

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^9 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 19$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 21$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 9$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 19$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 10$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 13$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 18$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$. Значение 21 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 11$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 14$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{30} следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 30, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 15$.

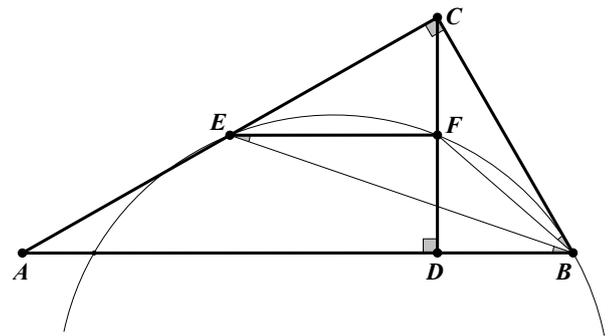
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} 3^{\min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} 5^{\min(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Решение. Соединим точку B с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD . Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD , а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD . Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0,25S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot CD}{0,5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4 \left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{3\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pm x = \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}, \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}. \end{aligned}$$

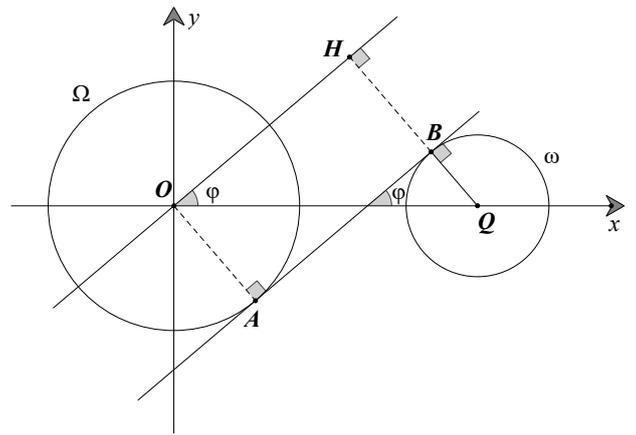
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 6)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(6; 0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$.



Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O ; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 6$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{11}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{\sqrt{11}}$. С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда $|\frac{a}{2}| < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$. Найдите все возможные значения произведения xy .

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Обозначим $\log_3 x = u$, $\log_3(5y) = v$. Так как $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{u}$, $\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2u}$, $\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{25y^2} (3^{11}) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{11}{2v}$, то исходные уравнения можно записать в

виде

$$\begin{cases} u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 8, \\ v^4 + \frac{2}{v} = \frac{11}{2v} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 16u + 7 = 0, \\ 2v^5 + 16v - 7 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-2w^5 - 16w - 7 = 0$, т.е. $2w^5 + 16w + 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_3 x + \log_3(5y) = 0$, $\log_3(5xy) = 0$, $5xy = 1$, $xy = \frac{1}{5}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

Ответ: 5 778.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $3x_2 + y_2 - 33 = 3x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -3x$ и $y = -3x + 60$, поэтому они параллельны прямым $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 60$ и $0 \leq k + 33 \leq 60$, поэтому $k \in [0; 27]$.

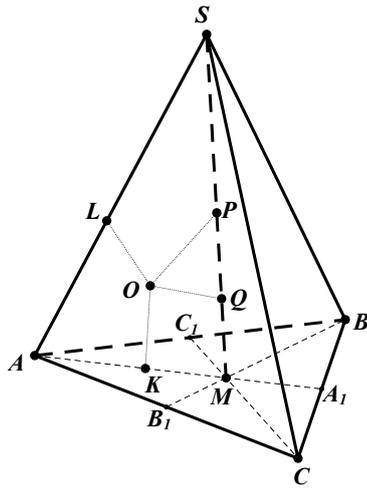
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -3x + b$. Если b кратно трём (т.е. $b = 3l$), то получаем прямую $y = 3(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leq y \leq 42 \Leftrightarrow l - 14 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 15 целых значений x . Если b не делится на 3, то есть при $b = 3l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2\}$, имеем $0 \leq -3x + 3l + \gamma \leq 42 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{3} - 14 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{3}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 13 \leq x \leq l$ – всего 14 целочисленных значений.

Если $k = 3l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 15 точек – всего $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2\,250$ пар. Если $k \neq 3l$ (таких значений 18), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 14 точек – имеем $18 \cdot 14 \cdot 14 = 3\,528$ пар. Итого получаем $2\,250 + 3\,528 = 5\,778$ пар.

