11 класс – день 3

1. а) Для каждого целого k $(-36 \leqslant k \leqslant 15)$ Петя выписал на доску трёхчлен $y = x^2 + kx + 117$. После чего Вася для каждого из этих трёхчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: 435.

Решение. Для того, чтобы у трёхчлена были действительные корни, нужно, чтобы $D = k^2 - 4 \cdot 117 \geqslant 0$. То есть $k^2 \geqslant 468$. Так как k – целое, то $|k| \geqslant 22$. Значит, нам подходят значения k от -36 до -22. Заметим, что при этих значениях k дискриминант D не обращается в ноль. Поэтому все такие трёхчлены имеют по два корня. По теореме Виета сумма корней трёхчлена $y = x^2 + kx + 117$ равна $-k$, поэтому сумма выписанных Васей чисел равна $36 + 35 + 34 + \ldots + 22 = 435$.

б) Для каждого целого k $(-11 \leqslant k \leqslant 33)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 95$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: -371.

в) Для каждого целого k $(-42 \leqslant k \leqslant 19)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 207$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: 497.

г) Для каждого целого k $(-21 \leqslant k \leqslant 39)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 151$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: -480.

2. а) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 2024^2 на 2024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Ответ: 1 519.

Решение. Поскольку разница между двумя соседними числами $\frac{k^2}{2024}$ и $\frac{(k+1)^2}{2024}$ меньше единицы при $(2k+1) < 2024$, т. е. $k \leq 1011$, среди целых частей $\frac{1^2}{2024}, \ldots, \frac{1011^2}{2024}$ присутствуют все последовательные целые числа от 0 до 505. Несложно заметить, что все оставшиеся числа имеют различные целые части — этих чисел 1 013. Итого Вася выпишет $506 + 1\,013 = 1\,519$ чисел.

б) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 3024^2 на 3024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Ответ: 2 269.

в) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 4024^2 на 4024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Ответ: 3 019.

г) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 5024^2 на 5024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Ответ: 3 769.

3. а) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 25. Какое наименьшее значение может принимать число a_{10}?

Ответ: 30.

Решение. Заметим, что сумма выписанных чисел равна 250. Пусть $a_{10} = n$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leqslant (n-9) + (n-8) + \ldots + n = 5(2n-9)$. То есть $250 \leqslant 5(2n-9)$. Откуда $n \geqslant 29{,}5$. Значит, $n \geqslant 30$. Заметим, что числа 16, 22, 23, 24, …, 30 подходят.

б) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{12}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 27. Какое наименьшее значение может принимать число a_{12}?

Ответ: 33.

в) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{14}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 29. Какое наименьшее значение может принимать число a_{14}?

Ответ: 36.

г) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{16}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 31. Какое наименьшее значение может принимать число a_{16}?

Ответ: 39.

4. а) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 3. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,2426.

Решение. Так как объёмы конусов равны, и отношение радиусов оснований равно $k = 3$, то отношение высот конусов равно $1/k^2$. Пусть O — центр основания конусов, S_1 и S_2 — их вершины (притом $OS_1 > OS_2$). Пусть S_1A_1 и S_2A_2 — образующие конусов, пересекающиеся в точке B. По теореме Менелая для треугольника OS_1A_1 и секущей S_2B

$$\frac{OS_2}{S_2S_1} \cdot \frac{S_1B}{BA_1} \cdot \frac{A_1A_2}{A_2O} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2-1} \cdot \frac{S_1B}{BA_1} \cdot \frac{k-1}{k} = 1 \Leftrightarrow \frac{S_1B}{BA_1} = k(k+1) \Rightarrow \frac{S_1B}{S_1A_1} = \frac{k^2+k}{k^2+k+1}.$$

По теореме Менелая для треугольника OA_2S_2 и секущей A_1B

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} \cdot \frac{A_2B}{BS_2} \cdot \frac{S_2S_1}{S_1O} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} \cdot \frac{A_2B}{BS_2} \cdot \frac{k^2-1}{k^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{A_2B}{BS_2} = \frac{k^2}{k+1} \Rightarrow \frac{S_2B}{S_2A_2} = \frac{k+1}{k^2+k+1}.$$

Тогда искомый объём равен

$$\left(\frac{S_2B}{S_2A_2}\right)^3 \cdot 1 + \left(1 - \left(\frac{S_1B}{S_1A_1}\right)^3\right) \cdot 1 = \frac{3k^2+4k+2}{(k^2+k+1)^2} = \frac{41}{169}.$$

б) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 2,5. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,3235.

в) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{4}{3}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,7495.

г) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{7}{4}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,5383.

(а) $\frac{41}{169}$; (б) $\frac{164}{507}$; (в) $\frac{1026}{1369}$; (г) $\frac{1552}{2883}$.

5. а) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 3a^2b^2$?

Ответ: 108.

Решение. • Если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, то значение выражения равно нулю.

• Если числа a, b разных знаков, то значение выражения отрицательно.

• Пусть числа a, b одного знака. Без ограничения общности можно считать, что они положительны. Заметим, что $a^3b - 3a^2b^2 = a^2b(a - 3b) > 0$, если $a > 3b > 0$ (по условию $a \leqslant 6$). Тогда по неравенству Коши $4(3b)(a - 3b) \leqslant \big((3b) + (a - 3b)\big)^2 = a^2$, причём неравенство обращается в равенство при $3b = a - 3b$, то есть при $a = 6b$. Значит, $a^2b(a - 3b) \leqslant \frac{a^4}{12} \leqslant \frac{6^4}{12} = 108$. Неравенство обращается в равенство при $a = 6, b = 1$.

б) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 2a^2b^2$?

Ответ: 162.

в) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 6a^2b^2$?

Ответ: 54.

г) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 5a^2b^2$?

Ответ: 64,8.

6. а) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{x+1}(3-ax)>0$ удовлетворяет неравенству $x^2+\frac{2a-5}{2a}x-\frac{5}{2a}>0$?

Ответ: $-2{,}5$.

Решение. Найдём искомое минимальное значение a в множестве отрицательных чисел, тогда

$$\log_{x+1}(3-ax)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+1>0, \\ 3-ax>0, \\ x(2-ax)>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>-1, \\ x>\frac{3}{a}, \\ x\left(x-\frac{2}{a}\right)>0. \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0, & \text{если } a\in[-2;0), \\ x\in\left(-1;\frac{2}{a}\right)\cup(0;+\infty), & \text{если } a\in[-3;-2), \\ x\in\left(\frac{3}{a};\frac{2}{a}\right)\cup(0;+\infty) & \text{если } a<-3. \end{cases} \qquad (1)$$

$$x^2+\frac{2a-5}{2a}x-\frac{5}{2a}>0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{5}{2a}\right)(x+1)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in\left(-\infty;\frac{5}{2a}\right)\cup(-1;+\infty), & \text{если } a\in\left[-\frac{5}{2};0\right), \\ x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{2a};+\infty\right), & \text{если } a\in\left[-\infty;-\frac{5}{2}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку нужно наименьшее значение параметра, сначала рассматриваем промежуток $a<-3$. Несложно видеть, что тогда не каждое решение первого неравенства является решением второго (целый промежуток решений первого $\left(\frac{3}{a};\frac{5}{2a}\right]$ не удовлетворяет второму неравенству).

Если же $-3\leqslant a\leqslant-\frac{5}{2}$, то чтобы множество решений (1) было подмножеством множества решений (2), необходимо условие $-1\geqslant\frac{5}{2a}$. Наименьшее a, удовлетворяющее этому неравенству, равно $-2{,}5$.

б) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $x^2+\left(3-2a^2\right)x-2a^2+2<0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1-ax}(x+2)<0$?

Ответ: -1.

в) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{1-x}(2+ax)>0$ удовлетворяет неравенству $x^2+\frac{3-2a}{2a}x-\frac{3}{2a}>0$?

Ответ: $-1{,}5$.

г) При каком наибольшем значении параметра a каждое решение неравенства $8x^2+\left(12-2a^2\right)x-a^2+4<0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1+ax}(2x+2)<0$?

Ответ: 2.

