11 класс – день 1

1. а) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 1$, $BP : PC = 2$, а высота BH треугольника ABC равна 0,5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 3.

   б) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 2$, $BP : PC = 0{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 3. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 1 или -1.

   в) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = \sqrt{2}$, $BP : PC = 3$, а высота BH треугольника ABC равна 2. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 2.

   г) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 4$, $BP : PC = 1{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 4.

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = a$, $BP : PC = k$, а высота BH треугольника ABC равна h. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
Ответ: $\frac{a^2(k+1)}{2h}$.

Решение. Так как точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от концов этого отрезка, $CP = AP = a$. Следовательно, $BP = k \cdot CP = ak$. Обозначим $\angle ACP = \gamma$. Из прямоугольного треугольника BCH следует, что $\sin\gamma = \frac{BH}{BC} = \frac{h}{ak+a}$. Но тогда по теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника ACP, находится однозначно:

$$R = \frac{AP}{2\sin\gamma} = a : \frac{2h}{a(k+1)} = \frac{a^2(k+1)}{2h}.$$

Если конструкция не существует, принимаются также ответы “-1” или “нет решений”.

2. а) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,528$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 110.

Решение. Так как $q^5 = 17\,528 - 7p = 7(2\,504 - p)$, число q^5 должно делиться на 7. Но ввиду того, что оно простое, возможно только, что $q = 7$. Тогда $p = 103$. Таким образом, сумма $p + q$ определяется однозначно, и она равна 110.

б) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,556$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

в) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,752$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 112.

г) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,774$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

3. а) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 13-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 13-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 13-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 13-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем Ваня, съели мама и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,006.

Решение. Пусть первый раз мама откусила x от шоколадки. Так как Ване достаётся $\frac{12}{13}$ от исходной шоколадки, он в первый раз откусывает $\frac{12x}{13}$. Аналогично, папа откусывает $\frac{144x}{169}$. Таким образом, первые куски шоколада, съеденные мамой, Ваней и папой, относятся как

$$x : \frac{12x}{13} : \frac{144x}{169} = 169 : 156 : 144.$$

Отношения всех последующих кусков точно такие же, поэтому общие количества съеденного шоколада находятся в таком же отношении. Значит, мама и папа съели в $\frac{169+144}{156}$ раз больше. Округляя, получаем 2,006.

б) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 7-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 7-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 7-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 7-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели Ваня и мама вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,024.

в) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 12-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 12-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 12-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 12-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели мама и Ваня вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,281.

г) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 14-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 14-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 14-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 14-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем мама, съели Ваня и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 1,791.

4. а) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 302 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{100}^3 + 2 \cdot C_{101}^3 + 100 \cdot (100+1)^2 = 1\,515\,100$.

Решение. Найдем количество способов выбрать нужные три числа из натуральных чисел от 1 до $3n+2$. Все способы разобьём на два класса: к первому отнесём все те тройки, в которых остатки всех трёх чисел от деления на 3 одинаковы, а ко второму — тройки, в которых все три остатка от деления на 3 встречаются по одному разу. Общее число способов из первого класса равно $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3$, поскольку чисел, кратных 3 — всего n, а чисел, имеющих остатки 1 и 2 при делении на 3 — по $n+1$ штук. Число способов из второго класса, соответственно, равно $n \cdot (n+1)^2$. Получаем ответ $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3 + n \cdot (n+1)^2$.

б) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 272 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{90}^3 + 2 \cdot C_{91}^3 + 90 \cdot (90+1)^2 = 1\,105\,740$.

в) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 242 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{80}^3 + 2 \cdot C_{81}^3 + 80 \cdot (80+1)^2 = 777\,680$.

г) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 212 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{70}^3 + 2 \cdot C_{71}^3 + 70 \cdot (70+1)^2 = 521\,920$.

5. а) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT=3$, $EP=4$.
Ответ: 5,76.

б) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT=5$, $EP=10$.
Ответ: 20.

в) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT=12$, $EP=6$.
Ответ: 28,8.

г) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT=4$, $EP=12$.
Ответ: 14,4.

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в. точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT=b$, $EP=a$.
Ответ: $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.
Решение. Углы BMP и BKP — прямые, так как вписаны в окружность и опираются на её диаметр BP. Значит, в четырёхугольнике $KBMP$ три прямых угла, и он прямоугольник. Диагональ BP этого четырёхугольника является биссектрисой его угла B, поэтому он является квадратом. Заметим также, что $MT \parallel AB$, $EK \parallel BC$.
Пусть BS — биссектриса треугольника ABC. Так как биссектриса делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам,

$$\frac{BP}{PS}=\frac{AB}{AS} \quad \text{(свойство биссектрисы для } \triangle ABS\text{)}, \tag{4}$$

$$\frac{AS}{SC}=\frac{AB}{BC} \Longleftrightarrow \frac{AS}{AC-AS}=\frac{AB}{BC} \Longleftrightarrow AS=\frac{AB\cdot AC}{AB+BC}. \tag{5}$$

Подставляя выражение для AS из (5) в (4), получаем $\frac{BP}{PS}=\frac{AB+BC}{AC}$. Поскольку треугольники ABC и TPE подобны, отсюда следует, что $\frac{AB+BC}{AC}=\frac{PT+PE}{ET}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Известно, что если стороны треугольника равны x и y, а угол между ними равен α, его биссектриса, проведённая из вершины этого угла, определяется формулой $l=\frac{2xy\cos\frac{\alpha}{2}}{x+y}$. Следовательно, $PS=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Но тогда $BP=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит, площадь квадрата $KBMP$ есть $S=\frac{1}{2}BP^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6. а) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 10, а всех конфет N — не менее 40?

