МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Даны квадратный трёхчлен $f(x)$ и линейная функция $l(x)$ такая, что $l(1) = 2$. Известно, что функция $g(x) = f(l(x)) - l(f(x))$ принимает все действительные значения и $g(0) = 5$. Найдите $f(1)$, если $f(0) = 7$.

   Ответ: 13.

   Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $l(x) = kx + p$. Тогда

   $$g(x) = (ak^2 - ak)x^2 + 2akpx + ap^2 + bp + c - kc - p.$$

   Если $g(x)$ — многочлен второй степени, то его множество значений не совпадает с множеством действительных чисел, следовательно, $ak^2 - ak = 0$. Если при этом $a = 0$ или $k = 0$, то $g(x)$ — константа и не принимает всех действительных значений, следовательно, $k = 1$. Из условия $l(1) = 2$ получаем $p = 1$. Таким образом, $g(x) = 2ax + a + b - 1$. Из условия $g(0) = 5$ получаем $a + b = 6$. Из условия $f(0) = 7$ получаем $c = 7$. Итак, $f(1) = a + b + c = 13$.

2. [4 балла] Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а остальные цифры — не более одного раза?

   Ответ: $C_7^4 C_4^2 \dfrac{6!}{(2!)^2} = 37800$.

   Решение. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_7^4, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из четырех выбранных — C_4^2, количество способов расставить выбранные цифры по шести местам — $\dfrac{6!}{2!\,2!}$ (это число перестановок 6 цифр, делённое на число перестановок пар повторяющихся цифр), поэтому всего можно составить

   $$C_7^4 \cdot C_4^2 \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = 37800$$

   чисел.

3. [5 баллов] В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть точка I — центр этой окружности. Прямые a_C и a_D, проведенные соответственно через точку C параллельно BI и через точку D параллельно AI, пересекаются в точке P. Найдите $\angle DPI$, если $\angle BCD = 100°$.

   Ответ: $\angle DPI = 50°$.

   Решение. Поскольку I — центр вписанной окружности, I является точкой пересечения биссектрис углов четырёхугольника $ABCD$. Поэтому сумма

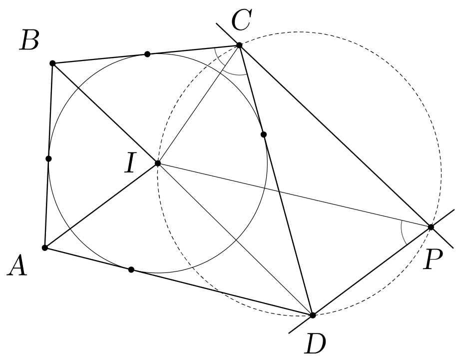
   $$\angle ABI + \angle BAI + \angle CDI + \angle DCI$$

   равна половине суммы углов данного четырёхугольника, то есть $180°$. Тогда из сумм углов треугольников ABI и CDI получаем, что углы BIA и CID в сумме дают $180°$.

Поскольку $CP \parallel BI$, а $DP \parallel AI$, имеем $\angle CPD = \angle BIA$. В четырёхугольнике $CIDP$ сумма противоположных углов CID и CPD равна $180°$, следовательно, этот четырёхугольник вписанный. Значит, $\angle DPI = \angle DCI$. Но CI — биссектриса угла DCB, поэтому

$$\angle BCI = \angle DCI = \angle DPI.$$

Значит, $\angle DPI = \dfrac{1}{2}\angle BCD = 50°$.



4. [5 баллов] Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (a, b) таких, что

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = 30, \\ \text{НОК}(a, b) = 16! \end{cases}$$

Ответ: $2^6 = 64$.

Решение. Так как $\text{НОД}(a; b) = 30$, в разложения на простые множители чисел a и b входит 2, 3, 5, причём каждый из этих простых множителей входит в одно из них ровно в первой степени. В разложение на простые множители числа 16! входят 2, 3, 5, 7, 11, 13, причём 2, 3 и 5 входят в более чем первой степени. Поэтому, для того, чтобы $\text{НОК}(a; b)$ был равен 16!, каждый из простых множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13 должен входить в разложение одного из чисел a и b в той же степени, что и в 16!, и других простых множителей в разложении чисел a и b быть не может. Таким образом, для каждого из простых множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13 нужно выбрать, в разложение какого из чисел a и b он будет входить в соответствующей степени. Количество решений системы равно $2^6 = 64$.

5. [5 баллов] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, которые пересекаются в точке H. Вокруг треугольника DHE описана окружность ω. Касательные к ω в точках D и E пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка AK, если радиус ω равен 10 и $\angle ABC = 60°$.

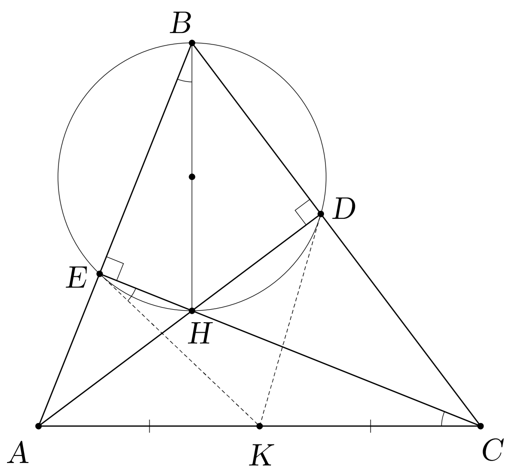
Ответ: $10\sqrt{3}$.

