МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

Ответ: 18.

Решение. Перемножая три уравнения системы и сокращая на ненулевое выражение xyz, получаем

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3),$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) = -9.$$

Сложив три уравнения системы, получаем, что $xy + yz + zx = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$, и, подставив в предыдущее равенство, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) = -9$, откуда

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 = 18.$$

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

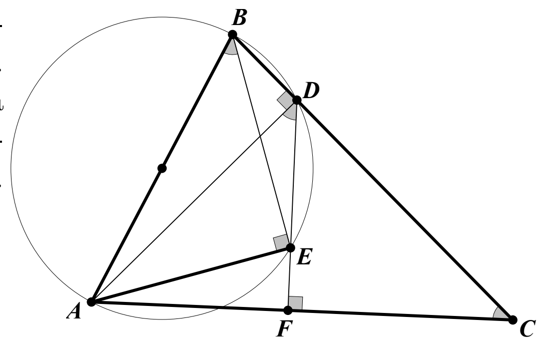
Ответ: 79 999.

Решение. Число n равно $10^{40\,000} - 1$. Тогда $n^3 = (10^{40\,000} - 1)^3 = 10^{120\,000} - 3 \cdot 10^{80\,000} + 3 \cdot 10^{40\,000} - 1$. Выполняя арифметические операции, получаем число

$$\underbrace{99\ldots9}_{39\,999}7\underbrace{00\ldots0}_{39\,999}2\underbrace{99\ldots9}_{40\,000}.$$

В нём два «участка» из 39 999 и 40 000 девяток соответственно. Итого 79 999 девяток.

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.



Ответ: $\dfrac{55}{18}$.

Решение. Углы ABE и ADE равны как вписанные в окружность ω и опирающиеся на дугу AE. Кроме того,

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle DAF = \angle ACD.$$

Значит, $\angle ABE = \angle ADF = \angle ACD$ (обозначим этот угол через α). Но тогда треугольники ABE, ADF, ACD — прямоугольные и имеют равные острые углы, следовательно, они подобны.

Из треугольника ABE получаем, что $\cos\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{6}$. Далее находим:

$$CD = AC\cos\alpha \quad (\text{из } \triangle ACD);$$
$$CF = CD\cos\alpha = AC\cos^2\alpha = 10\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{18} \quad (\text{из } \triangle CDF).$$

Значит, $AF = AC - CF = 10 - \frac{125}{18} = \frac{55}{18}$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

Ответ: 2.

Решение. Пусть всего коробок N. Вычислим первоначальную вероятность выигрыша. Общее количество исходов эксперимента равно количеству способов выбрать 5 различных коробок из N, то есть C_N^5. Количество благоприятных исходов равно C_{N-3}^2: должны быть выбраны все три коробки с шариками и любые две из $(N-3)$ оставшихся. Значит, вероятность выигрыша равна

$$P_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{(N-5)!\,2!} : \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{N(N-1)(N-2)}.$$

Аналогично находим, что если разрешают открыть шесть коробок, вероятность выигрыша равна

$$P_2 = \frac{C_{N-3}^3}{C_N^6} = \frac{6\cdot5\cdot4}{N(N-1)(N-2)}.$$

Следовательно, вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{P_2}{P_1} = \frac{6\cdot5\cdot4}{5\cdot4\cdot3} = 2$ раза.

Замечание. Можно посчитать вероятность и иначе. Без ограничения общности можно считать, что игрок выбрал первые пять коробок из N. Разместим три шара по коробкам случайным образом. Общее количество способов это сделать равно C_N^3, а количество выигрышных вариантов равно C_5^3 (все три шара должны быть в первых пяти коробках). Значит, первоначальная вероятность выигрыша равна $C_5^3 : C_N^3$. Аналогично, вероятность выигрыша, когда разрешают открыть шесть коробок, равна $C_6^3 : C_N^3$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.

Ответ: 4.

Решение. Так как сумма пятого и шестого члена арифметической прогрессии равна сумме третьего и восьмого членов этой же прогрессии, то из теоремы Виета, примененной к данным квадратным уравнениям, получаем равенство $a^2 - a = \frac{a^3-a^2}{4}$. Раскладывая на множители обе части и перенося всё в одну сторону, получаем $\frac{1}{4}a(a-1)(a-4) = 0$, поэтому a может быть равно только 0, 1 и 4.

Пусть x_n – n-ый член арифметической прогрессии с разностью d. Если $a = 0$, то корнями первого уравнения являются числа $\pm\sqrt{5}$, а второго – ±1. Поэтому $|d| = |x_6 - x_5| = 2\sqrt{5}$ и $5|d| = |x_8 - x_3| = 2$, чего быть не может, то есть $a = 0$ не подходит.

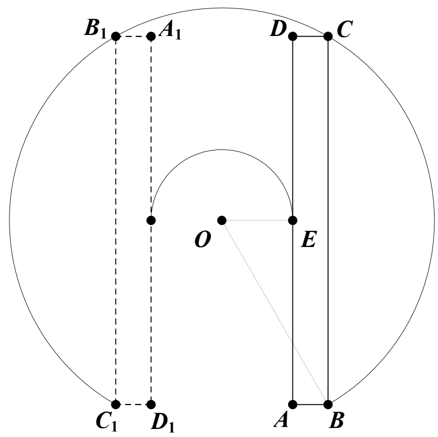
Если $a = 1$, то корнями первого уравнения являются числа ±2, а второго – $\pm\frac{1}{2}$. Поэтому $|d| = |x_6 - x_5| = 4$ и $5|d| = |x_8 - x_3| = 1$, чего быть не может, то есть $a = 1$ также не подходит.

Теперь рассмотрим случай $a = 4$. Первое уравнение записывается в виде $x^2 - 12x - 1 = 0$, а его корнями являются числа $6 \pm \sqrt{37}$. Второе уравнение после сокращения на 4 имеет вид $x^2 - 12x - 889 = 0$, а его корнями являются числа $6 \pm 5\sqrt{37}$. Эти числа являются членами арифметической прогрессии с $x_5 = 6 - \sqrt{37}$ и $d = 2\sqrt{37}$, поэтому $a = 4$ подходит.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

Ответ: $252\pi - 27\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $u = y - 20$, $v = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$. Тогда первое неравенство имеет вид $|u+v|+|u-v| \leqslant 8$.



Если пара (u, v) удовлетворяет данному неравенству, то и пары $(-u, v)$, $(u, -v)$, $(-u, -v)$ также ему удовлетворяют, поэтому на координатной плоскости неравенство задаёт множество, симметричное как относительно обеих координатных осей, так и относительно начала координат. Но при положительных u, v неравенство эквивалентно $u + v + |u - v| \leqslant 8$, то есть $2u \leqslant 8$ при $u \geqslant v$ и $2v \leqslant 8$ при $u \leqslant v$. В итоге получаем, что неравенство $|u+v| + |u-v| \leqslant 8$ определяет квадрат $-4 \leqslant u \leqslant 4$, $-4 \leqslant v \leqslant 4$. Значит, после обратной замены приходим к тому, что фигура Φ — прямоугольник с центром в точке $\left(\frac{15}{2}; 0\right)$, стороны которого лежат на прямых $x = 6, x = 9, y = \pm 9\sqrt{3}$.
Множество M, которое замела фигура Φ, изображено на рисунке. По теореме Пифагора находим $OE = 6$, $OB = 18$, откуда $\cos\angle BOE = \frac{OE+AB}{OB} = \frac{1}{2}$, то есть $\angle BOE = 60^\circ$.
Искомая площадь множества M складывается из разности площадей двух полукругов $\frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2)$, площади прямоугольника $ABCD$ и площади сегмента с меньшей дугой BC (две половины равных прямоугольников и равных сегментов не попадают в разность полукругов). В итоге получаем

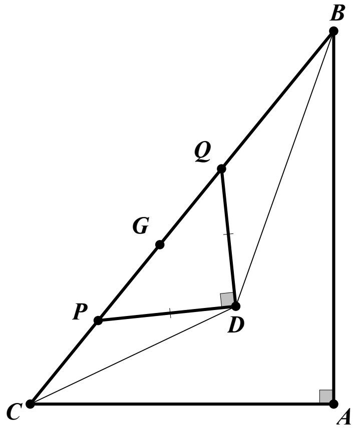
$$S = \frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2) + AB \cdot CD + \left(\frac{\pi}{3}OB^2 - \frac{1}{2}OB^2 \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(18^2 - 6^2) + 3 \cdot 18\sqrt{3} + \left(\frac{\pi}{3}18^2 - \frac{1}{2}18^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 252\pi - 27\sqrt{3}.$$

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.

