x)+\log_{(x+2)^2}(x^2+2x)\geqslant\dfrac{9}{4}$.

4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, углы ACD и BCD прямые. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD и AB в точках E и F соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB=2\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{3}$.

5. [5 баллов] Решите уравнение

$$9-\cos 4x+3\sqrt{2}\sin x-4\sin 2x+3\sqrt{2}\cos x=0.$$

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B=60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE=ED=DF=FB=30$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF=18$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x+\dfrac{y^2}{x}=\min\left(10+\dfrac{24y}{x};24-\dfrac{10y}{x}\right),\\ y=ax-17a+7\end{cases}$$

имеет ровно два решения.