Решение. Поскольку $\angle BEH = \angle BDH = 90°$, четырёхугольник $BEHD$ вписан в окружность ω с диаметром BH.

Пусть K' — середина AC. Тогда EK' — медиана прямоугольного треугольника AEC, поэтому $EK' = AK' = CK'$. Треугольник $EK'C$ равнобедренный, поэтому $\angle K'EC = \angle ECA$. Но $\angle ECA = \angle ABH$, поскольку оба указанных угла дополняют до $90°$ угол A треугольника ABC. Итак, $\angle EBH = \angle CEK'$. Поэтому EK' касается ω, а значит, точки K' и K совпадают.
По теореме синусов длина отрезка ED равна $2R\sin\angle EBD = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$. Треугольники EBD и CBA подобны, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BA} = \cos\angle ABC = \cos 60°$, поэтому

$$AC = \frac{ED}{\cos 60°} = \frac{2R\sin 60°}{\cos 60°} = 2R\,\mathrm{tg}\,60° = 20\sqrt{3},$$

откуда $AK = \dfrac{AC}{2} = 10\sqrt{3}$.



6. [6 баллов] При каких значениях параметра a система уравнений

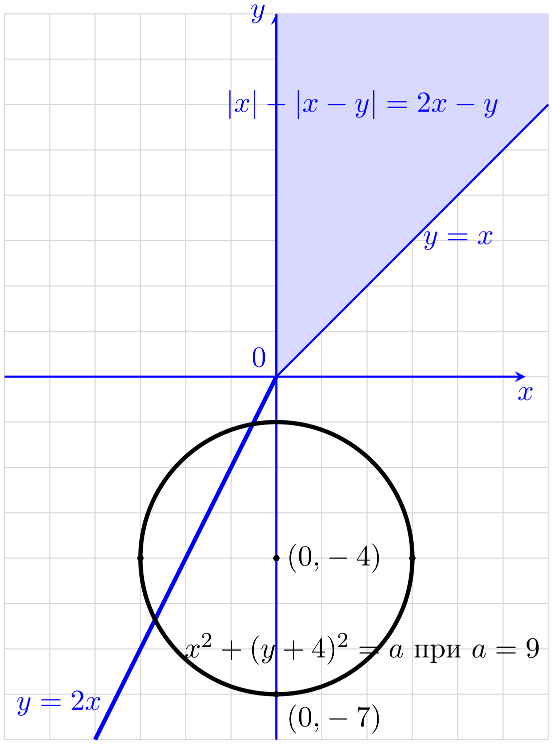
$$\begin{cases} |x|-|x-y|=2x-y, \\ x^2+y^2+8y=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{64}{5}, 0\right]$.

Решение. 1) Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant x$, первое уравнение принимает вид: $2x-y=2x-y$. Подходят все точки данного множества.

2) Если $x<0$ и $y \geqslant x$, первое уравнение принимает вид: $x=0$. Не подходит ни одна точка данного множества.
3) Если $x<0$ и $y<x$, первое уравнение принимает вид: $y=2x$. Подходят точки на прямой $y=2x$ из данного множества.
4) Если $x \geqslant 0$ и $y<x$, первое уравнение принимает вид: $y=x$. Не подходит ни одна точка данного множества.
Второе уравнение $x^2+(y+4)^2=a+16$ при $a>-16$ задаёт окружность с центром в точке $(0,-4)$ и радиусом $\sqrt{a+16}$; точку $(0,-4)$ при $a=-16$ и пустое множество при $a<-16$.
При $-16<a<-\dfrac{64}{5}$ окружность не имеет с первым множеством общих точек.
При $a=-\dfrac{64}{5}$ окружность касается прямой $y=2x$ и имеет с первым множеством ровно одну общую точку.
При $a \in \left(-\dfrac{64}{5}, 0\right]$ окружность пересекает прямую $y=2x$ и имеет с первым множеством ровно две общие точки.
При $a>0$ окружность имеет бесконечно много общих точек с первым множеством.



7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^7+y^7}{z^3}+\dfrac{y^7+z^7}{x^3}+\dfrac{z^7+x^7}{y^3}=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2, \\ \left(\sqrt{yz}-2\right)\left(\sqrt{zx}-4\right) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x=y=z \in [-4,-2] \cup [2,4]$.

