11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

Ответ: 18.

Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}(2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+142)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 18$ либо $n = 20$. Остаётся заметить, что значение $n = 20$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 181°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 6.

Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6 \Leftrightarrow \ln\left(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z\right) = \ln 6 \Leftrightarrow 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3.$$

Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $4x + 3y + 3z = 1$, $z = 1$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $4x + 3y = -2$. Отсюда $y = -x - \frac{x+2}{3}$. Так как x и y – целые числа, это означает, что дробь $\frac{x+2}{3}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{x+2}{3} = k$. Тогда $x = 3k - 2$, $y = 2 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 25k^2 - 28k + 9$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = \frac{14}{25}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 1$. Минимальное значение равно 6.

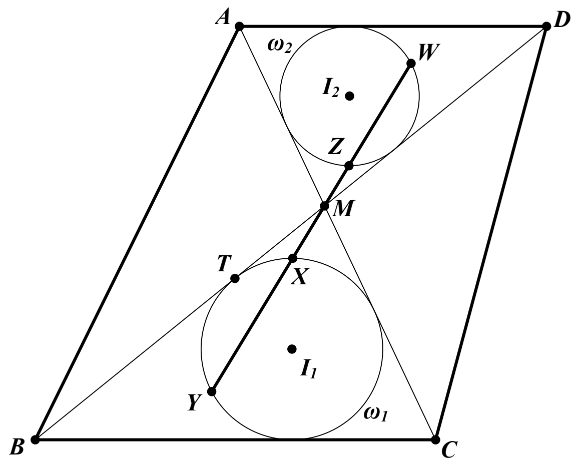
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

Ответ: $\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 792$. Отсюда $a = 30$. Значит, $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3} I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9} I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{79}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ или $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}\right) - \left(4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}\right)$. Обозначая $-\frac{\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x = -16\sin^3 x + 8\sin^2 x + 7\sin x + 1.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) > 0$, $f(1) = 0$, а производная $f'(t) = -48t^2 + 16t + 7$ равна нулю в точках $t = \frac{7}{12}$ и $t = -\frac{1}{4}$, причём $t = \frac{7}{12}$ – точка максимума, а $t = -\frac{1}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{-\pi}{14}$ отлично от 1 и от $-\frac{1}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

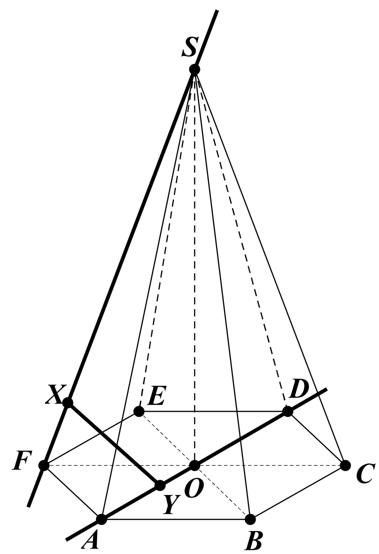
Ответ: 780.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_7^4 = 495 - 35 = 460$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

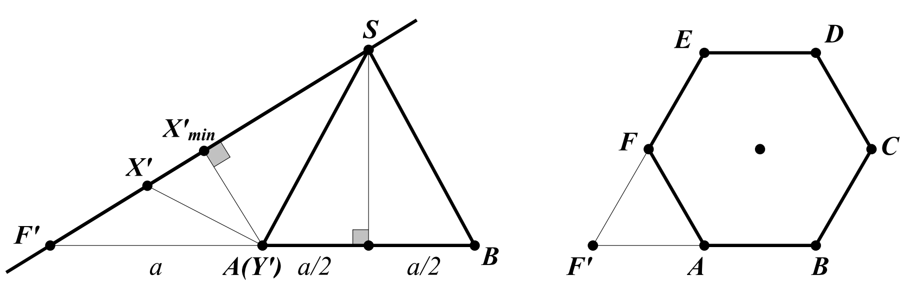
элементов, то есть $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$. Вершину можно выбрать 5 способами, поэтому количество таких пирамид есть $5 \cdot 64 = 320$.
В итоге получаем $460 + 320 = 780$ способов.