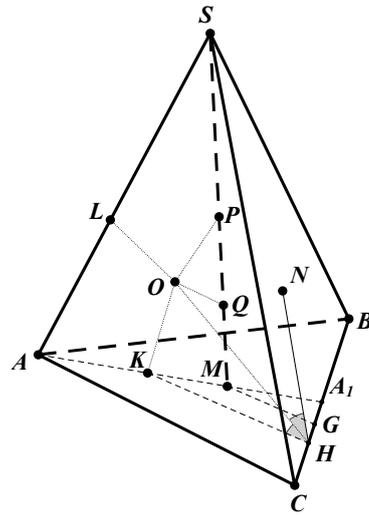
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Ответ: а) 2430; б) $2 \arctg \frac{3}{5} = \arccos \frac{8}{17}$.

Решение. а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω , а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 12$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 6$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 6$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 135,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 5$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 8$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 10$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{3}$. Окончательно, $\text{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{3}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \arctg \frac{3}{5}$.

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^7 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 7$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 10$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 7$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 13$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 14$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 11$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 15$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 17$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11+15+17}{2} = 21,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 22$. Значение 22 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 10$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_1 + \beta_2 = 12$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{43} следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 43$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 43$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 43, если, например, $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 23$.

Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

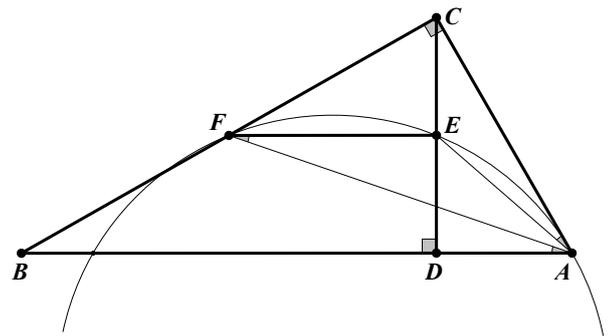
$$2^{\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} 3^{\min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} 5^{\min(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

Ответ: 1,2.

Решение. Соединим точку A с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle BAF = \angle AFE$, а $\angle CAE = \angle AFE$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle BAF = \angle CAE$. Следовательно, AF и AE – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и ACD . Значит, $\frac{BF}{FC} = \frac{CE}{ED}$. По теореме Фалеса $\frac{BF}{FC} = \frac{ED}{CE}$. Из полученных равенств следует, $CE = ED$, поэтому E – середина CD , а так как $EF \parallel BD$, то EF – средняя линия треугольника BCD . Отсюда $S_{BCD} = 4S_{CEF}$ и

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{0,25S_{BCD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AD \cdot CD}{0,5 \cdot BD \cdot CD} = \frac{4AD}{BD} = 4 \cdot 0,3 = 1,2.$$



3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arccos a$ эквивалентно соотношениям $\cos b = a$, $0 \leq b \leq \pi$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arccos(\sin x) = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leq \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leq \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{10} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{7\pi}{10} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \pi + \frac{5\pi n}{2}, \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

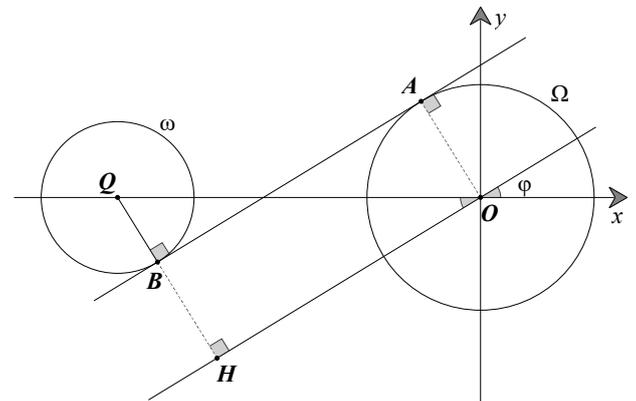
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x + 7)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(-7; 0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. При $a = 0$ первое уравнение системы задаёт вертикальную прямую, которая не может иметь 4 общие точки с окружностями ни при каком значении b . Если $a \neq 0$, то первое уравнение определяет прямую $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$



получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$.