Решение. Найдём ОДЗ. Из уравнения получаем, что числа x, y, z ненулевые, а из неравенства, что они одного знака (так как подкоренные выражения неотрицательные). В силу неравенства между среднем арифметическим и средним геометрическим (на ОДЗ соответствующие выражения неотрицательные) получаем, что

$$\frac{x^7+y^7}{z^3}+\frac{y^7+z^7}{x^3}+\frac{z^7+x^7}{y^3}=\left(\frac{x^7}{y^3}+\frac{y^7}{x^3}\right)+\left(\frac{y^7}{z^3}+\frac{z^7}{y^3}\right)+\left(\frac{z^7}{x^3}+\frac{x^7}{z^3}\right) \geqslant 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2.$$

Так как неравенство между средним арифметических и средним геометрическим превращается в равенство, только если числа равны, из уравнения системы получаем, что $\dfrac{x^7}{y^3}=\dfrac{y^7}{x^3}$, откуда $x=y$ в силу того, что они одного знака. Аналогично $y=z$, поэтому получаем, что $x=y=z$. Тогда неравенство системы принимает вид

$$(|x|-2)(|x|-4) \leqslant 0,$$

откуда $|x| \in [2,4]$ (так как $|x|>0$) и $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Даны квадратный трёхчлен $f(x)$ и линейная функция $l(x)$ такая, что $l(1)=2$. Известно, что функция $g(x)=f(l(x))-l(f(x))$ принимает все действительные значения и $g(0)=3$. Найдите $f(1)$, если $f(0)=5$.

   Ответ: 9.

   Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, $l(x)=kx+p$. Тогда

   $$g(x)=(ak^2-ak)x^2+2akpx+ap^2+bp+c-kc-p.$$

   Если $g(x)$ — многочлен второй степени, то его множество значений не совпадает с множеством действительных чисел, следовательно, $ak^2-ak=0$. Если при этом $a=0$ или $k=0$, то $g(x)$ — константа и не принимает всех действительных значений, следовательно, $k=1$. Из условия $l(1)=2$ получаем $p=1$. Таким образом, $g(x)=2ax+a+b-1$. Из условия $g(0)=3$ получаем $a+b=4$. Из условия $f(0)=5$ получаем $c=5$. Итак, $f(1)=a+b+c=9$.

2. [4 балла] Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

   Ответ: $C_9^3 C_3^2 \dfrac{7!}{(3!)^2}=35280$.

   Решение. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_9^3, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из трех выбранных — C_3^2, количество способов расставить выбранные цифры по семи местам — $\dfrac{7!}{3!\,3!}$ (это число перестановок 7 цифр, делённое на число перестановок троек повторяющихся цифр), поэтому всего можно составить

   $$C_9^3\cdot C_3^2\cdot\frac{7!}{3!\,3!}=\frac{7!}{6!\,3!}\cdot\frac{3!}{2!}\cdot\frac{7!}{3!\,3!}=35280$$

   чисел.

3. [5 баллов] В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть точка I — центр этой окружности. Прямые a_C и a_D, проведенные соответственно через точку C параллельно BI и через точку D параллельно AI, пересекаются в точке P. Найдите $\angle DPI$, если $\angle BCD=92^\circ$.

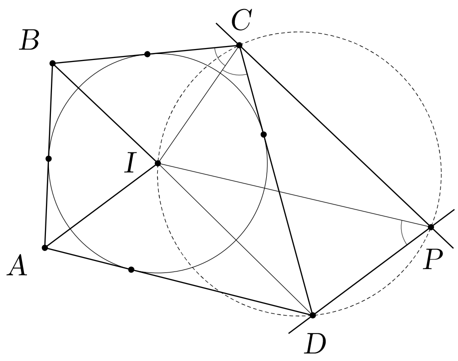
   Ответ: $\angle DPI=46^\circ$.

   Решение. Поскольку I — центр вписанной окружности, I является точкой пересечения биссектрис углов четырёхугольника $ABCD$. Поэтому сумма

   $$\angle ABI+\angle BAI+\angle CDI+\angle DCI$$

   равна половине суммы углов данного четырёхугольника, то есть 180°. Тогда из сумм углов треугольников ABI и CDI получаем, что углы BIA и CID в сумме дают 180°.

Поскольку $CP \parallel BI$, а $DP \parallel AI$, имеем $\angle CPD = \angle BIA$. В четырёхугольнике $CIDP$ сумма противоположных углов CID и CPD равна $180°$, следовательно, этот четырёхугольник вписанный. Значит, $\angle DPI = \angle DCI$. Но CI — биссектриса угла DCB, поэтому



$$\angle BCI = \angle DCI = \angle DPI.$$

Значит, $\angle DPI = \frac{1}{2}\angle BCD = 46°$.

4. [5 баллов] Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (a, b) таких, что

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = 60, \\ \text{НОК}(a, b) = 22! \end{cases}$$

Ответ: $2^8 = 256$.

