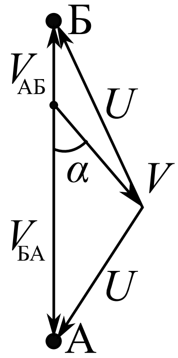
10 февраля 2024 года Олимпиада Физтех 2024

Решения задач Варианта 9-1

Задача 1.



Ветер дует под углом α к *АБ* (см. рис.). Геометрия абсолютных, переносной и относительных скоростей на пути "туда" и "обратно" представлена на рисунке.

1 $U = \dfrac{S}{T_0} = 24$ м/с.

По закону сложения скоростей (см. рис.) находим время полета из А в Б

2 $T_1 = \dfrac{S}{\sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha} - V\cos\alpha} \approx 1044$ с,

продолжительность полета по маршруту $А \to Б \to А$ $T_{АБА} = 2S\dfrac{\sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha}}{U^2 - V^2}$

3. T_{MAX} при $\alpha = 0, \pi$

4. $T_{MAX} = 2\dfrac{S}{U}\cdot\dfrac{U^2}{U^2 - V^2} = 2T_0\dfrac{U^2}{U^2 - V^2} = 1440$ с.

Задача 2.

Мяч движется по параболе. Вследствие симметрии продолжительность полета

1. $T = t_1 + t_2 = 3$ с.

2. Максимальная высота полета $H = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{T}{2}\right)^2 = 11{,}25$ м.

Из условия следует, что равнобедренный треугольник скоростей $\vec{V}(t_2) = \vec{V}(t_1) + \vec{g}(t_2 - t_1)$ – равносторонний. Тогда $\left|\vec{V}(t_1)\right| = \left|\vec{V}(t_2)\right| = 10$ м/с. В полете горизонтальная составляющая скорости $V_{0X} = \left|\vec{V}(t_1)\right|\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}g(t_2 - t_1)$. Дальность полета $L = V_{0X}T = \dfrac{\sqrt{3}}{2}g\left(t_2^2 - t_1^2\right) \approx 26$ м.

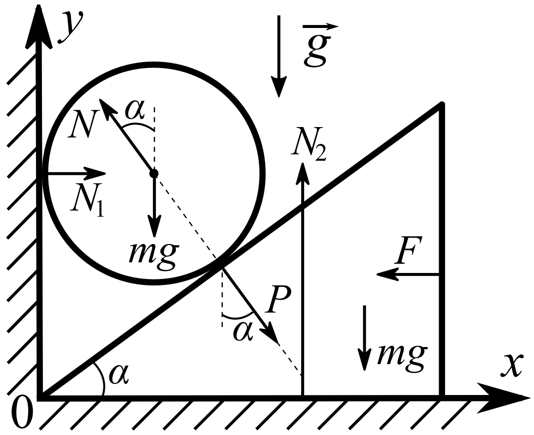
В момент времени t_1 проекция ускорения на нормаль к траектории $a_n = g\cos\beta = \dfrac{\left|\vec{V}(t_1)\right|^2}{R}$.

Отсюда находим радиус кривизны траектории в малой окрестности рассматриваемой точки траектории

3. $R = \dfrac{g(t_2 - t_1)^2}{\cos\beta} \approx 11{,}5$ м.

Задача 3.

$N\cos\alpha = mg, \quad P = N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}, \quad F = P\sin\alpha = mgtg\alpha$



1. $F = mg\,tg\alpha \approx 5{,}8\,$Н.

Кинематическая связь: перемещения, скорости и ускорения шара и клина связаны (на примере скоростей) $V_{ШАРА} = V_{КЛИНА} \cdot tg\alpha$. Введем обозначение V – скорость шара. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной $\dfrac{mV^2}{2}\left(1+\dfrac{1}{tg^2\alpha}\right) = mgH$.

2. $h = \dfrac{H}{1+\dfrac{1}{tg^2\alpha}} = H\sin^2\alpha = 0{,}2\,$м.