Ответ: 25°.

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Тогда $PQ = BP - BQ = AB - (BC - CQ) = AB - BC + AC = c - a + b = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть G — точка касания вписанной окружности с гипотенузой BC. Исходя из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, можно получить, что $BG = p - AC = \frac{a+c-b}{2}$. Тогда $PG = BP - BG = c - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b+c-a}{2}$. Значит, G — середина PQ, $GP = GQ = r$.



Треугольник DPQ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $DG = \frac{1}{2}PQ = r$. Это означает, что D — центр вписанной окружности в треугольник ABC, то есть точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 135^\circ$. Поэтому $\angle DBC = 180^\circ - 135^\circ - \angle DCB = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

Ответ: 8.

Решение. Перемножая три уравнения системы и сокращая на ненулевое выражение xyz, получаем

$$xyz = (x-2)(y-2)(z-2),$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$(xy + yz + zx) - 2(x + y + z) = -4.$$

Сложив три уравнения системы, получаем, что $xy+yz+zx = -2(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$, и, подставив в предыдущее равенство, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) = -4$, откуда

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) + 12 = 8.$$

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

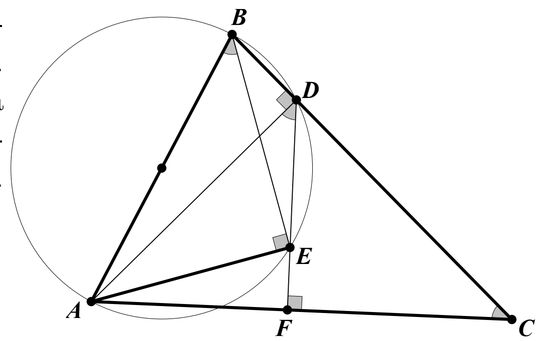
Ответ: 60 001.

Решение. Число n равно $10^{30\,001} - 1$. Тогда $n^3 = (10^{30\,001} - 1)^3 = 10^{90\,003} - 3 \cdot 10^{60\,002} + 3 \cdot 10^{30\,001} - 1$. Выполняя арифметические операции, получаем число

$$\underbrace{99\ldots9}_{30\,000}7\underbrace{00\ldots0}_{30\,000}2\underbrace{99\ldots9}_{30\,001}.$$

В нём два «участка» из 30 000 и 30 001 девяток соответственно. Итого 60 001 девяток.

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.



Ответ: $\dfrac{35}{8}$.

Решение. Углы ABE и ADE равны как вписанные в окружность ω и опирающиеся на дугу AE. Кроме того,

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle DAF = \angle ACD.$$

Значит, $\angle ABE = \angle ADF = \angle ACD$ (обозначим этот угол через α). Но тогда треугольники ABE, ADF, ACD — прямоугольные и имеют равные острые углы, следовательно, они подобны.

Из треугольника ABE получаем, что $\cos\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{3}{4}$. Далее находим:

$$CD = AC\cos\alpha \quad (\text{из } \triangle ACD);$$
$$CF = CD\cos\alpha = AC\cos^2\alpha = 10\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{16} \quad (\text{из } \triangle CDF).$$

Значит, $AF = AC - CF = 10 - \frac{90}{16} = \frac{35}{8}$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

Ответ: 3,5.

Решение. Пусть всего коробок N. Вычислим первоначальную вероятность выигрыша. Общее количество исходов эксперимента равно количеству способов выбрать 5 различных коробок из N, то есть C_N^5. Количество благоприятных исходов равно C_{N-3}^2: должны быть выбраны все три коробки с шариками и любые две из $(N-3)$ оставшихся. Значит, вероятность выигрыша равна

$$P_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{(N-5)!\,2!} : \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{N(N-1)(N-2)}.$$

Аналогично находим, что если разрешают открыть семь коробок, вероятность выигрыша равна

$$P_2 = \frac{C_{N-3}^4}{C_N^7} = \frac{7\cdot6\cdot5}{N(N-1)(N-2)}.$$

Следовательно, вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{P_2}{P_1} = \frac{7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3} = \frac{7}{2}$ раз.

Замечание. Можно посчитать вероятность и иначе. Без ограничения общности можно считать, что игрок выбрал первые пять коробок из N. Разместим три шара по коробкам случайным образом. Общее количество способов это сделать равно C_N^3, а количество выигрышных вариантов равно C_5^3 (все три шара должны быть в первых пяти коробках). Значит, первоначальная вероятность выигрыша равна $C_5^3 : C_N^3$. Аналогично, вероятность выигрыша, когда разрешают открыть семь коробок, равна $C_7^3 : C_N^3$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2-2a)x + {}$ ${}+a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

Ответ: 3.

Решение. Так как сумма шестого и седьмого члена арифметической прогрессии равна сумме четвертого и девятого членов этой же прогрессии, то из теоремы Виета, примененной к данным квадратным уравнениям, получаем равенство $a^2 - 2a = \frac{a^3-2a^2}{3}$. Раскладывая на множители обе части и перенося всё в одну сторону, получаем $\frac{1}{3}a(a-2)(a-3) = 0$, поэтому a может быть равно только 0, 2 и 3.

Пусть x_n – n-ый член арифметической прогрессии с разностью d. Если $a=0$, то у второго уравнения нет действительных корней, то есть $a = 0$ не подходит.

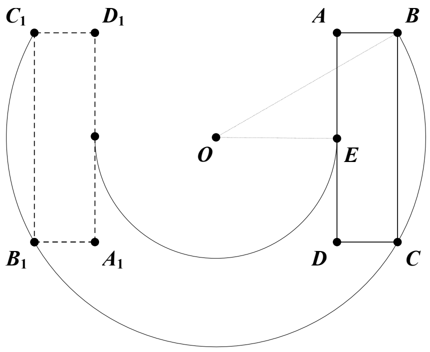
Если $a = 2$, то корнями первого уравнения являются числа $\pm\sqrt{5}$, а второго – $\pm\sqrt{\frac{26}{3}}$. Поэтому $|d| = |x_7 - x_6| = 2\sqrt{5}$ и $5|d| = |x_9 - x_4| = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$, чего быть не может, то есть $a = 2$ также не подходит.

Теперь рассмотрим случай $a = 3$. Первое уравнение записывается в виде $x^2 - 3x - 1 = 0$, а его корнями являются числа $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. Второе уравнение после сокращения на 3 имеет вид $x^2 - 3x - 79 = 0$, а его корнями являются числа $\frac{3\pm5\sqrt{13}}{2}$. Эти числа являются членами арифметической прогрессии с $x_6=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ и $d=\sqrt{13}$, поэтому $a=3$ подходит.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\left|x-10+\frac{y}{2\sqrt{3}}\right|+\left|x-10-\frac{y}{2\sqrt{3}}\right|\leqslant 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

Ответ: $96\pi-16\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $u=x-10$, $v=\dfrac{y}{2\sqrt{3}}$. Тогда первое неравенство имеет вид $|u+v|+|u-v|\leqslant 4$.