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB = \alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha = \frac{AB}{2AS} = \frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \frac{4b^2-a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем



$$\rho = \frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$
$$F'S^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{a}{2b} = 2a^2 + b^2;$$
$$2S_{F'Y'S} = ab\sin\alpha = \frac{a}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2a^2+b^2}}$. Подставляя сюда $a=2$, $b=4$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

   Ответ: 9.

   Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}(2 \cdot 132^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+131)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 9$ либо $n = 40$. Остаётся заметить, что значение $n = 40$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 210°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

   Ответ: 5.

   Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z\right) = \ln 45 \;\Leftrightarrow 5^{2x} \cdot 3^y \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5.$$

   Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $2x + 2y + 3z = 1$, $y = 2$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $2x + 3z = -3$. Отсюда $x = -z - 1 + \frac{-z-1}{2}$. Так как x и z – целые числа, это означает, что дробь $\frac{-z-1}{2}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{-z-1}{2} = k$. Тогда $x = 3k$, $z = -1 - 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 13k^2 + 4k + 5$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = -\frac{2}{13}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 0$. Минимальное значение равно 5.

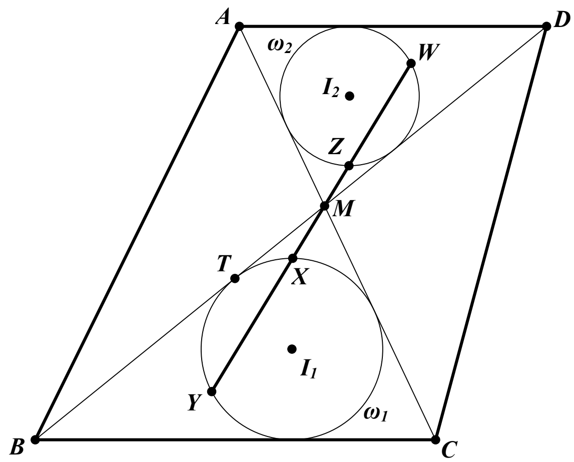
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

   Ответ: $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$.

   Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
   Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 1080$. Отсюда $a = 42$. Значит, $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

   Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3} I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9} I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{94}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}$ или $3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}\right) - \left(3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}\right)$. Обозначая $\frac{3\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 5 - 4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$-4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x + 5 = 16\sin^3 x - 8\sin^2 x - 15\sin x + 9.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) = 0$, $f(1) > 0$, а производная $f'(t) = 48t^2 - 16t - 15$ равна нулю в точках $t = \frac{3}{4}$ и $t = -\frac{5}{12}$, причём $t = -\frac{5}{12}$ – точка максимума, а $t = \frac{3}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{3\pi}{14}$ отлично от -1 и от $\frac{3}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

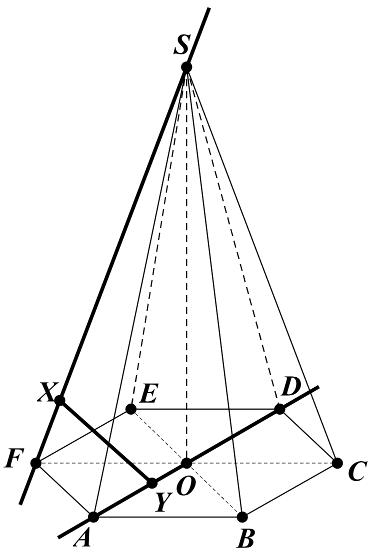
Ответ: 1 077.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_8^4 = 495 - 70 = 425$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

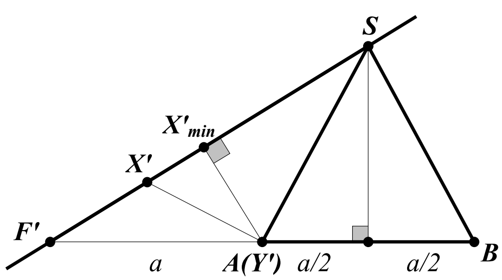
элементов, то есть $C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=70+56+28+8+1=163$. Вершину можно выбрать 4 способами, поэтому количество таких пирамид есть $4\cdot 163=652$.
В итоге получаем $425+652=1\,077$ способов.