Из закона сохранения энергии $V^2 = 2\left(g\sin^2\alpha\right)H$ находим ускорение шара $a_{Ш} = g\sin^2\alpha$, тогда ускорение клина

3. $a = \dfrac{a_{Ш}}{tg\alpha} = g\sin\alpha\cos\alpha \approx 4{,}33$ м/с^2, иначе,

второй закон Ньютона: для клина $m_1 a_1 = \tilde{N}\, sin\,\alpha$, для шара $m_2 a_2 = m_2 g - \tilde{N}\, cos\,\alpha$,

$a_1 = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \mathrm{tg}^2\alpha} g, \quad a_2 = a_1 \cdot tg\alpha$, при $\dfrac{m_1}{m_2} = 1$, $a_1 = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} g = g\sin\alpha\cos\alpha$,

4. $\alpha = 45^0$,

5. $a_{MAX} = 0{,}5g = 5$ м/с^2.

Задача 4.

1. $V(t) = \dfrac{m}{\rho}\left(1+(\beta-1)\dfrac{t-t_0}{t_{100}-t_0}\right)$,

2. $\Delta V = \dfrac{m}{\rho}(\beta-1)\dfrac{t_2-t_1}{t_{100}-t_0} \approx 1{,}85\cdot 10^{-1}\,$мм^3.

Площадь поперечного сечения капилляра термометра

3. $S = \dfrac{\Delta V}{L} \approx 3{,}7\cdot 10^{-3}\,$мм^2.

Задача 5.

Введем обозначения $R_1 = r$, $R_2 = 4r$, $R_3 = 2r$, $R_4 = 1,2r$, здесь $r = 5$ Ом. Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, эквивалентное сопротивление $R_{12} = 0,8r$, этот резистор соединен последовательно с R_4, эквивалентное сопротивление такой цепочки $R_{124} = R_{12} + R_4 = 0,8r + 1,2r = 2r$. Сопротивления $R_{124} = 2r$ и $R_3 = 2r$ соединены параллельно.

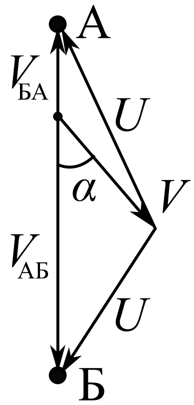
1. Эквивалентное сопротивление цепи $R_{ЭКВ} = \dfrac{R_{124} \cdot R_3}{R_{124} + R_3} = r = 5$ Ом.

2. $P = \dfrac{U^2}{R_{ЭКВ}} = \dfrac{U^2}{r} = 20$ Вт.

3. Наименьшая мощность рассеивается на резисторе R_2. Напряжение на этом резисторе $0,4U$, наименьшая мощность $P_{MIN} = \dfrac{(0,4U)^2}{4r} = 0,04\dfrac{U^2}{r} = 0,8$ Вт.

Решения задач Варианта 9-2

Задача 1.



Ветер дует под углом α к *АБ* (см. рис.). Геометрия абсолютных, переносной и относительных скоростей на пути "туда" и "обратно" представлена на рисунке.

1 $U = \dfrac{2S}{T_0} = 20$ м/с.

По закону сложения скоростей (см. рис.) находим время полета из А в Б

2 $T_1 = \dfrac{S}{\sqrt{U^2 - V^2 \sin^2\alpha} + V\cos\alpha} = 80$ с,

продолжительность полета по маршруту $А \to Б \to А$ $T_{АБА} = 2S\dfrac{\sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha}}{U^2 - V^2}$

3. T_{MIN} при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$,

4.$T_{MIN} = 2 \cdot \dfrac{S}{\sqrt{U^2 - V^2}} = 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^3}{\sqrt{20^2 - 15^2}} = 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^3}{\sqrt{175}} \approx 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^3}{13,2} \approx 302$ с.

Задача 2.

Мяч движется по параболе. Вследствие симметрии продолжительность полета $(t_1 + t_2)$, продолжительность подъема на максимальную высоту

1. $T = \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 1$с.

Из условия следует, что равнобедренный треугольник скоростей $\vec{V}(t_2) = \vec{V}(t_1) + \vec{g}(t_2 - t_1)$ – прямоугольный.

Тогда $\left|\vec{V}(t_1)\right| = \left|\vec{V}(t_2)\right| = \dfrac{g(t_2 - t_1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{10}{2} \approx 7{,}1$ м/с.