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O ; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 7$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{24}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$. С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда $|\frac{1}{3a}| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ и $\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$. Найдите все возможные значения произведения xy .

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Решение. Обозначим $\log_7(6x) = u$, $\log_7 y = v$. Так как $\log_{6x} 7 = \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{1}{u}$, $\log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 = \frac{3}{2u}$, $\log_y 7 = \frac{1}{\log_7 y} = \frac{1}{v}$, $\log_{y^2} (7^5) = \frac{5}{2} \log_y 7 = \frac{5}{2v}$, то исходные уравнения можно

записать в виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{2}{u} = \frac{3}{2u} - 4, \\ v^4 + \frac{6}{v} = \frac{5}{2v} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 8u - 7 = 0, \\ 2v^5 + 8v + 7 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-2w^5 - 8w + 7 = 0$, т.е. $2w^5 + 8w - 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_7(6x) + \log_7 y = 0$, $\log_7(6xy) = 0$, $6xy = 1$, $xy = \frac{1}{6}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

Ответ: 11 043.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $4x_2 + y_2 - 40 = 4x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -4x$ и $y = -4x + 76$, поэтому они параллельны прямым $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 76$ и $0 \leq k + 40 \leq 76$, поэтому $k \in [0; 36]$.

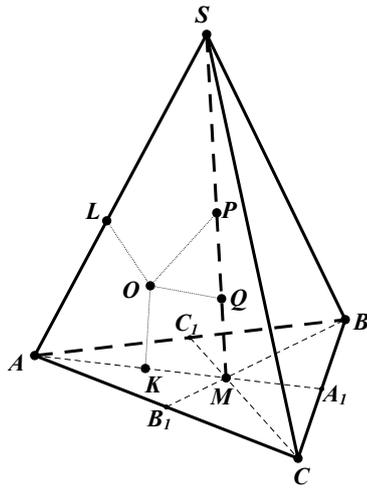
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -4x + b$. Если b кратно четырём (т.е. $b = 4l$), то получаем прямую $y = 4(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leq y \leq 68 \Leftrightarrow l - 17 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 18 целых значений x . Если b не делится на 3, то есть при $b = 3l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2; 3\}$, имеем $0 \leq -4x + 4l + \gamma \leq 68 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{4} - 17 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{4}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 16 \leq x \leq l$ – всего 17 целочисленных значений.

Если $k = 4l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ можно выбрать по 18 точек – всего $10 \cdot 18 \cdot 18 = 3240$ пар. Если $k \neq 4l$ (таких значений 27), то на каждой из двух прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ можно выбрать по 17 точек – имеем $27 \cdot 17 \cdot 17 = 7803$ пары. Итого получаем $3240 + 7803 = 11043$ пары.

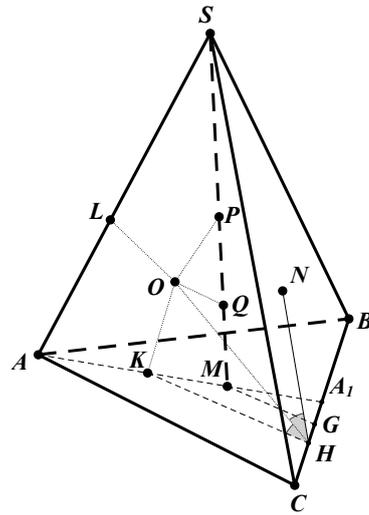
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

Ответ: а) 1350; б) $2 \arctg \frac{5}{8} = \arccos \frac{39}{89}$.

Решение. а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω , а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 10$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 15$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 5$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 5$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 90,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 4$. Так как $SL = SN = 3$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 7$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 8$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{32}{5}$. Окончательно, $\text{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{8}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \arctg \frac{5}{8}$.

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^8 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 12$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 9$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 8$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 12$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 14$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 14$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 20$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 21$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{14+20+21}{2} = 27,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 28$. Значение 28 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 14$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 21$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{39} следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 39, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 24$.