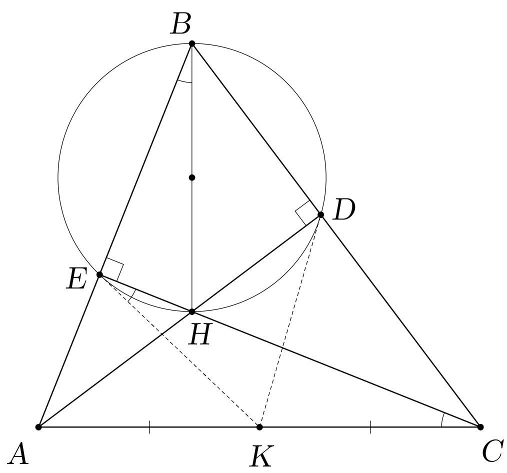
Решение. Так как $\text{НОД}(a; b) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, в разложения на простые множители чисел a и b входит 2, 3, 5, причём 3 и 5 входит в одно из них ровно в первой степени, а 2 — ровно во второй. В разложение на простые множители числа 22! входят 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, причём 3 и 5 входят в более чем первой степени, а 2 — более чем во второй. Поэтому, для того, чтобы $\text{НОК}(a; b)$ был равен 22!, каждый из простых множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 должен входить в разложение одного из чисел a и b в той же степени, что и в 22!, и других простых множителей в разложении чисел a и b быть не может. Таким образом, для каждого из простых множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 нужно выбрать, в разложение какого из чисел a и b он будет входить в соответствующей степени. Количество решений системы равно $2^8 = 256$.

5. [5 баллов] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, которые пересекаются в точке H. Вокруг треугольника DHE описана окружность ω. Касательные к ω в точках D и E пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка AK, если радиус ω равен 20 и $\angle ABC = 30°$.

Ответ: $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

Решение. Поскольку $\angle BEH = \angle BDH = 90°$, четырёхугольник $BEHD$ вписан в окружность ω с диаметром BH.

Пусть K' — середина AC. Тогда EK' — медиана прямоугольного треугольника AEC, поэтому $EK' = AK' = CK'$. Треугольник $EK'C$ равнобедренный, поэтому $\angle K'EC = \angle ECA$. Но $\angle ECA = \angle ABH$, поскольку оба указанных угла дополняют до $90°$ угол A треугольника ABC. Итак, $\angle EBH = \angle CEK'$. Поэтому EK' касается ω, а значит, точки K' и K совпадают. По теореме синусов длина отрезка ED равна $2R \sin \angle EBD = 2R \sin 30° = R$. Треугольники EBD и CBA подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} = \cos \angle ABC = \cos 30°$, поэтому



$$AC = \frac{ED}{\cos 30°} = \frac{2R \sin 30°}{\cos 30°} = 2R \operatorname{tg} 30° = \frac{40\sqrt{3}}{3},$$

откуда $AK = \frac{AC}{2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

6. [6 баллов] При каких значениях параметра a система уравнений

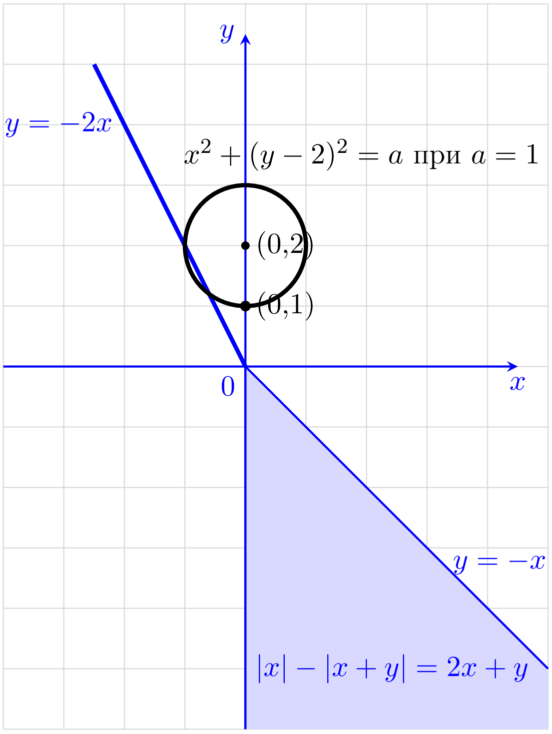
$$\begin{cases} |x| - |x+y| = 2x + y, \\ x^2 + y^2 - 4y = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{16}{5}, 0\right]$.

Решение. 1) Если $x \geqslant 0$ и $y > -x$, первое уравнение принимает вид: $y = -x$. Не подходит ни одна точка данного множества.

2) Если $x < 0$ и $y > -x$, первое уравнение принимает вид: $y = -2x$. Подходят точки на прямой $y = -2x$ из данного множества.
3) Если $x < 0$ и $y \leqslant -x$, первое уравнение принимает вид: $x = 0$. Не подходит ни одна точка данного множества.
4) Если $x \geqslant 0$ и $y \leqslant -x$, первое уравнение принимает вид: $2x + y = 2x + y$. Подходят все точки данного множества.
Второе уравнение $x^2 + (y-2)^2 = a + 4$ при $a > -4$ задаёт окружность с центром в точке $(0, 2)$ и радиусом $\sqrt{a+4}$; точку $(0, 2)$ при $a = -4$ и пустое множество при $a < -4$.
При $-4 < a < -\dfrac{16}{5}$ окружность не имеет с первым множеством общих точек.
При $a = -\dfrac{16}{5}$ окружность касается прямой $y = -2x$ и имеет с первым множеством ровно одну общую точку.
При $a \in \left(-\dfrac{16}{5}, 0\right]$ окружность пересекает прямую $y = -2x$ и имеет с первым множеством ровно две общие точки.
При $a > 0$ окружность имеет бесконечно много общих точек с первым множеством.