В полете горизонтальная составляющая скорости

$V_{0X} = \left|\vec{V}(t_1)\right|\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} g(t_2 - t_1)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} g(t_2 - t_1) = 5$ м/с. Дальность полета

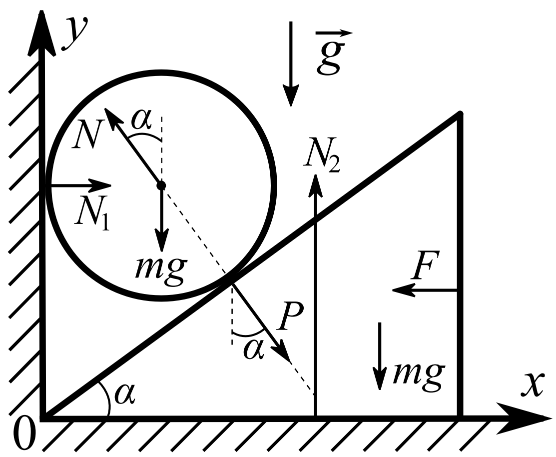
2. $L = V_{0X}\, 2T = \dfrac{1}{2} g(t_2 - t_1)(t_1 + t_2) = \dfrac{1}{2} g\left(t_2^2 - t_1^2\right) = 10$ м.

В момент времени T $\vec{V} \perp \vec{g}$. В этот момент $a_n = g = \dfrac{\left|V_{0X}\right|^2}{R}$. Отсюда находим радиус кривизны траектории в малой окрестности высшей точки траектории

3. $R = \dfrac{g(t_2 - t_1)^2}{4} = 2{,}5$ м.

Задача 3.

$N\cos\alpha = mg, \quad P = N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}, \quad F = P\sin\alpha = mg\,tg\alpha$



1. $tg\alpha = \dfrac{F}{mg} = \sqrt{3}, \quad \alpha = \dfrac{\pi}{3}.$

Кинематическая связь: перемещения, скорости и ускорения шара и клина связаны (на примере скоростей) $V_{ШАРА} = V_{КЛИНА}\cdot tg\alpha$. Введем обозначение V – скорость шара. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной $\dfrac{mV^2}{2}\left(1 + \dfrac{1}{tg^2\alpha}\right) = mgH$.

2. $h = \dfrac{H}{1 + \dfrac{1}{tg^2\alpha}} = H\sin^2\alpha, \quad H = \dfrac{h}{\sin^2\alpha} = \dfrac{4}{3}h = 0{,}2$ м.

Из закона сохранения энергии $V^2 = 2\left(g\sin^2\alpha\right)H$ находим ускорение шара $a_Ш = g\sin^2\alpha$,

тогда ускорение клина $a = \dfrac{a_Ш}{tg\alpha} = g\sin\alpha\cos\alpha$, иначе,

второй закон Ньютона: для клина $m_1 a_1 = \tilde{N}\, sin\,\alpha$, для шара $m_2 a_2 = m_2 g - \tilde{N}\, cos\,\alpha$,

$a_1 = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\dfrac{m_1}{m_2} + \mathrm{tg}^2\,\alpha}\, g, \quad a_2 = a_1\cdot tg\alpha$, при $\dfrac{m_1}{m_2} = 1$

ускорение клина $a_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} g = g\sin\alpha\cos\alpha$, далее $m_1 a_1 = \tilde{N}\,sin\,\alpha = N_1$

3. $N_1 = mg\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4} mg \approx 1{,}73\,\text{Н}.$

4. $\alpha = 45^0$,

5. $N_{MAX} = 0{,}5mg = 2\ \text{Н}.$

Задача 4.

1. $V(t) = \dfrac{m}{\rho}\left(1 + (\beta - 1)\dfrac{t - t_0}{t_{100} - t_0}\right)$,

2. $|\Delta V| = \dfrac{m}{\rho}(\beta - 1)\dfrac{t_1 - t_2}{t_{100} - t_0} = 0{,}6\,\text{мм}^3.$

Площадь поперечного сечения капилляра термометра

3. $S = \dfrac{|\Delta V|}{0{,}1L} = 0{,}06\,\text{мм}^2.$

Задача 5.