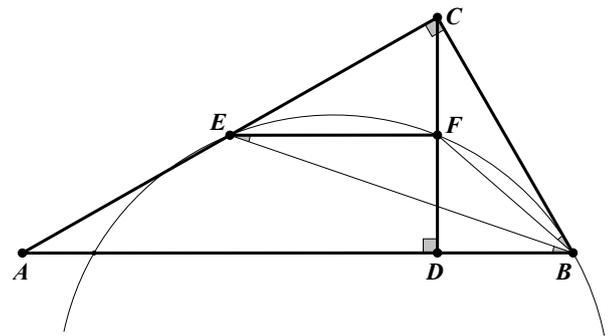
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} 3^{\min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} 5^{\min(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

Ответ: $\frac{28}{5}$.

Решение. Соединим точку B с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD . Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD , а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD . Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0,25S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot CD}{0,5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4 \left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} \right) = 4 \left(1 + \frac{2}{5} \right) = \frac{28}{5}.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

Ответ: $x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{2\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{3\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \\ x = \frac{5\pi k}{3} - \frac{\pi}{3}, \end{cases} \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}. \end{aligned}$$

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

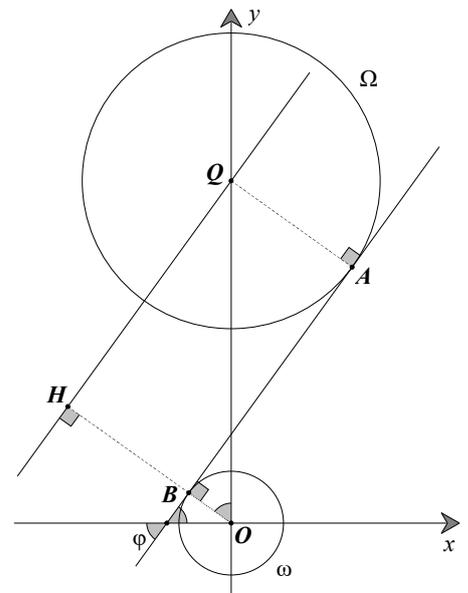
имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y - 10)^2 = 36$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности ω и Ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(0; 10)$ и радиусами 1 и 6 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ с угловым коэффициентом $k = \frac{a}{3}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = \frac{a}{3}$.

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю больше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q ; пусть также $\ell \cap OB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \perp AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 10$, $OH = OB + BH = OB + AQ = 1 + 6 = 7$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $HQ = \sqrt{OQ^2 - OH^2} = \sqrt{51}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{\sqrt{51}}{7}$. С учётом сказанного выше, подходят все значения углового коэффициента, по модулю большие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда $\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.



5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$ и $\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$. Найдите все возможные значения произведения xy .

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $\log_5(2x) = u$, $\log_5 y = v$. Так как $\log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{u}$, $\log_{8x^3} 625 = \frac{4}{3} \log_x 5 = \frac{4}{3u}$, $\log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{v}$, $\log_{y^3} (0,2) = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3v}$, то исходные уравнения можно записать в

виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{3}{u} = \frac{4}{3u} - 3, \\ v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3v} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^5 + 9u - 13 = 0, \\ 3v^5 + 9v + 13 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-3w^5 - 9w + 13 = 0$, т.е. $3w^5 + 9w - 13 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_5(2x) + \log_5 y = 0$, $\log_5(2xy) = 0$, $2xy = 1$, $xy = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

Ответ: 12 106.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -5x$ и $y = -5x + 90$, поэтому они параллельны прямым $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 90$ и $0 \leq k + 45 \leq 90$, поэтому $k \in [0; 45]$.

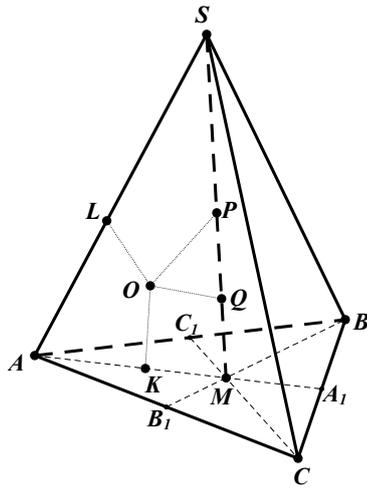
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -5x + b$. Если b кратно пяти (т.е. $b = 5l$), то получаем прямую $y = 5(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма нужно, чтобы $0 \leq y \leq 80 \Leftrightarrow l - 16 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 17 целых значений x . Если b не делится на 5, то есть при $b = 5l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2; 3; 4\}$, имеем $0 \leq -5x + 5l + \gamma \leq 80 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{5} - 16 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{5}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 15 \leq x \leq l$ – всего 16 целочисленных значений.