Если пара (u,v) удовлетворяет данному неравенству, то и пары $(-u,v)$, $(u,-v)$, $(-u,-v)$ также ему удовлетворяют, поэтому на координатной плоскости неравенство задаёт множество, симметричное как относительно обеих координатных осей, так и относительно начала координат. Но при положительных u,v неравенство эквивалентно $u+v+|u-v|\leqslant 4$, то есть $2u\leqslant 4$ при $u\geqslant v$ и $2v\leqslant 4$ при $u\leqslant v$. В итоге получаем, что неравенство $|u+v|+|u-v|\leqslant 4$ определяет квадрат $-2\leqslant u\leqslant 2$, $-2\leqslant v\leqslant 2$. Значит, после обратной замены приходим к тому, что фигура Φ — прямоугольник с центром в точке $(10;0)$, стороны которого лежат на прямых $x=8, x=12, y=\pm4\sqrt{3}$.
Множество M, которое замела фигура Φ, изображено на рисунке.
По теореме Пифагора находим $OE=8$, $OB=8\sqrt{3}$, откуда $\cos\angle BOE=\frac{OE+AB}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\angle BOE=30^\circ$. Искомая площадь множества M складывается из разности площадей двух полукругов $\frac{\pi}{2}(OB^2-OE^2)$, площади прямоугольника $ABCD$ и площади сегмента с меньшей дугой BC (две половины равных прямоугольников и равных сегментов не попадают в разность полукругов). В итоге получаем

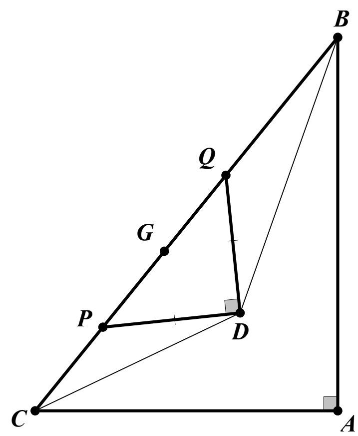
$$S=\frac{\pi}{2}(OB^2-OE^2)+AB\cdot CD+\left(\frac{\pi}{6}OB^2-\frac{1}{2}OB^2\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left((8\sqrt{3})^2-8^2\right)+4\cdot8\sqrt{3}+\left(\frac{\pi}{6}(8\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}(8\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=96\pi-16\sqrt{3}.$$

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB=BP$, $AC=CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP=DQ$, а $\angle PDQ=90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA=50^\circ$.

Ответ: 20°.

Решение. Пусть $AC=b$, $AB=c$, $BC=a$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Тогда $PQ=BP-BQ=AB-(BC-CQ)=AB-BC+AC=c-a+b=2r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть G — точка касания вписанной окружности с гипотенузой BC. Исходя из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, можно получить, что $BG=p-AC=\frac{a+c-b}{2}$. Тогда $PG=BP-BG=c-\frac{a+c-b}{2}=\frac{b+c-a}{2}$. Значит, G — середина PQ, $GP=GQ=r$.



Треугольник DPQ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $DG=\frac{1}{2}PQ=r$. Это означает, что D — центр вписанной окружности в треугольник ABC, то есть точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=135^\circ$. Поэтому $\angle DBC=180^\circ-135^\circ-\angle DCB=45^\circ-25^\circ=20^\circ$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

Ответ: 32.

Решение. Перемножая три уравнения системы и сокращая на ненулевое выражение xyz, получаем

$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4),$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) = -16.$$

Сложив три уравнения системы, получаем, что $xy + yz + zx = 4(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$, и, подставив в предыдущее равенство, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) = -16$, откуда

$$(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8(x + y + z) + 48 = 32.$$

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

Ответ: 49 999.

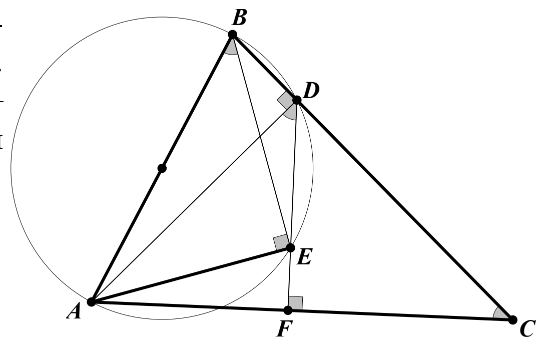
Решение. Число n равно $10^{25\,000} - 1$. Тогда $n^3 = (10^{25\,000} - 1)^3 = 10^{75\,000} - 3 \cdot 10^{50\,000} + 3 \cdot 10^{25\,000} - 1$. Выполняя арифметические операции, получаем число

$$\underbrace{99\ldots9}_{24\,999}7\underbrace{00\ldots0}_{24\,999}2\underbrace{99\ldots9}_{25\,000}.$$

В нём два «участка» из 24 999 и 25 000 девяток соответственно. Итого 49 999 девяток.

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 20$, $AB = 15$, $BE = 10$.

Ответ: $\dfrac{100}{9}$.



Решение. Углы ABE и ADE равны как вписанные в окружность ω и опирающиеся на дугу AE. Кроме того,

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle DAF = \angle ACD.$$

Значит, $\angle ABE = \angle ADF = \angle ACD$ (обозначим этот угол через α). Но тогда треугольники ABE, ADF, ACD — прямоугольные и имеют равные острые углы, следовательно, они подобны.

Из треугольника ABE получаем, что $\cos\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{3}$. Далее находим:

$$CD = AC\cos\alpha \quad (\text{из } \triangle ACD);$$

$$CF = CD\cos\alpha = AC\cos^2\alpha = 20\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{80}{9} \quad (\text{из } \triangle CDF).$$

Значит, $AF = AC - CF = 20 - \frac{80}{9} = \frac{19}{5}$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

Ответ: 5,6.

Решение. Пусть всего коробок N. Вычислим первоначальную вероятность выигрыша. Общее количество исходов эксперимента равно количеству способов выбрать 5 различных коробок из N, то есть C_N^5. Количество благоприятных исходов равно C_{N-3}^2: должны быть выбраны все три коробки с шариками и любые две из $(N-3)$ оставшихся. Значит, вероятность выигрыша равна

$$P_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{(N-5)!\,2!} : \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{N(N-1)(N-2)}.$$

Аналогично находим, что если разрешают открыть восемь коробок, вероятность выигрыша равна

$$P_2 = \frac{C_{N-3}^5}{C_N^8} = \frac{8\cdot7\cdot6}{N(N-1)(N-2)}.$$

Следовательно, вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{P_2}{P_1} = \frac{8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3} = \frac{28}{5}$ раз.
Замечание. Можно посчитать вероятность и иначе. Без ограничения общности можно считать, что игрок выбрал первые пять коробок из N. Разместим три шара по коробкам случайным образом. Общее количество способов это сделать равно C_N^3, а количество выигрышных вариантов равно C_5^3 (все три шара должны быть в первых пяти коробках). Значит, первоначальная вероятность выигрыша равна $C_5^3 : C_N^3$. Аналогично, вероятность выигрыша, когда разрешают открыть восемь коробок, равна $C_8^3 : C_N^3$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$ являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$ являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

Ответ: 2.

Решение. Так как сумма четвертого и пятого члена арифметической прогрессии равна сумме второго и седьмого членов этой же прогрессии, то из теоремы Виета, примененной к данным квадратным уравнениям, получаем равенство $a^2 - a = \frac{a^3-a^2}{2}$. Раскладывая на множители обе части и перенося всё в одну сторону, получаем $\frac{1}{2}a(a-1)(a-2) = 0$, поэтому a может быть равно только 0, 1 и 2.

Пусть x_n – n-ый член арифметической прогрессии с разностью d. Если $a = 0$, то у первого уравнения нет действительных корней, то есть $a = 0$ не подходит.

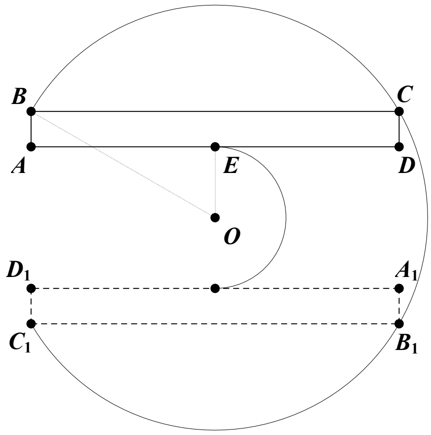
Если $a = 1$, то у первого уравнения нет действительных корней, то есть $a = 1$ также не подходит.