7. а) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 10, S_{PTR} = 11, S_{RTL} = 12$?
Ответ: 5 313.
Решение. Пусть $S_{KTQ} = x, S_{LTQ} = y$. Так как $\frac{S_{PTQ}}{S_{TLQ}} = \frac{PT}{TL} = \frac{S_{PTR}}{S_{TLR}}$, то $\frac{10+x}{y} = \frac{11}{12}$. Аналогично, из равенства $\frac{S_{KTQ}}{S_{RTQ}} = \frac{KT}{RT} = \frac{S_{KTP}}{S_{RTP}}$ получаем, что $\frac{x}{12+y} = \frac{10}{11}$. Решая систему из этих уравнений, получаем, что $x = 2\,520$, $y = 2\,760$. Значит, $S_{PQR} = 2520 + 2760 + 10 + 11 + 12 = 5313$.

б) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 11, S_{PTR} = 12, S_{RTL} = 13$?
Ответ: 6 900.

в) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 12, S_{PTR} = 13, S_{RTL} = 14$?
Ответ: 8 775.

г) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 9, S_{PTR} = 10, S_{RTL} = 11$?
Ответ: 3 990.

8. а) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 3x + 2$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-0{,}5$.

Решение. Пусть угловые коэффициенты касательных равны k и $-\frac{1}{k}$. Так как $y' = 2x + 3$, абсциссы точек касания x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $2x_1 + 3 = k$, $2x_2 + 3 = -\frac{1}{k}$, откуда $x_1 = \frac{k-3}{2}$, $x_2 = -\frac{3k+1}{2k}$. Уравнения касательных имеют вид

$$y = k\left(x - \frac{k-3}{2}\right) + \frac{k^2-1}{4} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{3k+1}{2k}\right) + \frac{1-k^2}{4k^2}.$$

Умножая второе уравнение на k^2 и складывая, получаем $\left(k^2+1\right)y = -\frac{k^2+1}{2}$, откуда следует, что $y = -\frac{1}{2}$. Таким образом, ординаты всех точек пересечения таких касательных одинаковы и равны $-\frac{1}{2}$.

б) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 4x + 3$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-1{,}25$.

в) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 2x + 1$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-0{,}25$.

г) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 5x + 4$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-2{,}5$.

Для параболы $y = x^2 + px + q$ ордината точки M постоянна и равна $q - \dfrac{p^2}{4} - \dfrac{1}{4}$.

9. а) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 5, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 1. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,125.

Решение. Пусть J — точка пересечения диагоналей, $\angle BAC = \alpha$. Так как AC диаметр, а дуги AB и BD равны, находим, что

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overset{\frown}{BC}\right) = 90^\circ - \alpha.$$

Так как треугольник ABD равнобедренный, $\angle ABD = 2\alpha$. Тогда $\angle AJB = 180^\circ - 3\alpha$, $AB = AC\cos\alpha = 10\cos\alpha$. По теореме синусов для треугольника ABJ получаем, что

$$\frac{AB}{\sin\angle AJB} = \frac{AJ}{\sin\angle ABJ} \quad \Leftrightarrow \frac{10\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha}.$$

Решая уравнение, находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, поэтому $\cos\angle ABD = \cos 2\alpha = \frac{1}{8}$.

б) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 6, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 2. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,25.

в) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,3.

г) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 7, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,375.

10. а) Каждый из 11 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N , а если взять любых 5 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 462.

Решение. По условию для любых 5 учеников найдется число, которого у них нет в тетрадях. Зафиксируем одно такое число для каждой пятёрки. Заметим, что для разных пятёрок зафиксированные числа различны, в противном случае найдется число, которого нет у некоторых 6 учеников. Поэтому N не меньше количества пятёрок, которые можно выбрать из 11 человек, то есть $C_{11}^5 = 462$. С другой стороны, если $N = 462$, а каждому из чисел соответствует своя пятёрка (числа нет ни у кого из этой пятёрки), то условие задачи выполняется.

б) Каждый из 12 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 6 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 924.

в) Каждый из 13 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 5 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 1 287.

г) Каждый из 14 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 6 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 3 003.