7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^9+y^9}{z} + \dfrac{y^9+z^9}{x} + \dfrac{z^9+x^9}{y} = 2x^4y^4 + 2y^4z^4 + 2z^4x^4, \\ \left(\sqrt{xy} - 1\right)\left(\sqrt{yz} - 3\right) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = z \in [-3, -1] \cup [1, 3]$.

Решение. Найдём ОДЗ. Из уравнения получаем, что числа x, y, z ненулевые, а из неравенства, что они одного знака (так как подкоренные выражения неотрицательные). В силу неравенства между среднем арифметическим и средним геометрическим (на ОДЗ соответствующие выражения неотрицательные) получаем, что

$$\frac{x^9+y^9}{z} + \frac{y^9+z^9}{x} + \frac{z^9+x^9}{y} = \left(\frac{x^9}{y} + \frac{y^9}{x}\right) + \left(\frac{y^9}{z} + \frac{z^9}{y}\right) + \left(\frac{z^9}{x} + \frac{x^9}{z}\right) \geqslant 2x^4y^4 + 2y^4z^4 + 2z^4x^4.$$

Так как неравенство между средним арифметических и средним геометрическим превращается в равенство, только если числа равны, из уравнения системы получаем, что $\dfrac{x^9}{y} = \dfrac{y^9}{x}$, откуда $x = y$ в силу того, что они одного знака. Аналогично $y = z$, поэтому получаем, что $x = y = z$. Тогда неравенство системы принимает вид

$$(|x| - 1)(|x| - 3) \leqslant 0,$$

откуда $|x| \in [1, 3]$ (так как $|x| > 0$) и $x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 3, то полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму всех четырёх корней этих уравнений.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2+cx+b=0$. По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 \cdot x_2 = c;$$

$$x_1 + x_2 - 6 = -c, \quad (x_1 - 3)(x_2 - 3) = b,$$

   то есть $c = b + 6$ и

$$x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = b \;\Rightarrow\; c + 3b + 9 = b \;\Rightarrow\; b = -5.$$

   Значит, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b - c = -2b - 6 = 4$.

2. [5 баллов] Спортсмен планирует свой режим тренировок на два месяца. В течение 60 дней ему необходимо провести 9 тренировок, причём после каждой тренировки, кроме последней, должны обязательно идти три дня перерыва, не включающие день тренировки. Сколькими способами он может составить себе расписание? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

   Ответ: C_{36}^9.

   Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_9$ — номера дней тренировок. Тогда $x_1 \geqslant 1$, $x_2 > x_1 + 3$, …, $x_9 > x_8 + 3$, $x_9 \leqslant 60$. Обозначим $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - 3$, $y_3 = x_3 - 6$, … $y_9 = x_9 - 24$. Тогда достаточно выбрать числа $y_1, \ldots, y_9$, удовлетворяющими условиям

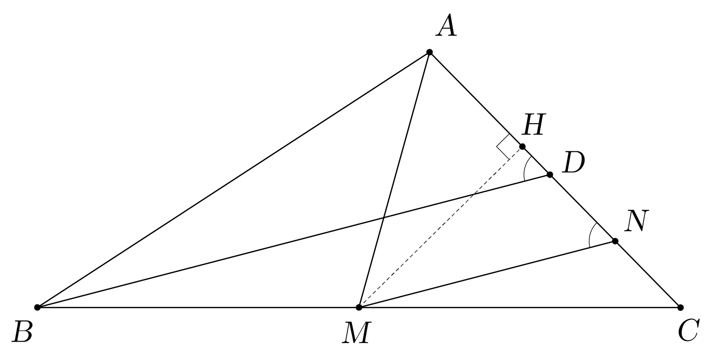
$$1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_9 \leqslant 60 - 24 = 36,$$

   что можно сделать C_{36}^9 способами.

3. [4 балла] Медиана AM треугольника ABC равна 2. На его стороне AC выбрана такая точка D, что $BD = 4$, а $\angle ADB = 60°$. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

   Ответ: $\sqrt{3}$.

   Решение. Проведём через точку M прямую $MN \parallel BD$ (точка N лежит на AC).



Отрезок MN является средней линией треугольника BCD, поэтому $MN = \frac{1}{2}BD = 2$. Поскольку $MN \parallel BD$, $\angle ANM = \angle ADB = 60^\circ$. Треугольник AMN равнобедренный и имеет угол 60°, поэтому он равносторонний. Искомое расстояние равно высоте MH этого треугольника:

$$MH = AM \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

4. [5 баллов] Сумма пяти подряд идущих двузначных чисел имеет ровно 6 делителей. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

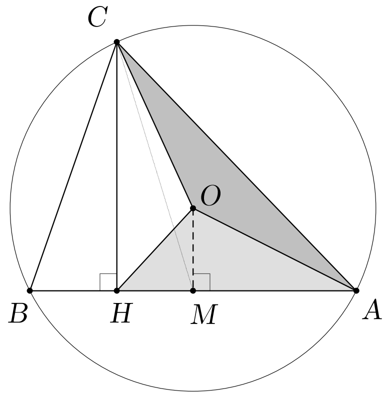
Ответ: 75, 175, 245, 275, 325, 425, 475.