По условию $R_1 = 1{,}2r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 4r$, $R_4 = r$. Сопротивления R_2 и R_3 соединены последовательно, эквивалентное сопротивление $R_{23} = 2r + 4r = 6r$, этот резистор соединен параллельно с R_1, эквивалентное сопротивление цепочки $R_{123} = \dfrac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \dfrac{1{,}2 \cdot 6}{1{,}2 + 6} r = r$.

Сопротивления $R_{123} = r$ и $R_4 = r$ соединены последовательно

1. Эквивалентное сопротивление цепи

$R_{ЭКВ} = R_{123} + R_4 = r + r = 2r = 10\ \text{Ом}.$

2. $P = I^2 R_{ЭКВ} = 2I^2 r = 160\,\text{Вт}.$

3. Наименьшая мощность рассеивается на резисторе R_2. Сила тока, текущего через этот резистор, равна $I/6$, наименьшая мощность $P_{MIN} = \left(\dfrac{I}{6}\right)^2 2r = \dfrac{I^2 r}{18} \approx 4{,}4\,\text{Вт}.$

10 февраля 2024 года Олимпиада Физтех 2024

Решения задач Варианта 9-3

Задача 1.

В тот момент, когда расстояние между мотоциклистами наименьшее, вектор относительной скорости $\vec{U}$, $U=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ перпендикулярен отрезку, соединяющему мотоциклистов. Тогда по теореме Пифагора $S^2+\left(UT\right)^2=\left(2S\right)^2$, $U=\sqrt{3}\dfrac{S}{T}$, из этих равенств следует

1. $V_2=\sqrt{3\dfrac{S^2}{T^2}-V_1^2}\approx 35\,\text{м/с}$,

2. $V_R=U\cos 30^0=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{S}{T}=33\,\text{м/с}$.

Задача 2.

По условию $l=V_0\tau\cos\alpha$, $h=V_0\sin\alpha\,\tau-\dfrac{g\tau^2}{2}$,

из этих соотношений находим: продолжительность T полёта рассматриваемого осколка

1. $T=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}=2\left(\dfrac{h}{g\tau}+\dfrac{\tau}{2}\right)=4\,\text{с}$,

наибольшую высоту полета этого осколка

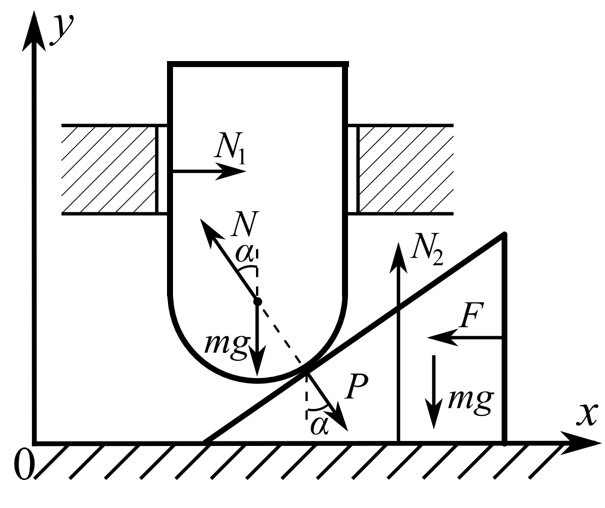
2. $H=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{T}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{h}{g\tau}+\dfrac{\tau}{2}\right)^2=20\,\text{м}$,

далее находим начальную скорость

3. $V_0=\sqrt{\left(\dfrac{l}{\tau}\right)^2+\left(\dfrac{h}{\tau}+\dfrac{g\tau}{2}\right)^2}\approx 40\,\text{м/с}$

и площадь круга, на который выпали осколки,

4. $S=\pi\left(\dfrac{V_0^2}{g}\right)^2=\dfrac{\pi}{g^2}\left[\left(\dfrac{l}{\tau}\right)^2+\left(\dfrac{h}{\tau}+\dfrac{g\tau}{2}\right)^2\right]^2\approx 8\cdot 10^4\,\text{м}^2$.



Задача 3.

$N\cos\alpha=mg$, $P=N=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$, $F=P\sin\alpha=mg\,tg\alpha$

1. $F=mg\,tg\alpha\approx 2{,}9\,\text{Н}$.

Кинематическая связь: перемещения, скорости и ускорения стержня и клина связаны (на примере скоростей) $V_{CT}=V_{КЛ}\cdot tg\alpha$.

