Отборочный этап 2024/25

Задачи олимпиады: Математика 10 класс (1 попытка)

Задача 1

Задача 1 #1 ID 3578

Среди всех решений уравнения $3\,930\,400x = y^z$, где x, y, z — натуральные числа, причём $z \geqslant 2$, найдите такое, при котором x принимает наименьшее значение. В ответе укажите соответствующее значение y.

999976293578

Задача 1 #2 ID 3588

Среди всех решений уравнения $7\,030\,400x = y^z$, где x, y, z — натуральные числа, причём $z \geqslant 2$, найдите такое, при котором x принимает наименьшее значение. В ответе укажите соответствующее значение y.

999976293588

Задача 1 #3 ID 3589

Среди всех решений уравнения $1\,293\,732x = y^z$, где x, y, z — натуральные числа, причём $z \geqslant 2$, найдите такое, при котором x принимает наименьшее значение. В ответе укажите соответствующее значение y.

999976293589

Задача 1 #4 ID 3590

Среди всех решений уравнения $1\,757\,600x = y^z$, где x, y, z — натуральные числа, причём $z \geqslant 2$, найдите такое, при котором x принимает наименьшее значение. В ответе укажите соответствующее значение y.

999976293590

Задача 2

Задача 2 #5 ID 3579

> Трапеция $ABCD$, основание AD которой вдвое больше основания BC, вписана в окружность ω. Прямая, проходящая через вершину B параллельно CD, пересекает вторично окружность ω в точке P, а сторону AD – в точке N. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если известно, что $BN = 4$, $PN = 9$.
>
> 999976293579

Задача 2 #6 ID 3591

> Трапеция $ABCD$, основание AD которой вдвое больше основания BC, вписана в окружность ω. Прямая, проходящая через вершину B параллельно CD, пересекает вторично окружность ω в точке P, а сторону AD – в точке N. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если известно, что $BN = 5$, $PN = 20$.
>
> 999976293591

Задача 2 #7 ID 3592

> Трапеция $ABCD$, основание AD которой вдвое больше основания BC, вписана в окружность ω. Прямая, проходящая через вершину B параллельно CD, пересекает вторично окружность ω в точке P, а сторону AD – в точке N. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если известно, что $BN = 3$, $PN = 27$.
>
> 999976293592

Задача 2 #8 ID 3593

> Трапеция $ABCD$, основание AD которой вдвое больше основания BC, вписана в окружность ω. Прямая, проходящая через вершину B параллельно CD, пересекает вторично окружность ω в точке P, а сторону AD – в точке N. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если известно, что $BN = 4$, $PN = 25$.
>
> 999976293593

Задача 3

Задача 3 #9 ID 3580

> В арифметической прогрессии, состоящей из 11 членов, сумма квадратов первых пяти членов на $0{,}75$ больше суммы квадратов последних пяти членов. Найдите разность между суммой квадратов первых четырёх членов и суммой квадратов последних четырёх членов этой прогрессии.
>
> 999976293580

Задача 3 #10 ID 3594

> В арифметической прогрессии, состоящей из 13 членов, сумма квадратов первых шести членов на $2{,}1$ больше суммы квадратов последних шести членов. Найдите разность между суммой квадратов первых пяти членов и суммой квадратов последних пяти членов этой прогрессии.
>
> 999976293594

Задача 3 #11 ID 3595

> В арифметической прогрессии, состоящей из 15 членов, сумма квадратов первых семи членов на $\dfrac{7}{3}$ больше суммы квадратов последних семи членов. Найдите разность между суммой квадратов первых шести членов и суммой квадратов последних шести членов этой прогрессии.
>
> 999976293595

Задача 3 #12 ID 3596

> В арифметической прогрессии, состоящей из 17 членов, сумма квадратов первых восьми членов на $\dfrac{9}{7}$ больше суммы квадратов последних восьми членов. Найдите разность между суммой квадратов первых семи членов и суммой квадратов последних семи членов этой прогрессии.
>
> 999976293596

Задача 4

Задача 4 #13 ID 3581

Даны две концентрические окружности Ω и ω с центром в точке O, причём радиус Ω больше радиуса ω. На луче с началом в точке O, пересекающем окружность Ω в точке A, отмечена точка B такая, что $OB > OA$. На окружности ω выбраны точки K и M таким образом, что прямые AM и BK касаются этой окружности. Прямая BL касается окружности Ω в точке L. Найдите наибольшую возможную длину BL, если $AM = 20$, $BK = 29$.