Решение. Рассмотрим пять подряд идущих двузначных чисел $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Их сумма равна $5n$. Следовательно, эта сумма кратна 5. При этом $60 \leqslant 5n \leqslant 485$. Если число имеет ровно 6 делителей, то оно имеет вид p^5 или p^2q, где $p \neq q$ — простые. Так как сумма делится на 5, то она равна $5^5 = 3125$, $25q$ или $5p^2$, из них условию $60 \leqslant 5n \leqslant 485$ удовлетворяют числа 75, 175, 275, 325, 425, 475, 245. Они же и равны сумме исходных чисел.

5. [5 баллов] CH — высота остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O, а $AC > BC$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AOC равна 10, а площадь треугольника AOH равна 12.

Ответ: 44.

Решение. Пусть M — середина AB. Тогда OM — серединный перпендикуляр к стороне AB. Поскольку $OM \parallel CH$, треугольники COM и HOM имеют одинаковую площадь. Поэтому (невыпуклый) четырёхугольник $ACOH$ имеет ту же площадь, что треугольник ACM. Но медиана CM делит площадь треугольника ABC пополам, а значит, $S_{ABC} = 2S_{ACM} = 2S_{ACOH} = 2(S_{AOC} + S_{AOH}) = 2 \cdot (10 + 12) = 44$.



6. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a + \frac{x^2}{a} = \max\left(2 + \frac{x}{a}; 1 - \frac{2x}{a}\right)$$

имеет нечётное количество решений.

Ответ: $a \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Решение. Пусть M — множество точек $(x; a)$, удовлетворяющих данному уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $2 + \frac{x}{a}$ и $1 - \frac{2x}{a}$ больше. Заметим, что

$$2 + \frac{x}{a} \geqslant 1 - \frac{2x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+3x}{a} \geqslant 0.$$

При $\frac{a+3x}{a} \geqslant 0$ уравнение принимает вид

$$a + \frac{x^2}{a} = 2 + \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (a-1)^2 = \frac{5}{4}.$$

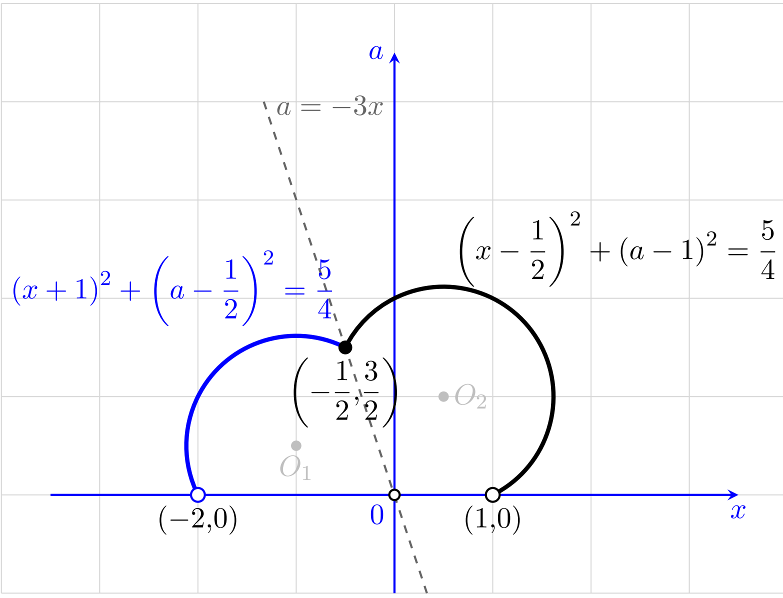
Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2};1\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\frac{a+3x}{a} \geqslant 0$, есть дуга данной окружности с концами $(1;0)$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Заметим также, что $\left(\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$ — это точка данной дуги с наибольшей ординатой.

При $\frac{a+3x}{a} < 0$ уравнение принимает вид

$$a+\frac{x^2}{a} = 1-\frac{2x}{a} \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\frac{a+3x}{a} < 0$, есть дуга данной окружности с концами $(-2;0)$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Заметим, что $\left(-1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ — это точка данной дуги с наибольшей ординатой.

Итак, множество M состоит из двух дуг окружностей, имеющих общую точку $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Это множество изображено на графике. При заданном значении параметра a количество решений данного уравнения равно количеству точек пересечения множества M с горизонтальной прямой, имеющей ординату a.



Найдём количество точек пересечения горизонтальной прямой с ординатой a со множеством M:

1) при $a \in (-\infty, 0]$ — 0 точек.
2) при $a \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ — 2 точки.
3) при $a = \frac{3}{2}$ — 3 точка.
4) при $a \in \left(\frac{3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ — 4 точки.
5) при $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — 3 точки.
6) при $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$ — 2 точки.
7) при $a = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$ — 1 точки.
8) при $a \in \left(\frac{2+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ — 0 точек.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a \in \left\{\frac{3}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2 = x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{100}x_1, \\ |x_1-1|+|x_2-2|+\ldots+|x_{100}-100| \leqslant 2500. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} \in [50{,}51]$.