Введем обозначение V - скорость стержня. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной $\frac{mV^2}{2}\left(1+\frac{1}{tg^2\alpha}\right)=mgH$.

Перемещение h стержня после соударения до первой остановки найдем по закону сохранения энергии $mgh=\frac{mV^2}{2}=\frac{mgH}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}$.

2. $h=\frac{H}{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}=H\sin^2\alpha=0{,}15$ м.

Из закона сохранения энергии $V^2=2\left(g\sin^2\alpha\right)H$ находим ускорение стержня $a_{CT}=g\sin^2\alpha$, тогда ускорение клина

3. $a=a_{КЛ}=\frac{a_{CT}}{tg\alpha}=g\sin\alpha\cos\alpha\approx 4{,}33$ м/с^2.

Этот результат может быть получен иначе.

Второй закон Ньютона:

для клина $ma_{КЛ}=\tilde{N}\sin\alpha,$

для стержня $ma_{CT}=mg-\tilde{N}\cos\alpha,$

кинематическая связь $a_{CT}=a_{КЛ}\cdot tg\alpha$, отсюда находим ускорение клина

$a=a_{КЛ}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}g=g\sin\alpha\cos\alpha$,

4. $\alpha=45^0$,

5. $a_{MAX}=0{,}5g=5$ м/с^2.

Задача 4.

Длина дуги (см. рис. в условии) Александрия – Сиена 787, 5 км, длина окружности, центр которой совпадает с центром Земли, в 50 раз больше и равна $L=2\pi R=39375$ км, радиус Земли

1. R = 6264 км. *Примечание*: ныне Сиена –это город Асуан.

Длина дуги большого круга Шереметьево – Северный полюс

$L_1=\frac{34}{360}L\approx 3720$ км.

Продолжительность перелета

2.$T=\frac{L_1}{V}\approx 4{,}1$ ч.

$\eta = \frac{FV}{m_1 q} \cdot 100\%$.

3. $F = \frac{\eta}{100\%} \cdot \frac{m_1 q}{V} = 20$ кН.

Задача 5.

1. По графикам $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = 50$ Ом. При параллельном соединении двух резисторов, сопротивления которых равны 25 Ом и 50 Ом, эквивалентное сопротивление

$$R_{ЭКВ} = \frac{25 \cdot 50}{25 + 50} = \frac{50}{3} \text{ Ом.}$$

2. $P = \frac{U^2}{R_{ЭКВ}} = 150$ Вт

Решения задач Варианта 9-4

Задача 1.

В тот момент, когда расстояние между мотоциклистами наименьшее, вектор относительной скорости $\vec{U}$, $U = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ перпендикулярен отрезку, соединяющему мотоциклистов. Тогда по теореме Пифагора $S^2 + (UT)^2 = 9S^2$, $U = \sqrt{2} \cdot 2\frac{S}{T}$, из этих равенств следует

1. $V_2 = \sqrt{8\frac{S^2}{T^2} - V_1^2} = 20$ м/с,

2. $V_R = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3} U = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3} \sqrt{2} \cdot 2\frac{S}{T} = \frac{8}{3}\frac{S}{T} \approx 26{,}7$ м/с.

Задача 2.

По условию

$$l = V_0 \tau \cos\alpha, \quad h = V_0 \sin\alpha\, \tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

из этих соотношений находим:

продолжительность T полёта рассматриваемого осколка

$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2\left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right) = 4$ с,

время подъема этого осколка на наибольшую высоту

1. $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 0{,}5T = \left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right) = 2$ с,

этот осколок упадет на площадку на расстоянии

2. $S = V_0 \cos\alpha \cdot T = l\left(1+\dfrac{2h}{g\tau^2}\right) \approx 139$ м от точки старта,