Теперь рассмотрим случай $a = 2$. Первое уравнение записывается в виде $x^2 - 2x - 2 = 0$, а его корнями являются числа $1 \pm \sqrt{3}$. Второе уравнение после сокращения на 2 имеет вид $x^2 - 2x - 74 = 0$, а его корнями являются числа $1 \pm 5\sqrt{3}$. Эти числа являются членами арифметической прогрессии с $x_4 = 1 - \sqrt{3}$ и $d = 2\sqrt{3}$, поэтому $a = 2$ подходит.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\left|y-15+\frac{x}{6\sqrt{3}}\right|+\left|y-15-\frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leqslant 6$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

Ответ: $1008\pi-108\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $u=y-15$, $v=\dfrac{x}{6\sqrt{3}}$. Тогда первое неравенство имеет вид $|u+v|+|u-v| \leqslant 6$.



Если пара (u,v) удовлетворяет данному неравенству, то и пары $(-u,v)$, $(u,-v)$, $(-u,-v)$ также ему удовлетворяют, поэтому на координатной плоскости неравенство задаёт множество, симметричное как относительно обеих координатных осей, так и относительно начала координат. Но при положительных u,v неравенство эквивалентно $u+v+|u-v| \leqslant 6$, то есть $2u \leqslant 6$ при $u \geqslant v$ и $2v \leqslant 6$ при $u \leqslant v$. В итоге получаем, что неравенство $|u+v|+|u-v| \leqslant 6$ определяет квадрат $-3 \leqslant u \leqslant 3$, $-3 \leqslant v \leqslant 3$. Значит, после обратной замены приходим к тому, что фигура Φ — прямоугольник с центром в точке $(0;15)$, стороны которого лежат на прямых $x=\pm 18\sqrt{3}, y=12, y=18$.
Множество M, которое замела фигура Φ, изображено на рисунке. По теореме Пифагора находим $OE=12$, $OB=36$, откуда $\cos\angle BOE=\frac{OE+AB}{OB}=\frac{1}{2}$, то есть $\angle BOE=60^\circ$.
Искомая площадь множества M складывается из разности площадей двух полукругов $\frac{\pi}{2}(OB^2-OE^2)$, площади прямоугольника $ABCD$ и площади сегмента с меньшей дугой BC (две половины равных прямоугольников и равных сегментов не попадают в разность полукругов). В итоге получаем

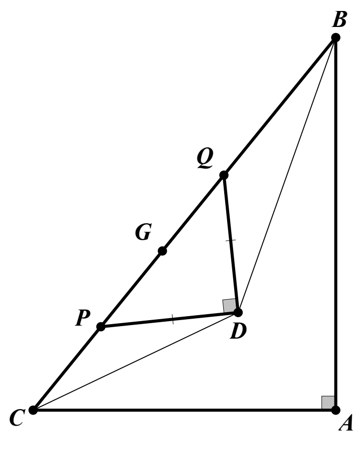
$$S=\frac{\pi}{2}(OB^2-OE^2)+AB\cdot CD+\left(\frac{\pi}{3}OB^2-\frac{1}{2}OB^2\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(36^2-12^2)+6\cdot 36\sqrt{3}+\left(\frac{\pi}{3}36^2-\frac{1}{2}36^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1008\pi-108\sqrt{3}.$$

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB=BP$, $AC=CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP=DQ$, а $\angle PDQ=90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle DBC=35^\circ$.

Ответ: 10°.

Решение. Пусть $AC=b$, $AB=c$, $BC=a$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Тогда $PQ=BP-BQ=AB-(BC-CQ)=AB-BC+AC=c-a+b=2r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть G — точка касания вписанной окружности с гипотенузой BC. Исходя из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, можно получить, что $BG=p-AC=\frac{a+c-b}{2}$. Тогда $PG=BP-BG=c-\frac{a+c-b}{2}=\frac{b+c-a}{2}$. Значит, G — середина PQ, $GP=GQ=r$.



Треугольник DPQ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $DG=\frac{1}{2}PQ=r$. Это означает, что D — центр вписанной окружности в треугольник ABC, то есть точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=135^\circ$. Поэтому $\angle DBC=180^\circ-135^\circ-\angle DCB=45^\circ-35^\circ=10^\circ$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

Ответ: 72.

Решение. Перемножая три уравнения системы и сокращая на ненулевое выражение xyz, получаем

$$xyz = (x-6)(y-6)(z-6),$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем

$$(xy + yz + zx) - 6(x + y + z) = -36.$$

Сложив три уравнения системы, получаем, что $xy+yz+zx = -6(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$, и, подставив в предыдущее равенство, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 - 12(x + y + z) = -36$, откуда

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 12(x + y + z) + 108 = 72.$$

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

Ответ: 40 001.

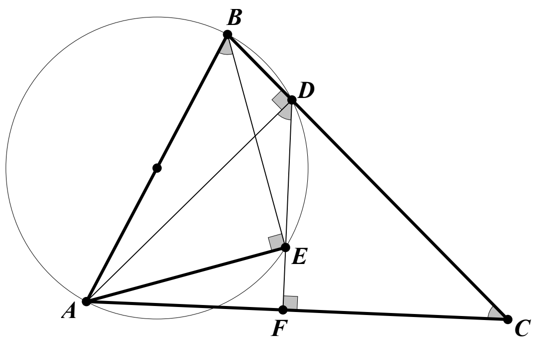
Решение. Число n равно $10^{20\,001} - 1$. Тогда $n^3 = (10^{20\,001} - 1)^3 = 10^{60\,003} - 3 \cdot 10^{40\,002} + 3 \cdot 10^{20\,001} - 1$. Выполняя арифметические операции, получаем число

$$\underbrace{99\ldots9}_{20\,000}7\underbrace{00\ldots0}_{20\,000}2\underbrace{99\ldots9}_{20\,001}.$$

В нём два «участка» из 20 000 и 20 001 девяток соответственно. Итого 40 001 девятка.

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

Ответ: $\frac{19}{5}$.



Решение. Углы ABE и ADE равны как вписанные в окружность ω и опирающиеся на дугу AE. Кроме того,

$$\angle ADF = 90^\circ - \angle DAF = \angle ACD.$$

Значит, $\angle ABE = \angle ADF = \angle ACD$ (обозначим этот угол через α). Но тогда треугольники ABE, ADF, ACD — прямоугольные и имеют равные острые углы, следовательно, они подобны.

Из треугольника ABE получаем, что $\cos\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{9}{10}$. Далее находим:

$$CD = AC\cos\alpha \quad (\text{из } \triangle ACD);$$
$$CF = CD\cos\alpha = AC\cos^2\alpha = 20\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{5} \quad (\text{из } \triangle CDF).$$

Значит, $AF = AC - CF = 20 - \frac{81}{5} = \frac{19}{5}$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

Ответ: 8,4.

Решение. Пусть всего коробок N. Вычислим первоначальную вероятность выигрыша. Общее количество исходов эксперимента равно количеству способов выбрать 5 различных коробок из N, то есть C_N^5. Количество благоприятных исходов равно C_{N-3}^2: должны быть выбраны все три коробки с шариками и любые две из $(N-3)$ оставшихся. Значит, вероятность выигрыша равна

$$P_1 = \frac{C_{N-3}^2}{C_N^5} = \frac{(N-3)!}{(N-5)!\,2!} : \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{N(N-1)(N-2)}.$$

Аналогично находим, что если разрешают открыть девять коробок, вероятность выигрыша равна

$$P_2 = \frac{C_{N-3}^6}{C_N^9} = \frac{9\cdot8\cdot7}{N(N-1)(N-2)}.$$

Следовательно, вероятность выигрыша увеличилась в $\frac{P_2}{P_1} = \frac{9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3} = \frac{42}{5}$ раз.

Замечание. Можно посчитать вероятность и иначе. Без ограничения общности можно считать, что игрок выбрал первые пять коробок из N. Разместим три шара по коробкам случайным образом. Общее количество способов это сделать равно C_N^3, а количество выигрышных вариантов равно C_5^3 (все три шара должны быть в первых пяти коробках). Значит, первоначальная вероятность выигрыша равна $C_5^3 : C_N^3$. Аналогично, вероятность выигрыша, когда разрешают открыть девять коробок, равна $C_9^3 : C_N^3$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2-(a^2-4a)x+a^2-$ $-6a+4=0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2-(a^3-4a^2)x-2a^3-6a-15=0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

Ответ: 5.