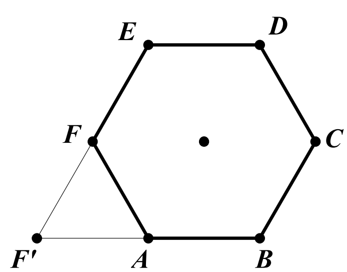
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB=\alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha=\frac{AB}{2AS}=$ $=\frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha=1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2=\frac{4b^2-a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем





$$\rho=\frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$

$$F'S^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=a^2+b^2+2ab\cdot\frac{a}{2b}=2a^2+b^2;$$

$$2S_{F'Y'S}=ab\sin\alpha=\frac{a}{2}\sqrt{4b^2-a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2a^2+b^2}}$. Подставляя сюда $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{7}{16}}$.

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

   Ответ: $x = -2 \pm \sqrt{5}$.

   Решение. По теореме Пифагора $(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+3)(5x-1) + x^2(x+3)^2 = 0$, откуда $(x+3)(1-5x+x^3+3x^2) = 0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x = 1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+3)(x-1)(x^2+4x-1) = 0$. Это уравнение имеет корни $x=-3$, $x=1$, $x=-2\pm\sqrt{5}$. Корни $x=1$ и $x=-3$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29} = \sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

   Ответ: 1.

   Решение. Так как $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$, данное в условии равенство можно записать в виде
$$(2x+3y-4)\sqrt{2} + (z-2)\sqrt{29} = 0.$$

   Если $z \neq 2$, то $\frac{2x+3y-4}{2-z} = \sqrt{\frac{29}{2}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $z=2$, и тогда $2x+3y=4$. Последнее уравнение можно записать в виде $x = 2-y-\frac{y}{2}$. Поскольку x и y – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{y}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{y}{2} = k$ – тогда $x = 2+3k$, $y=-2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2-y^2+z^2 = 5k^2+12k+8$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k = -\frac{6}{5}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k=-1$, а соответствующее значение выражения равно 1.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2\,024}$.

   Ответ: 10 125.

   Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система
$$\begin{cases} a-b=k, \\ a+b+1=l \end{cases}$$
   имеет единственное решение $a = \frac{k+l-1}{2}$, $b = \frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l > k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a > b$, то $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
   Заметим, что каждому представлению числа $81 \cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 2024-ой степени, тройка – в степени от 0 до 4, пятёрка – в степени от 0 до 2024. Поэтому количество представлений числа $81 \cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$, равно $5 \cdot 2\,025 = 10\,125$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{2\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 4x-x^2-3 \geqslant 0, \\ 2x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2+x-2 \geqslant 0, \\ 4x-x^2-3 \neq 0, \\ x^2+x-2 \neq 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty), \\ x \neq 3, x \neq 1, \\ x \neq \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{4x-x^2-3}-3 = \sqrt{1-(x-2)^2}-3 \leqslant 1-3 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} > 0 \Leftrightarrow 2x-x^2 > x^2+x-2 \Leftrightarrow 2x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{3-\sqrt{4x-x^2-3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2} \geqslant 3-\sqrt{4x-x^2-3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{2x-x^2}+3.$$

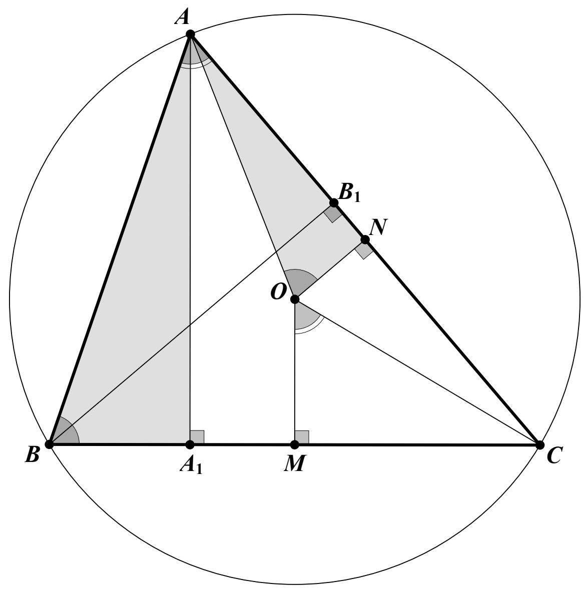
Заметим, что при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$ правая часть не меньше 3, а левая

