МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.
3. [4 балла] Решите неравенство
$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right| + |7-2x|.$$
4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению
$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения x^2-6x+a равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральным n число $(n-1)!+n!+(n+1)!$ делится на 289?

2. [3 балла] Из суммы квадратов семи последовательных натуральных чисел вычли число 28 и получили пятую степень натурального числа N, большего 8. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-x-2}+5\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-x-2}+x-1\right|+|6-x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;45]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$23\cdot 2^x+2025=y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения y^2-4y-a равно 6.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=70^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 3, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 2. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число d, и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 4. Найдите d.

2. [4 балла] Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{3x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}}\ ?$$

3. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 10 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 3b, \\ \big(\min(a; b)\big)^2 + \text{НОД}(a; b) = 6. \end{cases}$$

4. [5 баллов] На медиане AM треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$. Найдите AC, если известно, что $AB = 5$, $BP = 3$, $CP = 4$.

5. [5 баллов] 5 сундуков закрыты на 3 замка каждый, все ключи ко всем замкам различны. Найдите количество способов выбрать из всех 15 ключей 6 так, чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы один сундук.

6. [5 баллов] На дуге полукруга с центром O и диаметром MN взята точка K. Построен равносторонний треугольник ABC с длиной стороны, равной радиусу полукруга, так, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите $\angle MOK$.

7. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $M = |b| + |5a - b| + |2a + b - 3|$, где a и b — действительные числа. При каких a и b оно достигается?

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 4, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 8. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число d, и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 2. Найдите d.

2. [4 балла] Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению
$$\sqrt{7x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}}\ ?$$

3. [4 балла] Найдите все натуральные a и b такие, что
$$\begin{cases} 12 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 6b, \\ 2\big(\min(a; b)\big)^2 + 3 = 7 \cdot \text{НОД}(a; b). \end{cases}$$

4. [5 баллов] На медиане AM треугольника ABC выбрана точка P такая, что $\angle BAC + \angle BPC = 180^\circ$. Найдите AC, если известно, что $AB = 15$, $BP = 9$, $CP = 6$.

5. [5 баллов] 6 сундуков закрыты на 3 замка каждый, все ключи ко всем замкам различны. Найдите количество способов выбрать из всех 18 ключей 6 так, чтобы с помощью них можно было открыть хотя бы один сундук.

6. [5 баллов] На дуге полукруга с центром O и диаметром MN взята точка K. Построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и BC, равными по длине радиусу полукруга, так, что его вершина A лежит на отрезке OK, вершина B — на отрезке ON, вершина C — на дуге KN. Найдите $\angle MOK$.

7. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $M = |a| + |3b - a| + |4b - a + 1|$, где a и b — действительные числа. При каких a и b оно достигается?