Решение. Умножая уравнение системы на 2, перенося в левую часть и выделяя полные квадраты, получаем, что

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{100}-x_1)^2 = 0,$$

откуда $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = x$. Неравенство системы означает, что сумма расстояний от x до $1, 2, \ldots, 100$ не более 2500. Но сумма расстояний от x до 50 и 51 не менее 1, от x до 49 и 52 не менее 3, ..., от x до 1 и 100 не менее 99. Так как $1 + 3 + \ldots + 99 = 2500$, все неравенства превращаются в равенство, и x лежит между 50 и 51.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 2, то полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Найдите сумму всех четырёх корней этих уравнений.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2+cx+b=0$. По теореме Виета:
$$x_1+x_2=-b, \quad x_1\cdot x_2=c;$$
$$x_1+x_2+4=-c, \quad (x_1+2)(x_2+2)=b,$$
   то есть $c=b-4$ и
$$x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=b \;\Rightarrow\; c-2b+4=b \;\Rightarrow\; b=0.$$
   Значит, $x_1+x_2+x_3+x_4=-b-c=-2b+4=4$.

2. [5 баллов] Спортсмен планирует свой режим тренировок на три месяца. В течение 90 дней ему необходимо провести 20 тренировок, причём после каждой тренировки, кроме последней, должны обязательно идти два дня перерыва, не включающие день тренировки. Сколькими способами он может составить себе расписание? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

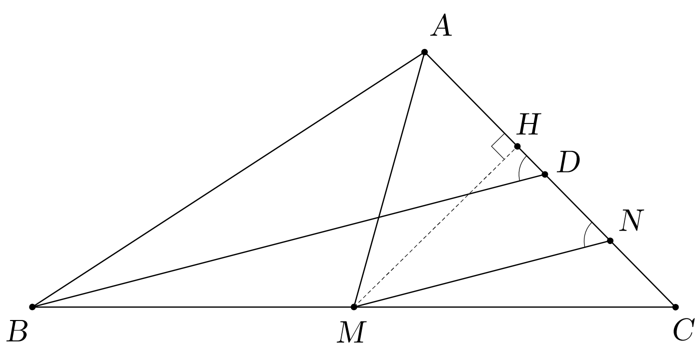
   Ответ: C_{52}^{20}.

   Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{20}$ — номера дней тренировок. Тогда $x_1 \geqslant 1$, $x_2 > x_1+2$, $\ldots$, $x_{20} > x_{19}+2$, $x_{20} \leqslant 90$. Обозначим $y_1=x_1$, $y_2=x_2-2$, $y_3=x_3-4$, $\ldots$ $y_{20}=x_{20}-38$. Тогда достаточно выбрать числа $y_1, \ldots, y_{20}$, удовлетворяющими условиям
$$1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{20} \leqslant 90-38=52,$$
   что можно сделать C_{52}^{20} способами.

3. [4 балла] Медиана AM треугольника ABC равна 6. На его стороне AC выбрана такая точка D, что $BD=12$, а $\angle ADB=60°$. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

   Ответ: $3\sqrt{3}$.

   Решение. Проведём через точку M прямую $MN \parallel BD$ (точка N лежит на AC).



Отрезок MN является средней линией треугольника BCD, поэтому $MN = \frac{1}{2}BD = 2$. Поскольку $MN \parallel BD$, $\angle ANM = \angle ADB = 60°$. Треугольник AMN равнобедренный и имеет угол $60°$, поэтому он равносторонний. Искомое расстояние равно высоте MH этого треугольника:

$$MH = AM \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

4. [5 баллов] Сумма семи подряд идущих двузначных чисел имеет ровно 6 делителей. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

Ответ: 98, 147, 175, 245, 539, 637.

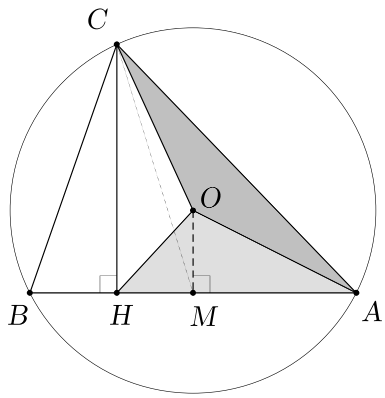
Решение. Рассмотрим семь подряд идущих двузначных чисел $n-3$, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Их сумма равна $7n$. Следовательно, эта сумма кратна 7. При этом $91 \leqslant 7n \leqslant 672$. Если число имеет ровно 6 делителей, то оно имеет вид p^5 или p^2q, где $p \neq q$ — простые. Так как сумма делится на 7, то она равна $7^5 = 16807$, $49q$ или $7p^2$, из них условию $91 \leqslant 5n \leqslant 672$ удовлетворяют числа 98, 147, 245, 539, 637, 175. Они же и равны сумме исходных чисел.

5. [5 баллов] CH — высота остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность с центром O, а $AC > BC$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AOC равна 20, а площадь треугольника AOH равна 28.