далее находим начальную скорость всех осколков

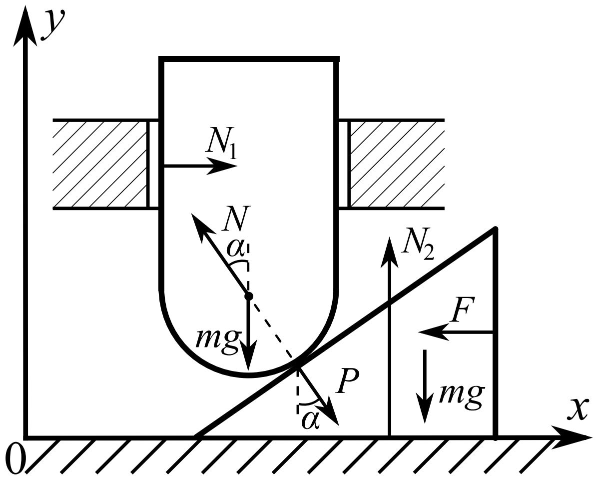
3. $V_0 = \sqrt{\left(\dfrac{l}{\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{\tau}+\dfrac{g\tau}{2}\right)^2} \approx 40$ м/с,

и наибольшую высоту полета осколков

4. $H = \dfrac{V_0^2}{2g} = \dfrac{1}{2g}\cdot\left[\left(\dfrac{l}{\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{\tau}+\dfrac{g\tau}{2}\right)^2\right] \approx 80$ м.

Задача 3.

$N\cos\alpha = mg, \quad P = N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}, \quad F = P\sin\alpha = mgtg\alpha$



1. $tg\alpha = \dfrac{F}{mg} = 1{,}73 \approx \sqrt{3}, \quad \alpha \approx \dfrac{\pi}{3}$.

Кинематическая связь: перемещения, скорости и ускорения стержня и клина связаны (на примере скоростей) $V_{СТ} = V_{КЛ} \cdot tg\alpha$.

Введем обозначение V – скорость стержня. Потерь энергии нет. Приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной $\dfrac{mV^2}{2}\left(1+\dfrac{1}{tg^2\alpha}\right) = mgH$.

2. $h = \dfrac{H}{1+\dfrac{1}{tg^2\alpha}} = H\sin^2\alpha, \quad H = \dfrac{h}{\sin^2\alpha} = \dfrac{4}{3}h = 0{,}4$ м.

Из закона сохранения энергии $V^2 = 2\left(g\sin^2\alpha\right)H$, выполняющегося на любых перемещениях, находим, с привлечением соотношения

$$V_Y^2 - V_{Y0}^2 = 2a_Y\left(y - y_0\right),$$

модуль ускорения стержня $\quad a_{CT} = g\sin^2\alpha$,

тогда ускорение клина $\quad a = \dfrac{a_{CT}}{tg\alpha} = g\sin\alpha\cos\alpha$.

Этот результат может быть получен иначе.

Второй закон Ньютона:

для клина $ma_{КЛ} = \widetilde{N}\sin\alpha$, для стержня $ma_{CT} = mg - \tilde{N}\cos\alpha$,

кинематическая связь $a_{CT} = a_{КЛ} \cdot tg\alpha$.

Из этих соотношений находим ускорение клина $a_{КЛ} = g\sin\alpha\cos\alpha$,

далее $$ma_{КЛ} = \tilde{N}\sin\alpha = N_1.$$

3. $N_1 = mg\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}mg \approx 4{,}33$ Н.

4. $\alpha = 45^0$,

5. $N_{MAX} = 0{,}5mg = 5$ Н.

Задача 4.

Длина дуги (см. рис. в условии) Александрия – Сиена 787, 5 км, длина окружности, центр которой совпадает с центром Земли, в 50 раз больше и равна

1. $L = 2\pi R = 39375$ км, радиус Земли R = 6264 км. *Примечание*: ныне Сиена –это город Асуан.

Длина дуги большого круга Шереметьево – экватор $L_1 = \frac{56}{360}L = 6125$ км.

Продолжительность перелета

2. $T = \frac{L_1}{V} \approx 6{,}96$ ч.

Массовый расход топлива за $\tau = 1$ ч полета

3. $\frac{\eta}{100\%} = \frac{FV\tau}{M_1 q}$, $M_1 = \frac{100\%}{\eta} \cdot \frac{FV\tau}{q} = 2000$ кг.

Задача 5.

1. По графикам $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = 50$ Ом. При последовательном соединении двух резисторов, сопротивления которых равны 25 Ом и 50 Ом, эквивалентное сопротивление

$$R_{ЭКВ} = 25 + 50 = 75 \text{ Ом}.$$

2. $P = I^2 R_{ЭКВ} = 300$ Вт.