Если $k = 5l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ можно выбрать по 17 точек – всего $10 \cdot 17 \cdot 17 = 2890$ способов. Если $k \neq 5l$ (таких значений 36), то на каждой из двух прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ можно выбрать по 16 точек – имеем $36 \cdot 16 \cdot 16 = 9216$ способов. Итого получаем $2890 + 9216 = 12106$ способов.

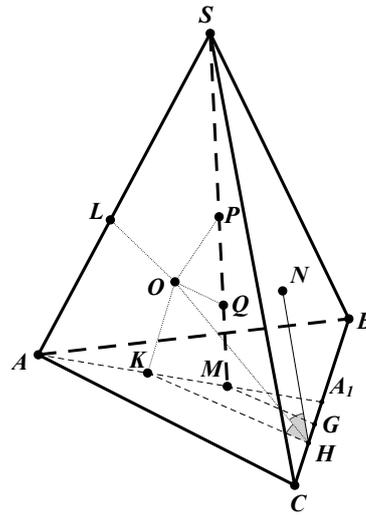
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
- Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Ответ: а) 3600; б) $2 \arctg \frac{4}{5} = \arccos \frac{9}{41}$.

Решение. а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω , а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 16$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 24$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 8$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 8$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 150,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 150 = 3600$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = \frac{25}{6}$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 12$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 12$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{4}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{4}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^6 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{6+14+16}{2} = 18$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 6$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 16$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 13$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 21$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 25$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{13+21+25}{2} = 29,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$. Значение 30 достигается, если, например, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 17$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 22$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{28} следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 28, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 13$.

Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

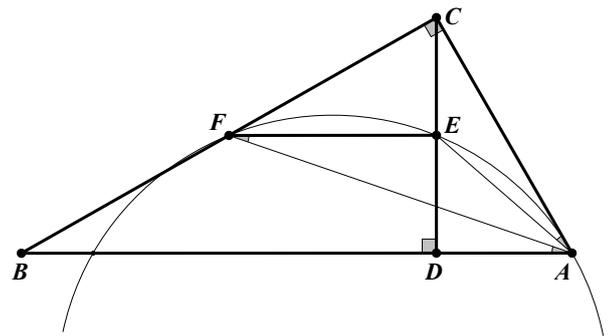
$$2^{\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} 3^{\min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} 5^{\min(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)} = 2^{18} 3^{30} 5^{28}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

Ответ: 1,6.

Решение. Соединим точку A с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle BAF = \angle AFE$, а $\angle CAE = \angle AFE$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle BAF = \angle CAE$. Следовательно, AF и AE – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и ACD . Значит, $\frac{BF}{FC} = \frac{CE}{ED}$. По теореме Фалеса $\frac{BF}{FC} = \frac{ED}{CE}$. Из полученных равенств следует, $CE = ED$, поэтому E – середина CD , а так как $EF \parallel BD$, то EF – средняя линия треугольника BCD . Отсюда $S_{BCD} = 4S_{CEF}$ и

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{0,25S_{BCD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AD \cdot CD}{0,5 \cdot BD \cdot CD} = \frac{4AD}{BD} = 4 \cdot 0,4 = 1,6.$$



3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arccos a$ эквивалентно соотношениям $\cos b = a$, $0 \leq b \leq \pi$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leq \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{\pi}{10} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{9\pi}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

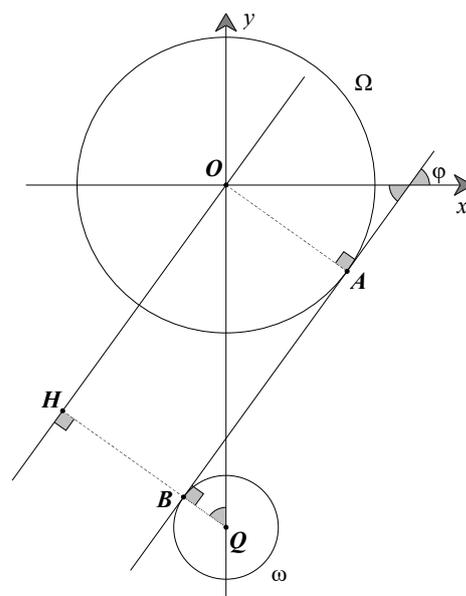
имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + (y + 9)^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(0; -9)$ и радиусами 5 и 2 соответственно. При $a = 0$ первое уравнение системы задаёт вертикальную прямую, которая может иметь 4 общие точки с окружностями, например, при $b = 0$. Если $a \neq 0$, то первое уравнение определяет прямую $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{6a}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{6a}$.

