Отборочный этап 2024/25

Задачи олимпиады: Математика 11 класс (1 попытка)

Задача 1

Задача 1 #1 ID 3620

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 1$, $BP : PC = 2$, а высота BH треугольника ABC равна $0{,}5$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.

999976293620

Задача 1 #2 ID 3623

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 2$, $BP : PC = 0{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 3. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.

999976293623

Задача 1 #3 ID 3622

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = \sqrt{2}$, $BP : PC = 3$, а высота BH треугольника ABC равна 2. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.

999976293622

Задача 1 #4 ID 3624

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 4$, $BP : PC = 1{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.

999976293624

Задача 2

Задача 2 #5 ID 3625

Числа p и q – простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,528$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

999976293625

Задача 2 #6 ID 3634

Числа p и q – простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,556$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

999976293634

Задача 2 #7 ID 3635

Числа p и q – простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,752$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

999976293635

Задача 2 #8 ID 3636

Числа p и q – простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,774$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

999976293636

Задача 3

Задача 3 #9 ID 3626

Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 13-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 13-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 13-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 13-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем Ваня, съели мама и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

999976293626

Задача 3 #10 ID 3637

Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 7-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 7-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 7-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 7-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели Ваня и мама вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Задача 3 #11 ID 3638

Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 12-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 12-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 12-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 12-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели мама и Ваня вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Задача 3 #12 ID 3639

Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 14-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 14-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 14-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 14-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем мама, съели Ваня и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Задача 4

Задача 4 #13 ID 3627

Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 302 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Задача 4 #14 ID 3640

Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 272 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Задача 4 #15 ID 3641

Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 242 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Задача 4 #16 ID 3642

Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 212 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Задача 5

Задача 5 #17 ID 3628

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 3$, $EP = 4$.

Задача 5 #18 ID 3643

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 5$, $EP = 10$.

Задача 5 #19 ID 3644

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 12$, $EP = 6$.

Задача 5 #20 ID 3645

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 4$, $EP = 12$.

Задача 6

Задача 6 #21 ID 3629

У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

• вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, удвоится;

• вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что в нём 10 шоколадных конфет, а всех конфет N — не менее 40?

Задача 6 #22 ID 3646

У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

• вероятность того, что он вытянет ириску, удвоится;

• вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что в нём 11 ирисок, а всех конфет N — не менее 50?

Задача 6 #23 ID 3647

У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

• вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, утроится;

• вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что в нём 15 шоколадных конфет, а всех конфет N — не менее 60?

Задача 6 #24 ID 3648

У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

• вероятность того, что он вытянет ириску, утроится;

• вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что в нём 12 ирисок, а всех конфет N — не менее 57?

Задача 7

Задача 7 #25 ID 3630

Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 8$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух — в пункте B, а Кролик — в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух — из B в C, а Кролик — из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

Задача 7 #26 ID 3649

Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 0{,}5$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух — в пункте B, а Кролик — в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух — из B в C, а Кролик — из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

Задача 7 #27 ID 3650

Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 5 : 3$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

999976293650

Задача 7 #28 ID 3651

Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 4 : 7$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

999976293651

Задача 8

Задача 8 #29 ID 3631

Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \dfrac{10}{\sqrt{149}}$.

999976293631

Задача 8 #30 ID 3652

Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \dfrac{8}{\sqrt{73}}$.

999976293652

Задача 8 #31 ID 3653

Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$.

999976293653

Задача 8 #32 ID 3654

Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin \angle SAB = \dfrac{5}{\sqrt{146}}$.

999976293654

Задача 9

Задача 9 #33 ID 3632

Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b=1\,000\,001$?

999976293632

Задача 9 #34 ID 3655

Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b=3\,000\,006$?

999976293655

Задача 9 #35 ID 3656

Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b=4\,000\,005$?

999976293656

Задача 9 #36 ID 3657

Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b=5\,000\,004$?

999976293657

Задача 10

Задача 10 #37 ID 3633

В вершинах правильного 30-угольника разместили 28 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

999976293633

Задача 10 #38 ID 3658

В вершинах правильного 34-угольника разместили 32 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Задача 10 #39 ID 3659

В вершинах правильного 40-угольника разместили 38 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Задача 10 #40 ID 3660

В вершинах правильного 44-угольника разместили 42 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?