15 февраля 2025 года Олимпиада Физтех 2025

Решение варианта 10-05

Задача 1

1 В системе отсчета, связанной с первой материальной точкой, вторая движется с начальной скоростью $\vec{U}_{OTH} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ и ускорением $\vec{a}_{OTH} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, при этом $\vec{U}_{OTH} \uparrow\downarrow \vec{a}_{OTH}$. При равнопеременном движении длина тормозного пути

$$L = \frac{U_{OTH}^2}{2a_{OTH}} = \frac{\left(V_1 + V_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)} = 100 \text{ м.}$$

2 $T = \dfrac{U_{OTH}}{a_{OTH}} = \dfrac{\left(V_1 + V_2\right)}{\left(a_1 + a_2\right)} = \dfrac{12+8}{1,5+0,5} = 10\,\text{с}.$

Первая материальная точка остановится в момент времени $t_1 = \dfrac{V_1}{a_1} = \dfrac{12}{1,5} = 8\,\text{с}$, к этому моменту перемещение точки $\dfrac{V_1 t_1}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48\,\text{м}$, модуль перемещения точки за следующие две секунды $a_1 \dfrac{\left(T - t_1\right)^2}{2} = 3\,\text{м}$. Путь – сумма длин этих двух перемещений

3 $S_1 = \dfrac{V_1 t_1}{2} + a_1 \dfrac{\left(T - t_1\right)^2}{2} = 48 + 3 = 51\,\text{м}.$

Задача 2

$V_{0X} = \dfrac{S}{\tau} = 20\,\text{м/с}$, $V_{0Y} = \dfrac{g\tau}{2} = 15\,\text{м/с}$

1. $tg\alpha = \dfrac{V_{0Y}}{V_{0X}} = \dfrac{g\tau^2}{2S} = 0,75$, $\sin\alpha = 0,6$.

2. $V_0 = \sqrt{\left(\dfrac{S}{\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{g\tau}{2}\right)^2} = 25\,\text{м/с}.$

Обозначения: $\vec{V}(t)$ – скорость мяча в ЛСО, $\vec{U}$ – скорость в ЛСО воздушного потока, тогда $\vec{F}_{СОПР} = -k\vec{V}_{OTH} = -k(\vec{V} - \vec{U})$. По второму закону Ньютона $m\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = m\vec{g} - k(\vec{V} - \vec{U})$, это уравнение перепишем в виде $m\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = m\vec{g} + k\vec{U} - k\vec{V} = \vec{F} - k\vec{V}$, здесь $\vec{F} = m\vec{g} + k\vec{U}$ – однородное силовое поле. При движении в таком поле возвращение мяча в точку старта возможно в единственном случае – начальная скорость $\vec{V}_0$ и сила $\vec{F} = m\vec{g} + k\vec{U}$ – антипараллельные векторы. Тогда $F = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$.

Для определения продолжительности полета перепишем уравнение динамики в виде $m \cdot \Delta\vec{V} = \vec{F} \cdot \Delta t - k \cdot \vec{V} \cdot \Delta t$. Просуммируем все такие соотношения по всему времени движения, получим $m \cdot \left(\sum \Delta\vec{V}\right) = \vec{F} \cdot \left(\sum \Delta t\right) - k \cdot \left(\sum \vec{V} \cdot \Delta t\right)$. Учтем, что за время $T = \sum \Delta t$ полета перемещение мяча нулевое, т.е. $\sum \vec{V} \cdot \Delta t = \vec{0}$, получим $m \cdot \vec{V}_1 - m \cdot \vec{V}_0 = \left(m\vec{g} + k\vec{U}\right) \cdot T$. Переход в этом соотношении к проекциям на направление, задаваемое вектором начальной скорости, приводит к соотношению $-mV_1 - mV_0 = -\dfrac{mg}{\sin\alpha} T$, из которого находим продолжительность полета $T = \dfrac{\left(V_1 + V_0\right)\sin\alpha}{g} = 1{,}6\dfrac{V_0}{g}\sin\alpha$.

3. $T = 1{,}6\dfrac{V_0}{g}\sin\alpha = 2{,}4$ с.

Задача 3

Вследствие нерастяжимости нити $a_0 = a_{\text{ОТН}}$. Тогда ускорение бруска в ЛСО $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{OTH}$ – диагональ ромба (см. рис.1), проекция ускорения бруска на вертикаль $a_{\text{ОТН}} \sin\alpha$, вертикальное перемещение $H = \dfrac{1}{2}\left(a_{\text{ОТН}} \sin\alpha\right)\tau^2$.