Задача 4 #14 ID 3597

Даны две концентрические окружности Ω и ω с центром в точке O, причём радиус Ω больше радиуса ω. На луче с началом в точке O, пересекающем окружность Ω в точке A, отмечена точка B такая, что $OB > OA$. На окружности ω выбраны точки K и M таким образом, что прямые AM и BK касаются этой окружности. Прямая BL касается окружности Ω в точке L. Найдите наибольшую возможную длину BL, если $AM = 8$, $BK = 17$.

Задача 4 #15 ID 3598

Даны две концентрические окружности Ω и ω с центром в точке O, причём радиус Ω больше радиуса ω. На луче с началом в точке O, пересекающем окружность Ω в точке A, отмечена точка B такая, что $OB > OA$. На окружности ω выбраны точки K и M таким образом, что прямые AM и BK касаются этой окружности. Прямая BL касается окружности Ω в точке L. Найдите наибольшую возможную длину BL, если $AM = 24$, $BK = 26$.

Задача 4 #16 ID 3599

Даны две концентрические окружности Ω и ω с центром в точке O, причём радиус Ω больше радиуса ω. На луче с началом в точке O, пересекающем окружность Ω в точке A, отмечена точка B такая, что $OB > OA$. На окружности ω выбраны точки K и M таким образом, что прямые AM и BK касаются этой окружности. Прямая BL касается окружности Ω в точке L. Найдите наибольшую возможную длину BL, если $AM = 9$, $BK = 41$.

Задача 5

Задача 5 #17 ID 3582

На доске написаны подряд идущие натуральные числа от 1 до 301 (каждое из них ровно один раз). Сколькими способами можно стереть три из написанных чисел так, чтобы остаток от деления суммы всех чисел на доске на 3 после этого не изменился?

999976293582

Задача 5 #18 ID 3600

На доске написаны подряд идущие натуральные числа от 1 до 271 (каждое из них ровно один раз). Сколькими способами можно стереть три из написанных чисел так, чтобы остаток от деления суммы всех чисел на доске на 3 после этого не изменился?

999976293600

Задача 5 #19 ID 3601

На доске написаны подряд идущие натуральные числа от 1 до 241 (каждое из них ровно один раз). Сколькими способами можно стереть три из написанных чисел так, чтобы остаток от деления суммы всех чисел на доске на 3 после этого не изменился?

999976293601

Задача 5 #20 ID 3602

На доске написаны подряд идущие натуральные числа от 1 до 211 (каждое из них ровно один раз). Сколькими способами можно стереть три из написанных чисел так, чтобы остаток от деления суммы всех чисел на доске на 3 после этого не изменился?

999976293602

Задача 6

Задача 6 #21 ID 3583

Из пункта A в пункт C по прямолинейной железной дороге с постоянной скоростью 60 км/ч движется поезд. В точке B, расположенной на расстоянии 2 км от железной дороги и на расстоянии 3 км от точки A, находится мотоциклист. С какой минимальной постоянной скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы догнать поезд, если известно, что угол BAC острый? Ответ дайте в км/ч.

999976293583

Задача 6 #22 ID 3603

Из пункта A в пункт C по прямолинейной железной дороге с постоянной скоростью 49 км/ч движется поезд. В точке B, расположенной на расстоянии 5 км от железной дороги и на расстоянии 7 км от точки A, находится мотоциклист. С какой минимальной постоянной скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы догнать поезд, если известно, что угол BAC острый? Ответ дайте в км/ч.

Задача 6 #23 ID 3604

Из пункта A в пункт C по прямолинейной железной дороге с постоянной скоростью 70 км/ч движется поезд. В точке B, расположенной на расстоянии 3 км от железной дороги и на расстоянии 5 км от точки A, находится мотоциклист. С какой минимальной постоянной скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы догнать поезд, если известно, что угол BAC острый? Ответ дайте в км/ч.

Задача 6 #24 ID 3605

Из пункта A в пункт C по прямолинейной железной дороге с постоянной скоростью 84 км/ч движется поезд. В точке B, расположенной на расстоянии 4 км от железной дороги и на расстоянии 6 км от точки A, находится мотоциклист. С какой минимальной постоянной скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы догнать поезд, если известно, что угол BAC острый? Ответ дайте в км/ч.

Задача 7

Задача 7 #25 ID 3584

Найдите количество всех пар натуральных чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $x^2 + x + 5y = 1\,000\,002$.

Задача 7 #26 ID 3606

Найдите количество всех пар натуральных чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $x^2 + x + 5y = 2\,000\,002$.

999976293606

Задача 7 #27 ID 3607

Найдите количество всех пар натуральных чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $x^2 + x + 5y = 3\,000\,002$.

999976293607

Задача 7 #28 ID 3608

Найдите количество всех пар натуральных чисел $(x; y)$, при которых является верным равенство $x^2 + x + 5y = 4\,000\,002$.