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} = \sqrt{(x+2)(x-1)}+\sqrt{1-(x-2)^2} \leqslant 2+1 = 3,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x=2$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x=2$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

Ответ: 2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90°$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}\frac{1}{2}AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$

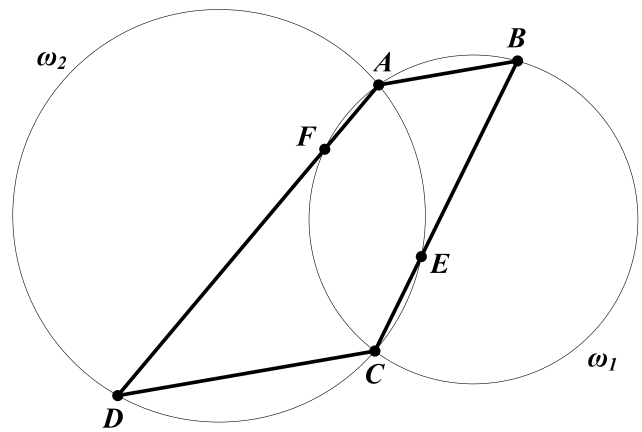
Ответ: $(-1; 0)$, $(3; 4)$, $\left(2+\sqrt{17}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(2-\sqrt{17}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

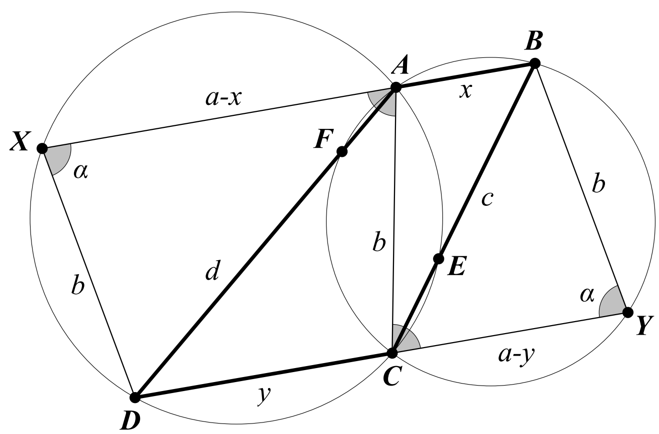
$$x^2 + 2x + 1 - 3xy - 3y + 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 - 3(x+1)y + 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x+1 = y$ или $x+1 = 2y$.
Если $x = y - 1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3 - 4y^2 = 0$. Отсюда получаем $y = 0$ (и тогда $x = -1$) или $y = 4$ (и тогда $x = 3$).
Если $x = 2y - 1$, то $y^3 - 3y^2 + 2y = 0$. Тогда или $y = 0$ (и выйдет пара чисел, уже полученная ранее), или $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (при этом $x = 2 \pm \sqrt{17}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



Ответ: $1:2$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2 - ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)

10 КЛАСС. Вариант 14

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|x-1|$ и $|x^2+4x|$, а длина гипотенузы равна $|2x+3|$. Найдите x.

Ответ: $x = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Решение. По теореме Пифагора $(x-1)^2 + \left(x^2+4x\right)^2 = (2x+3)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+4)(3x+2) + x^2(x+4)^2 = 0$, откуда $(x+4)(-2-3x+x^3+4x^2) = 0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x = 1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+4)(x-1)(x^2+5x+2) = 0$. Это уравнение имеет корни $x=-4$, $x=1$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. Корни $x=1$ и $x=-4$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{2}+y\sqrt{12}+z\sqrt{75} = \sqrt{32}+\sqrt{108}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2-z^2$.