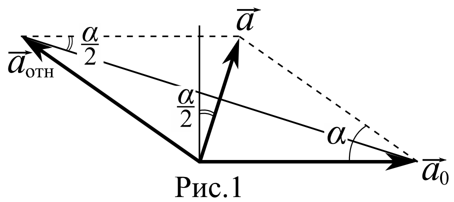


Рис.1

1. $\tau = \sqrt{\dfrac{2H}{a_{\text{ОТН}} \sin\alpha}} = 0{,}6$ с.

2. $a = 2a_0 \sin\dfrac{\alpha}{2} \approx 1$ м/с^2.

По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N}$ (см. рис.2), переходим к проекциям сил и ускорения на ось OX: $ma\sin\dfrac{\alpha}{2} = T - mg\sin\alpha$, отсюда

$$T = m\left(g\sin\alpha + 2a_0\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = m\left(g\sin\alpha + a_0\left(1 - \cos\alpha\right)\right)$$

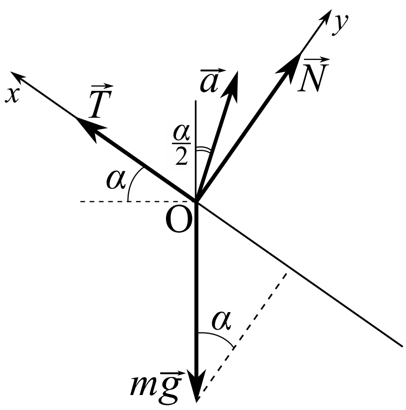
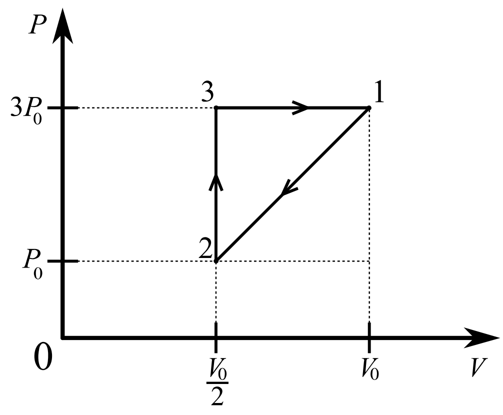


Рис.2

3. $T = m\left(g\sin\alpha + a_0\left(1 - \cos\alpha\right)\right) \approx 2{,}1$ Н.

Задача 4

В состояниях 1 и 2 $3P_0 = a + \frac{b}{\rho_0}$, $P_0 = a + \frac{b}{2\rho_0}$, отсюда $a = -P_0$, $b = 4P_0\rho_0$, тогда в процессе 1-2 $P = -P_0 + \frac{4P_0\rho_0}{\rho} = P_0\left(4\frac{V}{V_0} - 1\right)$. Цикл в P,V координатах представлен на рисунке к решению (см. рис). Работа газа за цикл $A = \frac{1}{2}2P_0\frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2}P_0V_0$. Максимальная



внутренняя энергия газа в процессе $U_{MAX} = \frac{3}{2}3P_0V_0 = \frac{9}{2}P_0V_0$. Искомая работа

2. $A = \frac{U_{MAX}}{9} = 554$ Дж.

Молярная теплоемкость газа в процессе $C = \frac{3}{2}R + P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)$. С учетом уравнения состояния $PV = RT$ и следствия из него $\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$ формула для теплоемкости принимает вид $C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1 + \frac{V}{P}\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right)}$. В процессе сжатия $\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right) = 4\frac{P_0}{V_0}$, в начале процесса сжатия $\frac{V}{P} = \frac{V_0}{3P_0}$, тогда $C = \frac{3}{2}R + \frac{3R}{7} = \frac{27}{14}R$.

3. $|\Delta Q| = C|\Delta T| = \frac{27}{14}R|\Delta T| \approx 16$ Дж.

Задача 5

По условию $R_1 = r = 6$ Ом, $R_2 = 4r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 2r$. Сразу после замыкания ключа заряд конденсатора и напряжение на конденсаторе нулевые, тогда сила тока, текущего через батарею, $I = \frac{E}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4}} = \frac{E}{\frac{3}{4}r + \frac{4}{3}r} = \frac{12}{25}\frac{E}{r}$.