Ответ: 96.

Решение. Пусть M — середина AB. Тогда OM — серединный перпендикуляр к стороне AB.

Поскольку $OM \parallel CH$, треугольники COM и HOM имеют одинаковую площадь. Поэтому (невыпуклый) четырёхугольник $ACOH$ имеет ту же площадь, что треугольник ACM. Но медиана CM делит площадь треугольника ABC пополам, а значит, $S_{ABC} = 2S_{ACM} = 2S_{ACOH} = 2(S_{AOC} + S_{AOH}) = 2 \cdot (20 + 28) = 96$.



6. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a + \frac{x^2}{a} = \max\left(3 + \frac{2x}{a}; 2 - \frac{3x}{a}\right)$$

имеет нечётное количество решений.

Ответ: $\left\{\frac{5}{2}, \frac{2+\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Решение. Пусть M — множество точек $(x; a)$, удовлетворяющих данному уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $3 + \frac{2x}{a}$ и $2 - \frac{3x}{a}$ больше. Заметим, что

$$3 + \frac{2x}{a} \geqslant 2 - \frac{3x}{a} \;\Leftrightarrow\; \frac{a+5x}{a} \geqslant 0.$$

При $\frac{a+5x}{a} \geqslant 0$ уравнение принимает вид

$$a + \frac{x^2}{a} = 3 + \frac{2x}{a} \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 + \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\frac{a+5x}{a}\geqslant 0$, есть дуга данной окружности с концами $(2;0)$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$. Заметим также, что $\left(1,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ — это точка данной дуги с наибольшей ординатой.

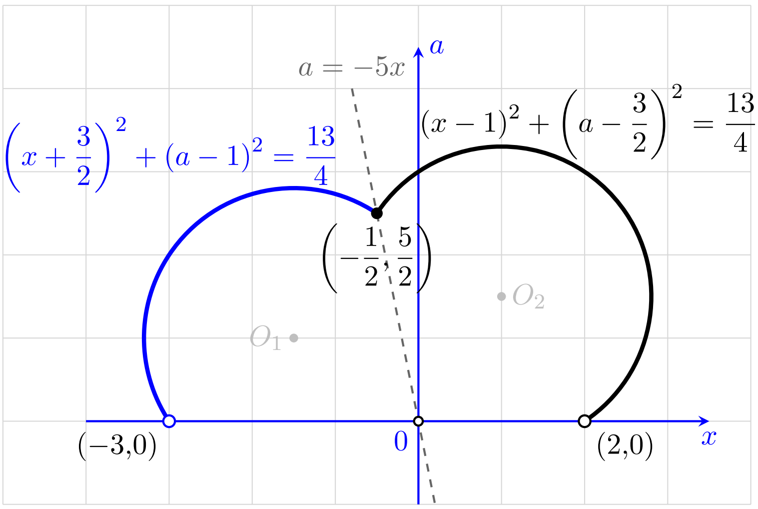
При $\frac{a+5x}{a}<0$ уравнение принимает вид

$$a+\frac{x^2}{a}=2-\frac{3x}{a} \;\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(a-1)^2=\frac{13}{4}.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\frac{a+5x}{a}<0$, есть дуга данной окружности с концами $(-3;0)$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$. Заметим, что $\left(-\frac{3}{2},\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right)$ — это точка данной дуги с наибольшей ординатой.

Итак, множество M состоит из двух дуг окружностей, имеющих общую точку $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$. Это множество изображено на графике. При заданном значении параметра a количество решений данного уравнения равно количеству точек пересечения множества M с горизонтальной прямой, имеющей ординату a.

Найдём количество точек пересечения горизонтальной прямой с ординатой a со множеством M:



1) при $a\in(-\infty,0]$ — 0 точек.
2) при $a\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$ — 2 точки.
3) при $a=\frac{5}{2}$ — 3 точки.
4) при $a\in\left(\frac{5}{2},\frac{2+\sqrt{13}}{2}\right)$ — 4 точки.
5) при $a=\frac{2+\sqrt{13}}{2}$ — 3 точки.
6) при $a\in\left(\frac{2+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ — 2 точки.
7) при $a=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ — 1 точки.
8) при $a\in\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$ — 0 точек.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a\in\left\{\frac{5}{2};\frac{2+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{50}^2=x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{50}x_1,\\ |x_1+1|+|x_2+2|+\ldots+|x_{50}+50|\leqslant 625.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=x_2=\ldots=x_{50}\in[-26,-25]$.

Решение. Умножая уравнение системы на 2, перенося в левую часть и выделяя полные квадраты, получаем, что

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{50}-x_1)^2=0,$$

откуда $x_1 = x_2 = \ldots = x_{50} = x$. Неравенство системы означает, что сумма расстояний от x до $-1, -2, \ldots, -50$ не более 625. Но сумма расстояний от x до -25 и -26 не менее 1, от x до -24 и -27 не менее 3, ..., от x до -1 и -50 не менее 49. Так как $1 + 3 + \ldots + 49 = 625$, все неравенства превращаются в равенство, и x лежит между -26 и -25.