Ответ: 16.

Решение. Так как $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, данное в условии равенство можно записать в виде

$$(x-4)\sqrt{2} + (2y+5z-6)\sqrt{3} = 0.$$

Если $x \neq 4$, то $\frac{2y+5z-6}{4-x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $x=4$, и тогда $2y+5z=6$. Последнее уравнение можно записать в виде $y = 3-\frac{5z}{2}$. Поскольку y и z – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{5z}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{z}{2} = k$ – тогда $y = 3-5k$, $z = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2+y^2-z^2 = 21k^2-30k+25$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k = \frac{5}{7}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k=1$, а соответствующее значение выражения равно 16.

3. [4 балла] Назовём числа хорошими, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $343\cdot 10^{1\,000}$.

Ответ: 4 004.

Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система

$$\begin{cases} a-b=k, \\ a+b+1=l \end{cases}$$

имеет единственное решение $a = \frac{k+l-1}{2}$, $b = \frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l > k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a > b$, то $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
Заметим, что каждому представлению числа $343\cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $343\cdot 10^{1\,000} = 2^{1\,000}\cdot 7^3\cdot 5^{1\,000}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 1000-ой степени, семёрка – в степени от 0 до 3, пятёрка – в степени от 0 до 1 000. Поэтому количество представлений числа $343\cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $343\cdot 10^{1\,000}$, равно $4\cdot 1\,001 = 4\,004$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2}-5} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[2; 1+\sqrt{2}\right) \cup \{3\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 6x-x^2 \geqslant 0, \\ 3x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2-x-2 \geqslant 0, \\ 6x-x^2 \neq 5, \\ x^2-x-2 \neq 3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \neq 5, x \neq 1, \\ x \neq 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right) \cup \left(\sqrt{2}+1; 3\right].$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{6x-x^2}-5 = \sqrt{9-(x-3)^2}-5 \leqslant 3-5 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow 3x-x^2 > x^2-x-2 \Leftrightarrow x^2-2x-1 < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{5-\sqrt{6x-x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2} \geqslant 5-\sqrt{6x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} \geqslant \sqrt{3x-x^2}+5.$$

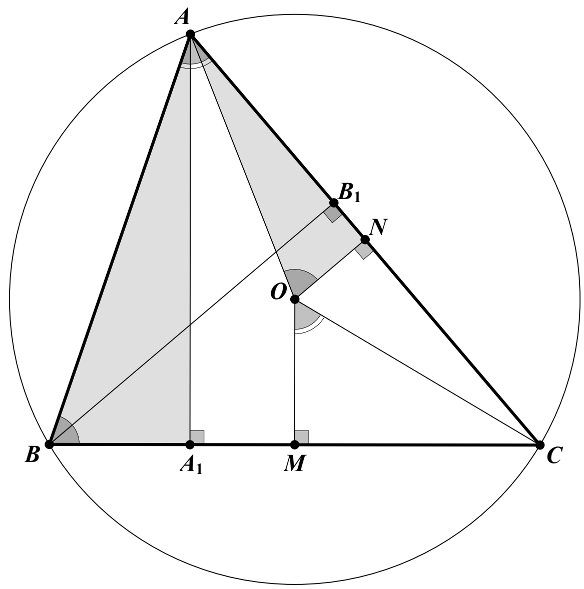
Заметим, что при $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$ правая часть не меньше 5, а левая

$$\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} = \sqrt{(x-2)(x+1)}+\sqrt{9-(x-3)^2} \leqslant 2+3 = 5,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x=3$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x=3$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1 = 5$, а площадь треугольника OBA_1 равна 3.