Решение. Так как сумма шестого и седьмого члена арифметической прогрессии равна сумме пятого и восьмого членов этой же прогрессии, то из теоремы Виета, примененной к данным квадратным уравнениям, получаем равенство $a^2-4a = \frac{a^3-4a^2}{5}$. Раскладывая на множители обе части и перенося всё в одну сторону, получаем $\frac{1}{5}a(a-4)(a-5)=0$, поэтому a может быть равно только 0, 4 и 5.

Пусть x_n – n-ый член арифметической прогрессии с разностью d. Если $a=0$, то у первого уравнения нет действительных корней, то есть $a=0$ не подходит.

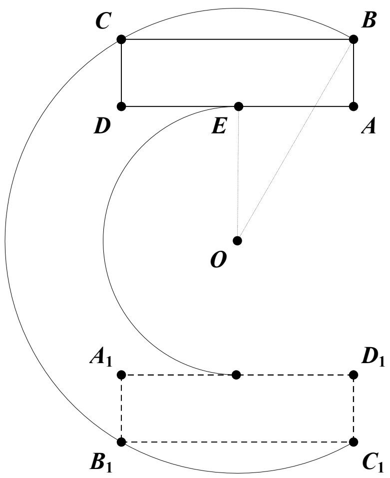
Если $a=4$, то корнями первого уравнения являются числа ±2, а второго – $\pm\sqrt{\frac{168}{5}}$. Поэтому $|d| = |x_7-x_6| = 4$ и $3|d| = |x_8-x_5| = 2\sqrt{\frac{168}{5}}$, чего быть не может, то есть $a=4$ также не подходит.

Теперь рассмотрим случай $a = 5$. Первое уравнение записывается в виде $x^2 - 5x - 1 = 0$, а его корнями являются числа $\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$. Второе уравнение после сокращения на 5 имеет вид $x^2 - 5x - 59 = 0$, а его корнями являются числа $\frac{5\pm3\sqrt{29}}{2}$. Эти числа являются членами арифметической прогрессии с $x_6 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ и $d = \sqrt{29}$, поэтому $a = 5$ подходит.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

Ответ: $384\pi - 64\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем замену $u = y - 20$, $v = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$. Тогда первое неравенство имеет вид $|u+v|+|u-v| \leqslant 8$.



Если пара (u, v) удовлетворяет данному неравенству, то и пары $(-u, v)$, $(u, -v)$, $(-u, -v)$ также ему удовлетворяют, поэтому на координатной плоскости неравенство задаёт множество, симметричное как относительно обеих координатных осей, так и относительно начала координат. Но при положительных u, v неравенство эквивалентно $u+v+|u-v| \leqslant 8$, то есть $2u \leqslant 8$ при $u \geqslant v$ и $2v \leqslant 8$ при $u \leqslant v$. В итоге получаем, что неравенство $|u + v| + |u - v| \leqslant 8$ определяет квадрат $-4 \leqslant u \leqslant 4$, $-4 \leqslant v \leqslant 4$. Значит, после обратной замены приходим к тому, что фигура Φ — прямоугольник с центром в точке $(0; 20)$, стороны которого лежат на прямых $x = \pm 8\sqrt{3}, y = 16, y = 24$.

Множество M, которое замела фигура Φ, изображено на рисунке. По теореме Пифагора находим $OE = 16$, $OB = 16\sqrt{3}$, откуда $\cos\angle BOE = \frac{OE+AB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $\angle BOE = 30°$. Искомая площадь множества M складывается из разности площадей двух полукругов $\frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2)$, площади прямоугольника $ABCD$ и площади сегмента с меньшей дугой BC (две половины равных прямоугольников и равных сегментов не попадают в разность полукругов). В итоге получаем

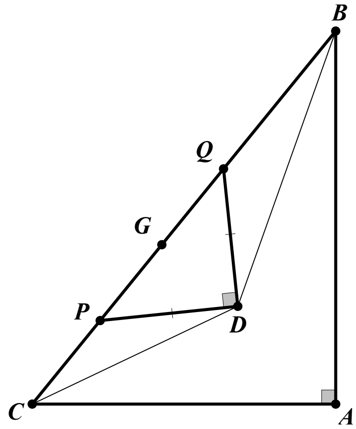
$$S = \frac{\pi}{2}(OB^2 - OE^2) + AB \cdot CD + \left(\frac{\pi}{6}OB^2 - \frac{1}{2}OB^2 \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left((16\sqrt{3})^2 - 16^2\right) + 8 \cdot 16\sqrt{3} + \left(\frac{\pi}{6}(16\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}(16\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 384\pi - 64\sqrt{3}.$$

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90°$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46°$.

Ответ: $22°$.

Решение. Пусть $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Тогда $PQ = BP - BQ = AB - (BC - CQ) = AB - BC + AC = c - a + b = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть G — точка касания вписанной окружности с гипотенузой BC. Исходя из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, можно получить, что $BG = p - AC = \frac{a+c-b}{2}$. Тогда $PG = BP - BG = c - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b+c-a}{2}$. Значит, G — середина PQ, $GP = GQ = r$.



Треугольник DPQ — прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $DG = \frac{1}{2}PQ = r$. Это означает, что D — центр вписанной окружности в треугольник ABC, то есть точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, $\angle BDC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 135°$. Поэтому $\angle DBC = 180° - 135° - \angle DCB = 45° - 23° = 22°$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

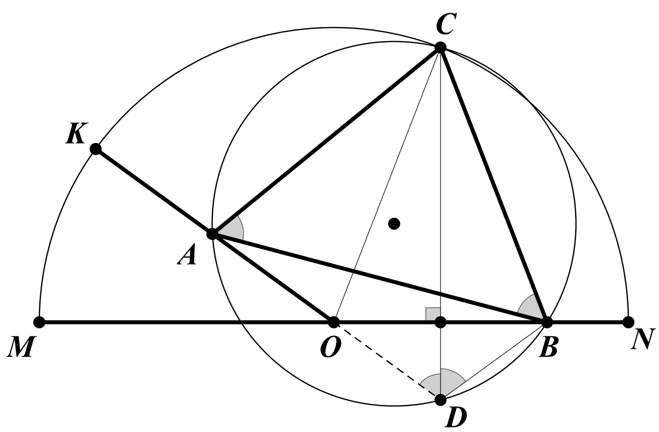
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K. Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите отношение площади сектора MOK к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 72°$.

Ответ: 0,2.

Решение. Опишем окружность ω около ΔABC и проведём OC. Из условия $AC = BC = OC$. Построим серединный перпендикуляр ℓ к отрезку OB. Пусть он пересекает ω в точке D.



Соединим точку D с точками O и B. Так как ΔOCB — равнобедренный, $C \in \ell$. Кроме того, $OD = BD$. Обозначим $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$. По теореме о вписанном угле $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$. Заметим, что OC — прямая, содержащая высоту равнобедренного ΔODB, поэтому она содержит биссектрису, а значит, $\angle ODC = \alpha = \angle ABC$. Поэтому точки A, O, D лежат на одной прямой, откуда $\angle MOK = \angle BOD = 90° - \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника $2\alpha + 72° = 180°$, откуда $\alpha = 54°$, а $\angle MOK = \dfrac{72°}{2} = 36°$. Отношение площади сектора к площади полукруга равно $\dfrac{S_{\text{сект}}}{S_{\text{полукр}}} = \dfrac{36°}{180°} = 0{,}2$.

Замечание. Равенство $\angle MOK = \dfrac{1}{2}\angle ACB$ можно было доказать следующим образом. Построим вспомогательную окружность с центром в точке C и радиусом AC. Тогда по теореме о вписанном и центральном угле $2\angle BAO = \angle BCO$ и $2\angle ABO = \angle BCO$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle MOK = \angle OAB + \angle OBA = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a;b) = 7|a-b|, \\ 7 \cdot \max(a;b) = 8\big(\text{НОД}(a;b)\big)^2 - 64. \end{cases}$$

Ответ: $(64;56)$, $(56;64)$.