1. $I = \frac{12}{25}\frac{E}{r} = 4$ А.

Напряжения на параллельно соединенных резисторах:
$R_1 = r$ и $R_3 = 3r$ $U_{13} = I\frac{3}{4}r = \frac{12}{25}\frac{E}{r}\frac{3}{4}r = \frac{9}{25}E = 18$ В, на R_2 и R_4 $U_{24} = \frac{16}{25}E = 32$ В.

2. Сразу после замыкания ключа наименьшая мощность рассеивается на резисторе $R_3 = 3r$. $P_{MIN} = \dfrac{U_{13}^2}{R_3} = 18$ Вт.

Сила тока, текущего на конденсатор сразу после замыкания ключа, равна разности сил токов, текущих через резисторы R_1 и R_2, $I_C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3} I - \dfrac{R_4}{R_2 + R_4} I = \dfrac{E}{5r}$.

3. $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{E}{5r} \approx 1,67$ А.

Решение варианта 10-06

Задача 1

1 $L = \dfrac{U_{OTH}^2}{2a_{OTH}} = \dfrac{\left(V_1 + V_2\right)^2}{2\left(a_1 + a_2\right)} = 270$ м.

2 $T = \dfrac{U_{OTH}}{a_{OTH}} = \dfrac{\left(V_1 + V_2\right)}{\left(a_1 + a_2\right)} = \dfrac{10+8}{0,4+0,2} = 30$ с.

Первая материальная точка остановится в момент времени $t_1 = \dfrac{V_1}{a_1} = \dfrac{10}{0,4} = 25$ с, к этому моменту перемещение точки $\dfrac{V_1 t_1}{2} = \dfrac{10\cdot 25}{2} = 125$ м, модуль перемещения точки за следующие пять секунд $a_1\dfrac{\left(T-t_1\right)^2}{2} = 5$ м. Путь – сумма длин этих двух перемещений.

3 $S_1 = \dfrac{V_1 t_1}{2} + a_1\dfrac{\left(T-t_1\right)^2}{2} = 125 + 5 = 130$ м.

Задача 2

$V_{0X} = \dfrac{S}{\tau} = 15$ м/с, $V_{0Y} = \dfrac{g\tau}{2} = 20$ м/с.

1. $tg\alpha = \dfrac{V_{0Y}}{V_{0X}} = \dfrac{g\tau^2}{2S} = \dfrac{4}{3}$, $\sin\alpha = 0,8$.

2. $V_0 = \sqrt{\left(\dfrac{S}{\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{g\tau}{2}\right)^2} = 25$ м/с.

$T = \dfrac{\left(V_1 + V_0\right)\sin\alpha}{g}$

3. $V_1 = \dfrac{gT}{\sin\alpha} - V_0 = 15$ м/с.

Задача 3

Вследствие нерастяжимости нити $a_0 = a_{OTH}$. Тогда ускорение бруска в ЛСО $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{OTH}$ – диагональ ромба (см. рис.1), проекция ускорения бруска на вертикаль $a_{OTH}\sin\alpha$, вертикальное перемещение бруска

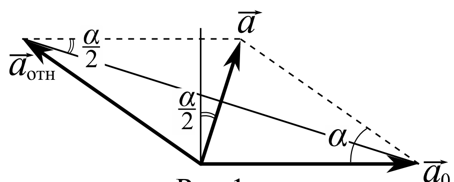


Рис.1

$H = \dfrac{1}{2}\left(a_0\sin\alpha\right)\tau^2$,

$\tau = \sqrt{\dfrac{2H}{a_0 \sin\alpha}} = 0,5$ с.

2. $a = 2a_0 \sin\dfrac{\alpha}{2} \approx 1,6$ м/с^2.