Ответ: 1,2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90^\circ$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}\frac{1}{2}AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 1{,}2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0, \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0. \end{cases}$

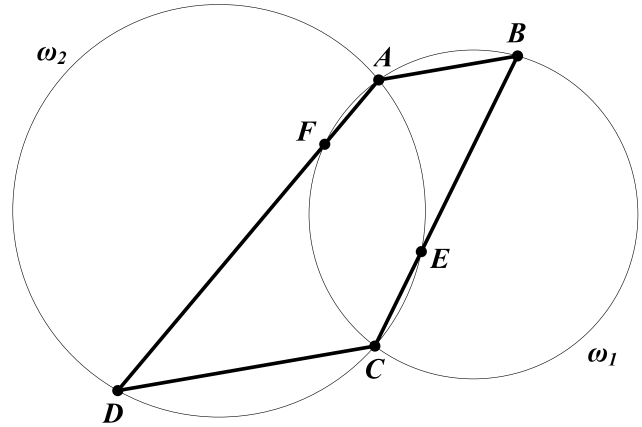
Ответ: $(1; -1)$, $(-2; -1)$, $\left(4 + \sqrt{21}; \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(4 - \sqrt{21}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

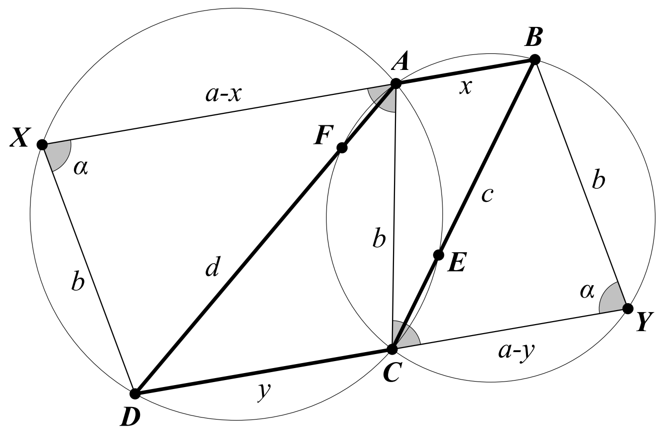
$$x^2 + 2x + 1 + xy + y - 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 + (x+1)y - 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x + 1 = y$ или $x + 1 = -2y$.
Если $x = y - 1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3 + 1 = 0$. Отсюда получаем $y = -1$ (и тогда $x = -2$).
Если $x = -2y - 1$, то $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 5y + 1) = 0$. Тогда или $y = -1$ (и тогда $x = 1$), или $y = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ (при этом $x = 4 \mp \sqrt{21}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если $AF : CE = 3 : 5$.



Ответ: $3 : 5$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2-ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a+8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?

Ответ: $a = 1$, $a = -5$.

Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1 = \frac{a}{2}$ и $x_2 = \frac{a+4}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $5x_1 = x_2$, то $5 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a+4}{2}$, откуда $a = 1$.
Если $x_1 = 5x_2$, то $\frac{a}{2} = 5 \cdot \frac{a+4}{2}$, откуда $a = -5$.

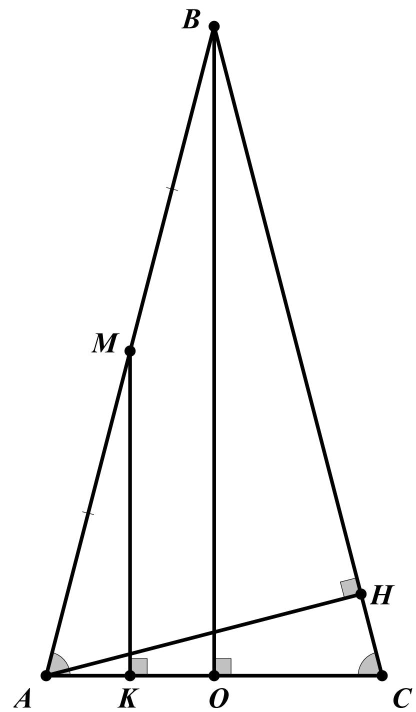
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$, B, $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$, C?

Ответ: 80.

Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $18^2 + 24^2 = 30^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S = \frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh = 2S = 22$. Существует ровно 4 способа записать 22 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $22 = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11 = 11 \cdot 2 = 22 \cdot 1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h = 22 > AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $25 - 2 = 23$ способами. Если он имеет длину 11, то $25 - 11 = 14$ способами. Если он имеет длину 22, то $25 - 22 = 3$ способами. Всего получаем $23 + 14 + 3 = 40$ способов.
2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $19 - 1 = 18$ способами. Если он имеет длину 2, то $19 - 2 = 17$ способами. Если он имеет длину 11, то $19 - 11 = 8$ способами. Отрезок длины 22 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $18 + 17 + 8 = 43$ способа.
Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
Итого получаем $40 + 43 - 3 = 80$ способов.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH = MK$, и $AK = 5$.

Ответ: 100.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 100$.

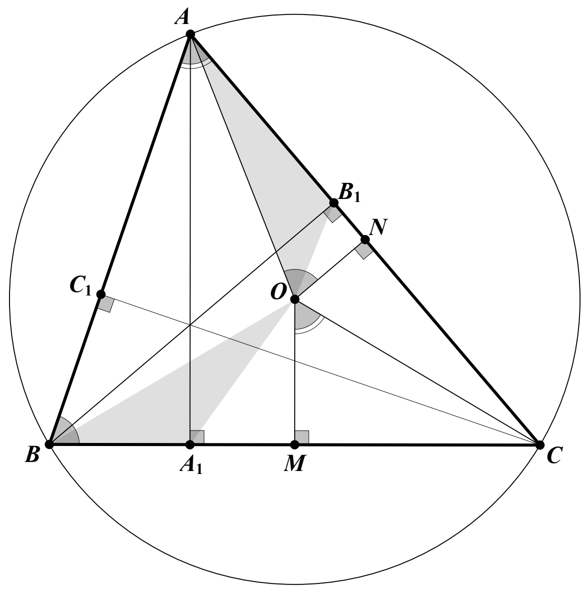
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 240$.

Ответ: $\{13, 14, 15, 16, 17\}$.

Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 240$. Отсюда $a = 13$. Значит, $M = \{13, 14, 15, 16, 17\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.

Ответ: 8.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \;\Rightarrow\; S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 8.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$

Ответ: $(2;-2)$, $(-2;2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = 2ab + 4, \\ \frac{b^3}{a} = 3ab + 8. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $5(ab)^2 + 28ab + 32 = 0$. Откуда либо $ab = -4$, либо $ab = -\frac{8}{5}$. Если $ab = -4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \mp 2$ – решения системы. Если $ab = -\frac{8}{5}$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -\frac{32}{25} < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод

может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

Ответ: Первый и второй заводы должны выпустить по 83 прибора, третий завод – 84.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $2k^2-2(k-1)^2=4k-2$ тыс.руб., на втором – $2k^2+2k-2(k-1)^2-2(k-1)=4k$, и на третьем – $2k^2-k-2(k-1)^2+(k-1)=4k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на третьем заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на первом заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на втором заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на третьем заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ $(l \in N)$, то прибор с номером $3l-2$ приходится на третий завод, прибор с номером $3l-1$ – на первый, и прибор с номером $3l$ – на второй.
Поскольку $\left[\frac{250}{3}\right]=83$, а остаток от деления 250 на 3 равен 1, то выгоднее всего поручить первому и второму заводам выпустить по 83 прибора, а третьему – 84.

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-(4a-12)x+$ $+a^2-6a=0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?

Ответ: $a=9$, $a=-3$.

Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{a}{2}$ и $x_2=\frac{a-6}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $3x_1=x_2$, то $3\cdot\frac{a}{2}=\frac{a-6}{2}$, откуда $a=-3$.
Если $x_1=3x_2$, то $\frac{a}{2}=3\cdot\frac{a-6}{2}$, откуда $a=9$.