Решение. Исходная система симметрична относительно a и b: если $(a;b)$ — решение, то и $(b;a)$ — решение. Тогда без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$.

Для $a \geqslant b$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} b = 7(a-b), \\ 7a = 8\big(\text{НОД}(a;b)\big)^2 - 64. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения системы получаем, что $7a = 8b$. Поэтому a делится на 8, а b делится на 7. Обозначим $a = 8k$. Тогда $b = 7k$, а $\text{НОД}(a;b) = k$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получаем

$$7 \cdot 8k = 8k^2 - 64 \iff k^2 - 7k - 8 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &k = -1, \\ &k = 8. \end{aligned}\right.$$

Поскольку a и b — натуральные числа, подходит только $k = 8$. Этому значению k соответствует пара чисел $(a; b) = (64; 56)$. Исходная система также имеет решение $(56; 64)$.

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y + 3 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - y}} > y^2 + 12y.$$

Ответ: $(0; -2)$, $(-1; -12)$, $(0; -3)$.

Решение. Сумма подкоренных выражений равна 2. Так как x и y — целые, каждое из чисел $y+3-10x$ и $10x - 1 - y$ тоже целое. За счёт области определения получаются ограничения $y + 3 - 10x \geqslant 0$ и $10x - 1 - y > 0$. Поэтому левая часть определена в двух случаях:

$$\text{при } \begin{cases} y + 3 - 10x = 1, \\ 10x - 1 - y = 1 \end{cases} \quad \text{и при } \begin{cases} y + 3 - 10x = 0, \\ 10x - 1 - y = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим эти два случая по очереди.

- В первом случае $y = 10x - 2$, а исходное неравенство принимает вид $y^2 + 12y < 2$, откуда $y \in \left[-6 - \sqrt{38}; -6 + \sqrt{38}\right]$. Так как $y \in \mathbb{Z}$, то $-12 \leqslant y \leqslant 0$. Значит, $-12 \leqslant 10x - 2 \leqslant 0$, откуда $x = -1$ или $x = 0$. Соответствующие значения y — это $y = -12$ и $y = -2$.
- Аналогично, во втором случае $y = 10x - 3$, а неравенство имеет вид $y^2 + 12y < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Учитывая, что $y \in \mathbb{Z}$, также получаем, что $y \in [-12; 0]$. Тогда $-12 \leqslant 10x - 3 \leqslant 0$. В этом случае подходит единственное значение $x = 0$, откуда $y = -3$.

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z, что выражения

$$\frac{x(y - z)}{y(z - x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z - x)}{z(y - x)}$$

принимают одно и то же значение A. Найдите все возможные значения A, если известно, что их не менее двух.

Ответ: $A = -2$ или $A = 1$.

Решение. Обозначим $A = \frac{x(y-z)}{y(z-x)} = \frac{2y(z-x)}{z(y-x)}$. Рассмотрим выражение $A - \frac{2}{A}$:

$$A - \frac{2}{A} = \frac{x(y - z)}{y(z - x)} - 2 \cdot \frac{z(y - x)}{2y(z - x)} = \frac{x(y - z) + z(x - y)}{y(z - x)} = \frac{xy - xz + xz - yz}{zy - yx} = -1.$$

Поэтому A удовлетворяет квадратному уравнению $A^2 + A - 2 = 0$, откуда $A = 1$ или $A = -2$. Так как в условии сказано, что A может принимать по крайней мере два различных значения, оба случая возможны.

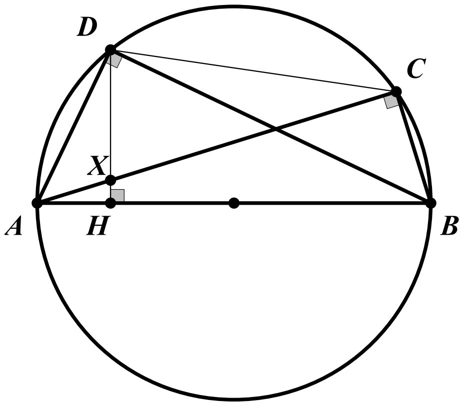
5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB, а H — ортогональная проекция точки D на AB. Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X. Найдите CD, если $DX = 20$, $AX = 15$, $CX = 36$.

Ответ: $4\sqrt{85}$.

Решение. Треугольник ADB является прямоугольным с прямым углом ADB, опирающимся на диаметр AB. Поэтому

$$AD^2 = AH \cdot AB. \tag{4}$$

Угол ACB также опирается на диаметр AB, поэтому он прямой. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники AXH и ABC подобны, следовательно



$$\frac{AH}{AX} = \frac{AC}{AB} \quad \Longleftrightarrow \quad AH \cdot AB = AX \cdot AC. \tag{5}$$

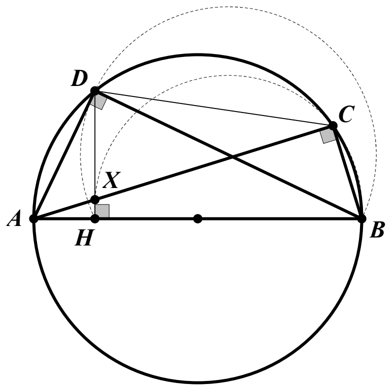
Из (7) и (8) следует, что

$$AD^2 = AX \cdot AC \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AX}{AD} = \frac{DX}{DC}.$$

Поэтому треугольники ADX и ACD подобны, откуда $\dfrac{AX}{AD} = \dfrac{DX}{DC}$. Тогда окончательно находим

$$DC = \frac{AD}{AX} \cdot DX = DX \cdot \frac{\sqrt{AX \cdot (AX + XC)}}{AX} = DX \cdot \sqrt{1 + \frac{CX}{AX}} = 20 \cdot \sqrt{\frac{17}{5}} = 4\sqrt{85}.$$

Замечание. Подобие треугольников ADX и ACD можно обосновать следующим образом. AD является касательной к описанной окружности треугольника DBH, а $XCBH$ — вписанный четырёхугольник, поэтому $AD^2 = AH \cdot AB = AX \cdot (AX + XC)$. Поскольку $AD^2 = AC \cdot AX$, из равенства отношений $\dfrac{AD}{AX} = \dfrac{AC}{AD}$ и следует требуемое подобие.



6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{8x+1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x-1}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решение. *Первый способ.* ОДЗ уравнения — это $x \in \left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$. Разделив обе части на положительное выражение $\sqrt[4]{x}$, получаем равносильное уравнение

$$\frac{\sqrt[4]{8x+1}}{\sqrt[4]{x}} = 1 + \frac{\sqrt[4]{9x-1}}{\sqrt[4]{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[4]{8 + \frac{1}{x}} = 1 + \sqrt[4]{9 - \frac{1}{x}}.$$

Введём замену $u = \sqrt[4]{8 + \frac{1}{x}}$, $v = \sqrt[4]{9 - \frac{1}{x}}$. Возводя каждое из этих равенств в четвёртую степень и складывая, получаем $u^4 + v^4 = \left(8 + \frac{1}{x}\right) + \left(9 - \frac{1}{x}\right) = 17$. Само уравнение после замены принимает вид $u = 1 + v$. Подставляя, получаем $(v+1)^4 + v^4 = 17$. Для упрощения выкладок удобно сделать ещё одну замену. Пусть $v + \frac{1}{2} = t$. Тогда

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = 82 \iff \left(t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{16}\right) + \left(t^4 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16}\right) = 17 \iff$$
$$\iff t^4 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{135}{16} = 0 \iff \left(t^2 + \frac{15}{4}\right)\left(t^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \iff t = \mp\frac{3}{2}.$$

Если $t = -\frac{3}{2}$, то $v = -2$, то есть $\sqrt[4]{9 - \frac{1}{x}} = -2$, что невозможно.

Если $t = \frac{3}{2}$, то $v = 1$, $\sqrt[4]{9 - \frac{1}{x}} = 1$, откуда $9 - \frac{1}{x} = 1$ и $x = \frac{1}{8}$.