999976293608

Задача 8

Задача 8 #29 ID 3585

Для положительных чисел x и y с суммой 7 Петя выписал на доску числа $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$. Оказалось, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Какое наибольшее значение может принимать сумма $x^2 + y^2$?

999976293585

Задача 8 #30 ID 3609

Для положительных чисел x и y с суммой 9 Петя выписал на доску числа $\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$. Оказалось, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Какое наибольшее значение может принимать сумма x^2+y^2?

999976293609

Задача 8 #31 ID 3610

Для положительных чисел x и y с суммой 11 Петя выписал на доску числа $\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$. Оказалось, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Какое наибольшее значение может принимать сумма x^2+y^2?

999976293610

Задача 8 #32 ID 3611

Для положительных чисел x и y с суммой 13 Петя выписал на доску числа $\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$. Оказалось, что выписанные числа образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Какое наибольшее значение может принимать сумма x^2+y^2?

999976293611

Задача 9

Задача 9 #33 ID 3586

Города X и Y расположены на реке, причём X – выше по течению, а между ними находится пристань Π. В 8:00 катамаран и лодка находились в городе X, плот – у пристани Π, а катер – в городе Y. Они одновременно начали движение: катер – вверх по течению, а катамаран, лодка и плот – вниз по течению. Известно, что лодка и плот встретились в том же самом месте, где катамаран встретился с катером. Кроме того, катамаран и плот встретились в том же самом месте, где встретились лодка и катер. Все движутся с постоянными скоростями, скорость катера в 6 раз больше скорости плота (то есть одно и то же расстояние катер проходит в 6 раз быстрее, чем плот), а места встречи плота с лодкой и с катамараном различны. Найдите отношение расстояния $X\Pi$ к расстоянию ΠY.

999976293586

Задача 9 #34 ID 3612

Города X и Y расположены на реке, причём X – выше по течению, а между ними находится пристань Π. В 8:00 катамаран и лодка находились в городе X, плот – у пристани Π, а катер – в городе Y. Они одновременно начали движение: катер – вверх по течению, а катамаран, лодка и плот – вниз по течению. Известно, что лодка и плот встретились в том же самом месте, где катамаран встретился с катером. Кроме того, катамаран и плот встретились в том же самом месте, где встретились лодка и катер. Все движутся с постоянными скоростями, скорость катера в 3 раз больше скорости плота (то есть одно и то же расстояние катер проходит в 3 раза быстрее, чем плот), а места встречи плота с лодкой и с катамараном различны. Найдите отношение расстояния $X\Pi$ к расстоянию ΠY.

999976293612

Задача 9 #35 ID 3614

Города X и Y расположены на реке, причём X – выше по течению, а между ними находится пристань Π. В 8:00 катамаран и лодка находились в городе X, плот – у пристани Π, а катер – в городе Y. Они одновременно начали движение: катер – вверх по течению, а катамаран, лодка и плот – вниз по течению. Известно, что лодка и плот встретились в том же самом месте, где катамаран встретился с катером. Кроме того, катамаран и плот встретились в том же самом месте, где встретились лодка и катер. Все движутся с постоянными скоростями, скорость катера в 5 раз больше скорости плота (то есть одно и то же расстояние катер проходит в 5 раз быстрее, чем плот), а места встречи плота с лодкой и с катамараном различны. Найдите отношение расстояния $X\Pi$ к расстоянию ΠY.

999976293614

Задача 9 #36 ID 3619

Города X и Y расположены на реке, причём X — выше по течению, а между ними находится пристань Π. В 8:00 катамаран и лодка находились в городе X, плот — у пристани Π, а катер — в городе Y. Они одновременно начали движение: катер — вверх по течению, а катамаран, лодка и плот — вниз по течению. Известно, что лодка и плот встретились в том же самом месте, где катамаран встретился с катером. Кроме того, катамаран и плот встретились в том же самом месте, где встретились лодка и катер. Все движутся с постоянными скоростями, скорость катера в 11 раз больше скорости плота (то есть одно и то же расстояние катер проходит в 11 раз быстрее, чем плот), а места встречи плота с лодкой и с катамараном различны. Найдите отношение расстояния $X\Pi$ к расстоянию ΠY.

999976293619

Задача 10

Задача 10 #37 ID 3587

В вершинах правильного 50-угольника разместили 1 чёрную и 49 белых фишек. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

999976293587

Задача 10 #38 ID 3615

В вершинах правильного 54-угольника разместили 1 чёрную и 53 белых фишки. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

999976293615

Задача 10 #39 ID 3616

В вершинах правильного 60-угольника разместили 1 чёрную и 59 белых фишек. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

999976293616

Задача 10 #40 ID 3617

В вершинах правильного 64-угольника разместили 1 чёрную и 63 белых фишки. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

999976293617