Отборочный этап 2024/25

Задачи олимпиады: Математика 11 класс (3 попытка)

Задача 1

Задача 1 #1 ID 3947

Для каждого целого k $(-36 \leqslant k \leqslant 15)$ Петя выписал на доску трёхчлен $y = x^2 + kx + 117$. После чего Вася для каждого из этих трёхчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

999976293947

Задача 1 #2 ID 3950

Для каждого целого k $(-11 \leqslant k \leqslant 33)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 95$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

999976293950

Задача 1 #3 ID 3949

Для каждого целого k $(-42 \leqslant k \leqslant 19)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 207$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

999976293949

Задача 1 #4 ID 3948

Для каждого целого k $(-21 \leqslant k \leqslant 39)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 151$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

999976293948

Задача 2

Задача 2 #5 ID 3951

Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел $1^2, 2^2, \ldots,$ 2024^2 на 2024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Задача 2 #6 ID 3954

Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел $1^2, 2^2, \ldots,$ 3024^2 на 3024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Задача 2 #7 ID 3953

Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел $1^2, 2^2, \ldots,$ 4024^2 на 4024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Задача 2 #8 ID 3952

Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел $1^2, 2^2, \ldots,$ 5024^2 на 5024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?

Задача 3

Задача 3 #9 ID 3955

Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 25. Какое наименьшее значение может принимать число a_{10}?

Задача 3 #10 ID 3958

Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{12}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 27. Какое наименьшее значение может принимать число a_{12}?

Задача 3 #11 ID 3957

Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{14}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 29. Какое наименьшее значение может принимать число a_{14}?

Задача 3 #12 ID 3988

Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{16}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 31. Какое наименьшее значение может принимать число a_{16}?

Задача 4

Задача 4 #13 ID 3959

Даны два прямых круговых конуса, основания которых – концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 3. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Задача 4 #14 ID 3962

Даны два прямых круговых конуса, основания которых – концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $2{,}5$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Задача 4 #15 ID 3961

Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{4}{3}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

999976293961

Задача 4 #16 ID 3960

Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{7}{4}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

999976293960

Задача 5

Задача 5 #17 ID 3963

Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 3a^2b^2$?

999976293963

Задача 5 #18 ID 3964

Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 2a^2b^2$?

999976293964

Задача 5 #19 ID 3965

Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 6a^2b^2$?

999976293965

Задача 5 #20 ID 3966

Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 5a^2b^2$?

999976293966

Задача 6

Задача 6 #21 ID 3967

При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{x+1}(3 - ax) > 0$ удовлетворяет неравенству $x^2 + \dfrac{2a-5}{2a}x - \dfrac{5}{2a} > 0$?

999976293967

Задача 6 #22 ID 3970

При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $x^2 + \left(3 - 2a^2\right)x - 2a^2 + 2 < 0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1-ax}(x+2) < 0$?

999976293970

Задача 6 #23 ID 3969

При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{1-x}(2 + ax) > 0$ удовлетворяет неравенству $x^2 + \dfrac{3-2a}{2a}x - \dfrac{3}{2a} > 0$?

999976293969

Задача 6 #24 ID 3968

При каком наибольшем значении параметра a каждое решение неравенства $8x^2 + \left(12 - 2a^2\right)x - a^2 + 4 < 0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1+ax}(2x+2) < 0$?

999976293968

Задача 7

Задача 7 #25 ID 3971

В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR – точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 10, S_{PTR} = 11, S_{RTL} = 12$?

999976293971

Задача 7 #26 ID 3974

В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR – точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 11, S_{PTR} = 12, S_{RTL} = 13$?

999976293974

Задача 7 #27 ID 3973

В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR – точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 12, S_{PTR} = 13, S_{RTL} = 14$?

999976293973

Задача 7 #28 ID 3972

В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR – точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 9, S_{PTR} = 10, S_{RTL} = 11$?

999976293972

Задача 8

Задача 8 #29 ID 3976

Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 3x + 2$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

999976293976

Задача 8 #30 ID 3979

Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 4x + 3$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

999976293979

Задача 8 #31 ID 3978

Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 2x + 1$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

999976293978

Задача 8 #32 ID 3977

Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2 + 5x + 4$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

999976293977

Задача 9

Задача 9 #33 ID 3980

Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 5, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 1. Найдите косинус угла ABD.

999976293980

Задача 9 #34 ID 3983

Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 6, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 2. Найдите косинус угла ABD.

999976293983

Задача 9 #35 ID 3982

> Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.
>
> 999976293982

Задача 9 #36 ID 3981

> Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 7, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.
>
> 999976293981

Задача 10

Задача 10 #37 ID 3984

> Каждый из 11 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 5 учеников – нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?
>
> 999976293984

Задача 10 #38 ID 3985

> Каждый из 12 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N (то есть каждое из чисел $1, 2, \ldots N$ записано в тетради хотя бы одного из них), а если взять любых 6 учеников – нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?
>
> 999976293985

Задача 10 #39 ID 3986

Каждый из 13 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N (то есть каждое из чисел $1, 2, \ldots N$ записано в тетради хотя бы одного из них), а если взять любых 5 учеников – нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

999976293986

Задача 10 #40 ID 3987

Каждый из 14 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N (то есть каждое из чисел $1, 2, \ldots N$ записано в тетради хотя бы одного из них), а если взять любых 6 учеников – нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

999976293987