Второй способ. Переносим $\sqrt[4]{9x-1}$ в левую часть и дважды домножаем на выражение, сопряжённое к левой части уравнения (оба раза умножаем на положительное выражение, поэтому после преобразований получаем уравнение, равносильное исходному):

$$\sqrt[4]{8x+1}-\sqrt[4]{9x-1}=\sqrt[4]{x} \iff$$
$$\iff \left(\sqrt[4]{8x+1}-\sqrt[4]{9x-1}\right)\left(\sqrt[4]{8x+1}+\sqrt[4]{9x-1}\right)=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{8x+1}+\sqrt[4]{9x-1}\right) \iff$$
$$\iff \sqrt{8x+1}-\sqrt{9x-1}=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{8x+1}+\sqrt[4]{9x-1}\right) \iff$$
$$\iff \left(\sqrt{8x+1}-\sqrt{9x-1}\right)\left(\sqrt{8x+1}+\sqrt{9x-1}\right)=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{8x+1}+\sqrt[4]{9x-1}\right)\left(\sqrt{8x+1}+\sqrt{9x-1}\right) \iff$$
$$\iff 2-17x=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{8x+1}+\sqrt[4]{9x-1}\right)\left(\sqrt{8x+1}+\sqrt{9x-1}\right)$$

Правая часть последнего уравнения есть произведением строго возрастающих неотрицательных функций, поэтому она строго возрастает. В левой части уравнения стоит строго убывающая функция, поэтому решений может быть не более одного. Остаётся заметить, что $x=\frac{1}{8}$ является решением.
Замечание. Преобразования уравнения были необходимы для доказательства, что у него не более одного решения. Так как они в итоге привели к более громоздкому уравнению, подбирать значения корня проще у исходного уравнения.

7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2 002 до 2 025 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 8?

Ответ: 10 612.

Решение. Любые восемь последовательных целых чисел принимают все возможные остатки от деления на 8 (от 0 до 7) ровно по одному разу. Значит, среди данных 24 последовательных чисел есть ровно по три числа, дающих каждый из остатков от деления на 8.
Из шести чисел некоторые три дают одинаковый остаток от деления на 8 в следующих трёх случаях:

- это две тройки чисел, дающих одинаковый остаток от деления на 8 (из восьми троек надо выбрать две — это можно сделать $C_8^2=28$ способами);
- три числа дают один остаток от деления на 8, два числа — другой, одно число — третий (8 способов выбрать полную тройку чисел, 7 способов выбрать ту тройку, из которой берём два числа, 6 способов — ту тройку, из которой берём одной число; далее в неполных тройках одно или два числа из трёх можно выбрать 3 способами — в итоге $8\cdot 7\cdot 6\cdot 3^2=3\,024$ способа);
- три числа дают одинаковый остаток от деления на 8, другие три числа дают другие три попарно различных остатка от деления на 8 (8 способов выбрать тройку чисел с одинаковыми остатками, далее C_7^3 способов выбрать три тройки из оставшихся семи, а затем в каждой из выбранных троек по 3 способа взять одно число — всего $8\cdot C_7^3\cdot 3^3=7\,560$ способов).

В итоге получаем $28+3\,024+7\,560=10\,612$ способов.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

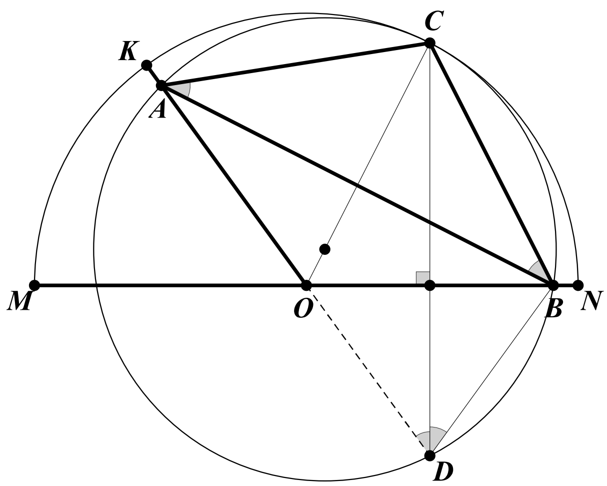
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14

1. [5 баллов] На дуге полукруга с диаметром MN и центром O взята точка K. Построен треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите отношение площади сектора MOK к площади полукруга, если известно, что $AC = BC = OM$ и $\angle ACB = 108°$.

Ответ: 0,3.

Решение. Опишем окружность ω около ΔABC и проведём OC. Из условия $AC = BC = OC$. Построим серединный перпендикуляр ℓ к отрезку OB. Пусть он пересекает ω в точке D. Соединим точку D с точками O и B. Так как ΔOCB — равнобедренный, $C \in \ell$. Кроме того, $OD = BD$. Обозначим $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$. По теореме о вписанном угле $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$. Заметим, что OC — прямая, содержащая высоту равнобедренного ΔODB, поэтому она содержит биссектрису, а значит, $\angle ODC = \alpha = \angle ABC$. Поэтому точки A, O, D лежат на одной прямой, откуда $\angle MOK = \angle BOD = 90° - \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника $2\alpha + 108° = 180°$, откуда $\alpha = 36°$, а $\angle MOK = \dfrac{108°}{2} = 54°$. Отношение площади сектора к площади полукруга равно $\dfrac{S_{\text{сект}}}{S_{\text{полукр}}} = \dfrac{54°}{180°} = 0{,}3$.



Замечание. Равенство $\angle MOK = \dfrac{1}{2}\angle ACB$ можно было доказать следующим образом. Построим вспомогательную окружность с центром в точке C и радиусом AC. Тогда по теореме о вписанном и центральном угле $2\angle BAO = \angle BCO$ и $2\angle ABO = \angle BCO$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle MOK = \angle OAB + \angle OBA = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

2. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 2 \cdot \max(a; b) = 13|a - b|, \\ 8 \cdot \min(a; b) = 11\big(\text{НОД}(a; b)\big)^2 - 99. \end{cases}$$

Ответ: $(117; 99)$, $(99; 117)$.

Решение. Исходная система симметрична относительно a и b: если $(a; b)$ — решение, то и $(b; a)$ — решение. Тогда без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$.

Для $a \geqslant b$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} 2a = 13(a - b), \\ 8b = 11\big(\text{НОД}(a; b)\big)^2 - 99. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы получаем, что $11a = 13b$. Поэтому a делится на 13, а b делится на 11. Обозначим $a = 13k$. Тогда $b = 11k$, а $\text{НОД}(a; b) = k$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получаем

$$8\cdot 11k = 11k^2 - 99 \iff k^2 - 8k - 9 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &k=-1,\\ &k=9.\end{aligned}\right.$$

Поскольку a и b — натуральные числа, подходит только $k=9$. Этому значению k соответствует пара чисел $(a;b)=(117;99)$. Исходная система также имеет решение $(99;117)$.

3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{x+4-6y}-\frac{1}{\sqrt{6y-2-x}} > x^2+10x.$$

Ответ: $(-3;0)$, $(-9;-1)$, $(-4;0)$.

Решение. Сумма подкоренных выражений равна 2. Так как x и y — целые, каждое из чисел $x+4-6y$ и $6y-2-x$ тоже целое. За счёт области определения получаются ограничения $x+4-6y\geqslant 0$ и $6y-2-x>0$. Поэтому левая часть определена в двух случаях:

$$\text{при } \begin{cases} x+4-6y=1,\\ 6y-2-x=1\end{cases} \quad \text{и при } \begin{cases} x+4-6y=0,\\ 6y-2-x=2.\end{cases}$$

Рассмотрим эти два случая по очереди.

- В первом случае $x=6y-3$, а исходное неравенство принимает вид $x^2+10x<0$, откуда $x\in(-10;0)$. Значит, $-10<6y-3<0$, откуда $y=-1$ или $y=0$. Соответствующие значения x — это $x=-9$ и $x=-3$.
- Аналогично, во втором случае $x=6y-4$, а неравенство имеет вид $x^2+10x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Учитывая, что $x\in\mathbb{Z}$, получаем $x\in[-9;-1]$. Тогда $-9\leqslant 6y-4\leqslant -1$. В этом случае подходит единственное значение $y=0$, откуда $x=-4$.