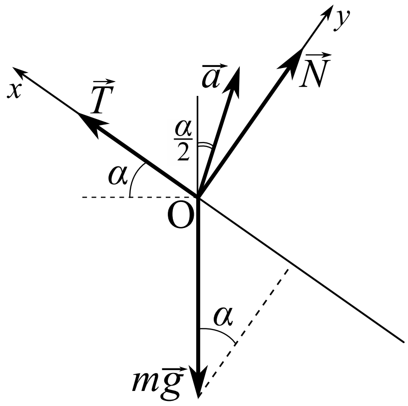


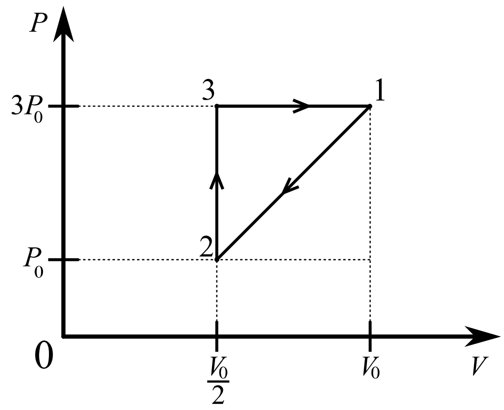
Рис.2

По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N}$, (см. рис.2)
переходим к проекциям сил и ускорения на ось OY $ma\cos\dfrac{\alpha}{2} = N - mg\cos\alpha$, отсюда

$N = m\left(g\cos\alpha + 2a_0\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

3. $N = m\left(g\cos\alpha + a_0\sin\alpha\right) \approx 4,1$ Н.

Задача 4



В состояниях 1 и 2: $3P_0 = a + \dfrac{b}{\rho_0}$, $P_0 = a + \dfrac{b}{2\rho_0}$, отсюда $a = -P_0$, $b = 4P_0\rho_0$, тогда в процессе 1-2 $P = -P_0 + \dfrac{4P_0\rho_0}{\rho} = P_0\left(4\dfrac{V}{V_0} - 1\right)$. Цикл в P,V координатах представлен на рисунке к решению. Наименьшая внутренняя энергия газа в процессе $U_{MIN} = \dfrac{3}{2}P_0\dfrac{V_0}{2} = \dfrac{3}{4}P_0V_0$.

Работа газа в процессе сжатия $A = -\dfrac{1}{2}\left(P_0 + 3P_0\right)\left(V_0 - \dfrac{V_0}{2}\right) = -P_0V_0$

2. $A = -\dfrac{4}{3}U_{MIN} = -2400$ Дж.

Молярная теплоемкость газа в процессе $C = \dfrac{3}{2}R + P\left(\dfrac{\Delta V}{\Delta T}\right)$. С учетом уравнения состояния $PV = RT$ и следствия из него $\dfrac{\Delta P}{P} + \dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta T}{T}$ формула для теплоемкости принимает вид $C = \dfrac{3}{2}R + \dfrac{R}{1 + \dfrac{V}{P}\left(\dfrac{\Delta P}{\Delta V}\right)}$. В процессе сжатия $\left(\dfrac{\Delta P}{\Delta V}\right) = 4\dfrac{P_0}{V_0}$, в конце процесса сжатия $\dfrac{V}{P} = \dfrac{V_0}{2P_0}$, тогда $C = \dfrac{3}{2}R + \dfrac{1}{3}R = \dfrac{11}{6}R$.

3. $\left|\Delta Q\right| = C\left|\Delta T\right| = \dfrac{11}{6}R\left|\Delta T\right| \approx 15$ Дж.

Задача 5

По условию $R_1 = r = 2$ Ом, $R_2 = 4r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 2r$. Сразу после замыкания ключа заряд конденсатора и напряжение на конденсаторе нулевые, тогда сила тока, текущего через батарею, $I = \dfrac{E}{\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}} = \dfrac{E}{\dfrac{3}{4}r+\dfrac{4}{3}r} = \dfrac{12}{25}\dfrac{E}{r}$.

1. $I = \dfrac{12}{25}\dfrac{E}{r} = 18$ А.

Напряжения на параллельно соединенных резисторах:

$R_1 = r$ и $R_3 = 3r$ $U_{13} = I\dfrac{3}{4}r = \dfrac{12}{25}\dfrac{E}{r}\dfrac{3}{4}r = \dfrac{9}{25}E = 27$ В, на R_2 и R_4 $U_{24} = \dfrac{16}{25}E = 48$ В.

2. Сразу после замыкания ключа наибольшая мощность рассеивается на резисторе $R_4 = 2r$. $P_{MAX} = \dfrac{U_{24}^2}{R_4} = 576$ Вт.

Сила тока, текущего на конденсатор сразу после замыкания ключа, равна разности токов, текущих через резисторы R_1 и R_2, $I_C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{R_3}{R_1+R_3}I - \dfrac{R_4}{R_2+R_4}I = \dfrac{E}{5r}$.

3. $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{E}{5r} = 7{,}5$ А.