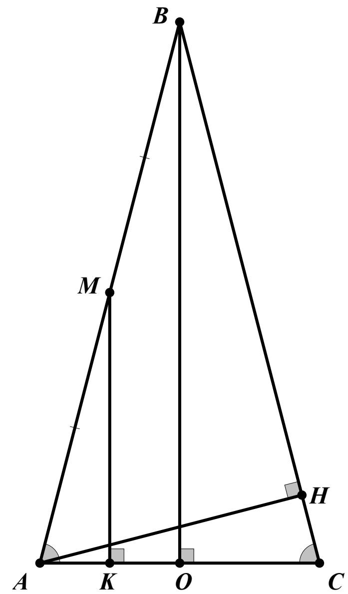
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB=35$, $BC=28$, $AC=21$. На стороне BC отмечено последовательно 27 точек: $B_1, B_2, \ldots, B_{27}$ так, что эти точки разбивают BC на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 20 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ так, что эти точки разбивают AC на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$, B, $B_1, B_2, \ldots, B_{27}$, C?

Ответ: 93.

Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $21^2+28^2=35^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S=\frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh=2S=26$. Существует ровно 4 способа записать 26 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $26=1\cdot 26=2\cdot 13=13\cdot 2=26\cdot 1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h=26>AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $29-2=27$ способами. Если он имеет длину 13, то $29-13=16$ способами. Если он имеет длину 26, то $29-26=3$ способами. Всего получаем $27+16+3=46$ способов.
2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $22-1=21$ способом. Если он имеет длину 2, то $22-2=20$ способами. Если он имеет длину 13, то $22-13=9$ способами. Отрезок длины 26 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $21+20+9=50$ способов.
Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
Итого получаем $46+50-3=93$ способа.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH=MK$, и $AK=7$.

Ответ: 140.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 140$.

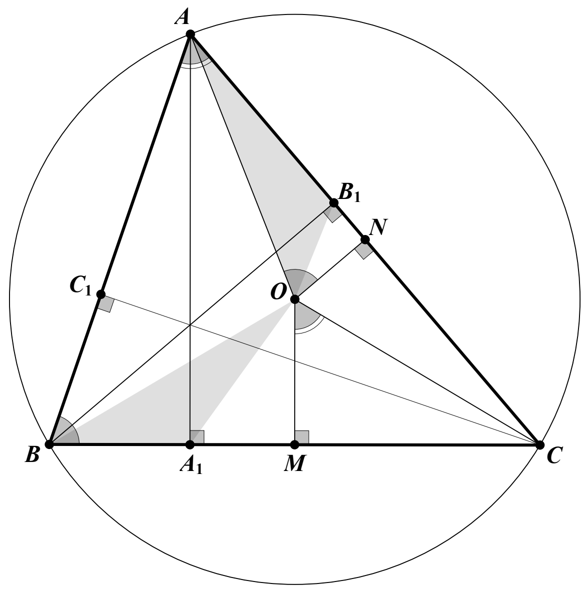
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 288$.

   Ответ: $\{16, 17, 18, 19, 20\}$.

   Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
   Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 288$. Отсюда $a = 16$. Значит, $M = \{16, 17, 18, 19, 20\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 120 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 36 соответственно.

   Ответ: 12.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \ \Rightarrow\ S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 12.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$, $(-2;-2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = -ab + 8, \\ \frac{b^3}{a} = -3ab + 16. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $2(ab)^2 - 40ab + 128 = 0$. Откуда либо $ab = 4$, либо $ab = 16$. Если $ab = 4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \pm 2$ – решения системы. Если $ab = 16$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -128 < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе

$3q^2+2q$ тыс.руб., на втором заводе $3q^2-q$ тыс.руб., и на третьем $3q^2$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?

Ответ: Первый завод должен выпустить 66 приборов, второй и третий заводы – по 67.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $3k^2+2k-3(k-1)^2-2(k-1)=6k-1$ тыс.руб., на втором – $3k^2-k-3(k-1)^2+(k-1)=6k-4$, и на третьем – $3k^2-3(k-1)^2=6k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на втором заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на третьем заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на первом заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на втором заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ ($l \in \mathbb{N}$), то прибор с номером $3l-2$ приходится на второй завод, прибор с номером $3l-1$ – на третий, и прибор с номером $3l$ – на первый.

Поскольку $\left[\frac{200}{3}\right]=66$, а остаток от деления 200 на 3 равен 2, то выгоднее всего поручить первому заводу выпустить 66 приборов, а второму и третьему – по 67.