4. [3 балла] Петя загадал такие вещественные числа x, y, z, что выражения

$$\frac{4x(z-y)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$$

принимают одно и то же значение A. Найдите все возможные значения A, если известно, что их не менее двух.

Ответ: $A=1$ или $A=3$.

Решение. Обозначим $A=\frac{4x(z-y)}{y(z-x)}=\frac{3y(z-x)}{4z(y-x)}$. Рассмотрим выражение $A+\frac{3}{A}$:

$$A+\frac{3}{A}=\frac{4x(z-y)}{y(z-x)}+3\cdot\frac{4z(y-x)}{3y(z-x)}=4\cdot\frac{x(z-y)+z(y-x)}{y(z-x)}=\frac{4(xz-xy+zy-xz)}{zy-yx}=4.$$

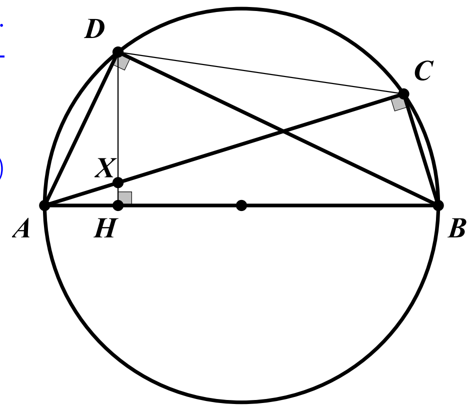
Поэтому A удовлетворяет квадратному уравнению $A^2-4A+3=0$, откуда $A=1$ или $A=3$. Так как в условии сказано, что A может принимать по крайней мере два различных значения, оба случая возможны.

5. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AB, а H — ортогональная проекция точки D на AB. Диагональ AC пересекает отрезок DH в точке X. Найдите CD, если $DX=2$, $AX=3$, $CX=4$.

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Решение. Треугольник ADB является прямоугольным с прямым углом ADB, опирающимся на диаметр AB. Поэтому

$$AD^2 = AH \cdot AB. \tag{7}$$



Угол ACB также опирается на диаметр AB, поэтому он прямой. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники AXH и ABC подобны, следовательно

$$\frac{AH}{AX} = \frac{AC}{AB} \iff AH \cdot AB = AX \cdot AC. \tag{8}$$

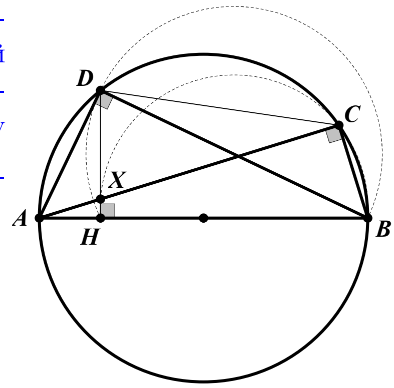
Из (7) и (8) следует, что

$$AD^2 = AX \cdot AC \iff \frac{AX}{AD} = \frac{DX}{DC}.$$

Поэтому треугольники ADX и ACD подобны, откуда $\dfrac{AX}{AD} = \dfrac{DX}{DC}$. Тогда окончательно находим

$$DC = \frac{AD}{AX} \cdot DX = DX \cdot \frac{\sqrt{AX \cdot (AX + XC)}}{AX} = DX \cdot \sqrt{1 + \frac{CX}{AX}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Замечание. Подобие треугольников ADX и ACD можно обосновать следующим образом. AD является касательной к описанной окружности треугольника DBH, а $XCBH$ — вписанный четырёхугольник, поэтому $AD^2 = AH \cdot AB = AX \cdot (AX + XC)$. Поскольку $AD^2 = AC \cdot AX$, из равенства отношений $\dfrac{AD}{AX} = \dfrac{AC}{AD}$ и следует требуемое подобие.



6. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{81x - 1}$.

Ответ: $\frac{1}{80}$.

Решение. *Первый способ.* ОДЗ уравнения — это $x \in \left[\frac{1}{81}; +\infty\right)$. Разделив обе части на положительное выражение $\sqrt[4]{x}$, получаем равносильное уравнение

$$\frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[4]{x}} = 2 + \frac{\sqrt[4]{81x-1}}{\sqrt[4]{x}} \iff \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = 2 + \sqrt[4]{81 - \frac{1}{x}}.$$

Введём замену $u = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}}$, $v = \sqrt[4]{81 - \frac{1}{x}}$. Возводя каждое из этих равенств в четвёртую степень и складывая, получаем $u^4 + v^4 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(81 - \frac{1}{x}\right) = 82$. Само уравнение после замены принимает вид $u = 2 + v$. Подставляя, получаем $(v+2)^4 + v^4 = 82$. Для упрощения выкладок удобно сделать ещё одну замену. Пусть $v + 1 = t$. Тогда

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 82 \iff \left(t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1\right) + \left(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1\right) = 82 \iff$$
$$\iff t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \iff \left(t^2 + 10\right)\left(t^2 - 4\right) = 0 \iff t = \mp 2.$$

Если $t = -2$, то $v = -3$, то есть $\sqrt[4]{81 - \frac{1}{x}} = -3$, что невозможно.

Если $t = 2$, то $v = 1$, $\sqrt[4]{81 - \frac{1}{x}} = 1$, откуда $81 - \frac{1}{x} = 1$ и $x = \frac{1}{80}$.

Второй способ. Переносим $\sqrt[4]{81x-1}$ в левую часть и дважды домножаем на выражение, сопряжённое к левой части уравнения (оба раза умножаем на положительное выражение, поэтому после преобразований получаем уравнение, равносильное исходному):

$$\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{81x-1}=2\sqrt[4]{x} \iff$$
$$\iff \left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{81x-1}\right)\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{81x-1}\right)=2\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{81x-1}\right) \iff$$
$$\iff \sqrt{x+1}-\sqrt{81x-1}=2\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{81x-1}\right) \iff$$
$$\iff \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{81x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{81x-1}\right)=2\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{81x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{81x-1}\right) \iff$$
$$\iff 2-80x=2\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{81x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{81x-1}\right)$$

Правая часть последнего уравнения есть произведением строго возрастающих неотрицательных функций, поэтому она строго возрастает. В левой части уравнения стоит строго убывающая функция, поэтому решений может быть не более одного. Остаётся заметить, что $x=\frac{1}{80}$ является решением.
Замечание. Преобразования уравнения были необходимы для доказательства, что у него не более одного решения. Так как они в итоге привели к более громоздкому уравнению, подбирать значения корня проще у исходного уравнения.

7. [5 баллов] Сколькими способами из натуральных чисел от 2 025 до 2 045 можно выбрать 6 чисел так, чтобы среди выбранных чисел нашлось 3 числа, дающих одинаковые остатки от деления на 7?

Ответ: 5 691.

Решение. Любые семь последовательных целых чисел принимают все возможные остатки от деления на 7 (от 0 до 6) ровно по одному разу. Значит, среди данных 21 последовательного числа есть ровно по три числа, дающих каждый из остатков от деления на 7.
Из шести чисел некоторые три дают одинаковый остаток от деления на 7 в следующих трёх случаях:

- это две тройки чисел, дающих одинаковый остаток от деления на 7 (из семи троек надо выбрать две — это можно сделать $C_7^2=21$ способом);
- три числа дают один остаток от деления на 7, два числа — другой, одно число — третий (7 способов выбрать полную тройку чисел, 6 способов выбрать ту тройку, из которой берём два числа, 5 способов — ту тройку, из которой берём одной число; далее в неполных тройках одно или два числа из трёх можно выбрать 3 способами — в итоге $7\cdot 6\cdot 5\cdot 3^2=1\,890$ способов);
- три числа дают одинаковый остаток от деления на 7, другие три числа дают другие три попарно различных остатка от деления на 7 (7 способов выбрать тройку чисел с одинаковыми остатками, далее C_6^3 способов выбрать три тройки из оставшихся шести, а затем в каждой из выбранных троек по 3 способа взять одно число — всего $7\cdot C_6^3\cdot 3^3=3\,780$ способов).

В итоге получаем $21+1\,890+3\,780=5\,691$ способ.