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю больше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O ; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 9$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 5 + 2 = 7$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{32}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{OH}{HQ} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$. С учётом сказанного выше, подходят все значения углового коэффициента, по модулю большие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда $\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow |a| < \frac{35}{24\sqrt{2}}$. Поскольку значение $a = 0$ также подходит, окончательно получаем $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$.



5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$. Найдите все возможные значения произведения xy .

Ответ: 2.

Решение. Обозначим $\log_{11} x = u$, $\log_{11} \left(\frac{y}{2}\right) = v$. Так как $\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{u}$, $\log_{x^3} \left(\frac{1}{121}\right) = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3u}$, $\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{0,125y^3} (11^{-13}) = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3v}$, то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{6}{u} = -\frac{2}{3u} - 5, \\ v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{13}{3v} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^5 + 15u - 16 = 0, \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-3w^5 - 15w + 16 = 0$, т.е. $3w^5 + 15w - 16 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_{11} x + \log_{11}(0,5y) = 0$, $\log_{11}(0,5xy) = 0$, $0\frac{1}{2}xy = 1$, $xy = 2$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

Ответ: 12 685.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $6x_2 + y_2 - 48 = 6x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

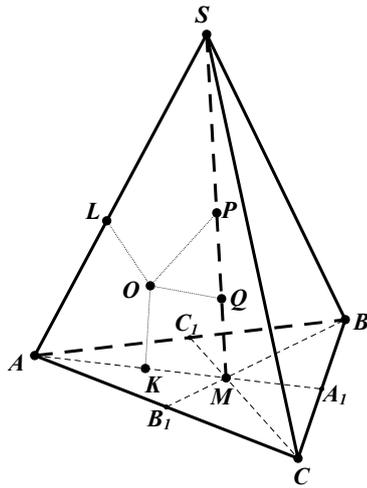
Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -6x$ и $y = -6x + 102$, поэтому они параллельны прямым $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 102$ и $0 \leq k + 48 \leq 102$, поэтому $k \in [0; 54]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -6x + b$. Если b кратно шести (т.е. $b = 6l$), то получаем прямую $y = 6(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leq y \leq 90 \Leftrightarrow l - 15 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 16 целых значений x . Если b не делится на 6, то есть при $b = 6l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, имеем $0 \leq -6x + 6l + \gamma \leq 90 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{6} - 15 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{6}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 14 \leq x \leq l$ – всего 15 целочисленных значений.

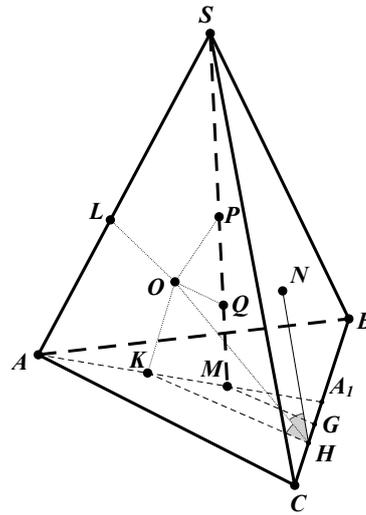
Если $k = 6l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ можно выбрать по 16 точек – всего $10 \cdot 16 \cdot 16 = 2560$ пар. Если $k \neq 6l$ (таких значений 45), то на каждой из двух прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ можно выбрать по 15 точек – имеем $45 \cdot 15 \cdot 15 = 10125$ пар. Итого получаем $2560 + 10125 = 12685$ пар.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

- Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



к задаче 7а



к задаче 7б

Ответ: а) 8100; б) $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{6} = \arccos \frac{11}{61}$.

Решение. а) Поскольку SL — касательная к сфере Ω , а SP и SQ — секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку $MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 20$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 30$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 10$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 10$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 270,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω .

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 6$. Так как $SL = SN = 6$ как касательные к Ω , то $AK = AL = SA - SL = 14$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 16$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{48}{5}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{6}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{6}$.