Ответ: 26.

Решение. Пусть n, m, k — количества карамелек, шоколадных конфет и ирисок в изначальном новогоднем подарке соответственно. Обозначим за x то количество ирисок, которое Серёжа должен съесть, чтобы выполнялись условия задачи. Тогда из первого условия получаем равенство

$$2\frac{m}{N} = \frac{m}{N-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad N = 2x.$$

Из второго условия следует, что

$$\frac{k-x}{N-x} = \frac{n}{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 2(k-x).$$

Так как шоколадных конфет 10, то получаем, что сумма всех конфет первоначального набора равна $2x = 2(k-x)+10+k$, поэтому $4x-3k=10$. У получившегося диофантова уравнения решениями являются пары $x = 4+3t$, $k = 2+4t$, где t — произвольное целое число. Так как $N = 2x = 2(4+3t) \geqslant 40$, то $t \geqslant 6$, поэтому минимальное количество ирисок равно $k = 2+4t = 26$. Остаётся заметить, что при $n=8$, $m=10$, $k=26$, $N=44$, $x=22$ условие задачи выполнено.

б) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 11, а всех конфет N — не менее 50?

Ответ: 31.

в) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, утроится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 15, а всех конфет N — не менее 60?

Ответ: 48.

г) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, утроится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 12, а всех конфет N — не менее 57?
Ответ: 42.

7. а) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 8$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

Ответ: 1,125.

Решение. Зададим на прямой AC координаты так, чтобы пункт A был расположен в начале координат, B — в точке $8x_0$, а C — в точке с координатой $9x_0$. Пусть П, В, К и Т — числа, обратные скоростям Пятачка, Винни-Пуха, Кролика и Тигры соответственно. Тогда законы изменения координаты Пятачка и Тигры в зависимости от времени τ имеют вид $\tau = \text{П}x$ и $\tau = \text{Т}x$ соответственно, а Винни-Пуха и Кролика, соответственно, $\tau = \text{В}(x - 8x_0)$ и $\tau = -\text{К}(x - 9x_0)$. Поскольку у домика Совы (координата x_1) встретились как Пятачок и Винни-Пух, так и Кролик и Тигра,

$$\begin{cases} \text{П}x_1 = \text{В}(x_1 - 8x_0), \\ \text{Т}x_1 = -\text{К}(x_1 - 9x_0). \end{cases}$$

Отсюда $\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$. Аналогично, поскольку встречи Тигры и Винни-Пуха, а также Пятачка и Кролика произошли у дупла с мёдом (координата x_2),

$$\begin{cases} \text{П}x_2 = -\text{К}(x_2 - 9x_0), \\ \text{Т}x_2 = \text{В}(x_2 - 8x_0). \end{cases}$$

Из этой системы $\frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}+\text{П}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$. Из полученных выше соотношений

$$\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}, \qquad \frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}+\text{П}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}} \tag{6}$$

следует, что $\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}-\text{П}}$. Перемножая и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$\text{ВП} - \text{ПК} - \text{П}^2 = \text{ВТ} - \text{КТ} - \text{Т}^2 \Leftrightarrow (\text{П} - \text{Т})(\text{В} - \text{П} - \text{К} - \text{Т}) = 0.$$

По условию скорости Пятачка и Тигры различны, поэтому $\text{В} = \text{П} + \text{К} + \text{Т}$. Но тогда соотношения (6) принимают вид $1 = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$, а это значит, что отношение скорости Кролика к скорости Винни Пуха равно $\frac{\text{В}}{\text{К}} = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

б) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 0{,}5$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;

- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 3.

в) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 5 : 3$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 1,6.

г) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 4 : 7$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 2,75.

8. а) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{10}{\sqrt{149}}$.

Ответ: 0,7.

Решение. Так как проекции боковых рёбер на плоскость основания равны, то и сами боковые рёбра равны, т.е. $SA = SB = SC$. Проекции равных рёбер SB и SC на противоположные им боковые грани равны между собой, поэтому равны и высоты пирамиды, проведённые из вершин B и C на грани SAC и SAB. Но из формулы объёма пирамиды отсюда следует равенство площадей этих граней.

Грани SAB и SAC — это равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами, причём ввиду того, что $AB \neq AC$, эти треугольники не равны между собой.. Из равенства их площадей следует, что $\sin\angle ASB = \sin\angle ASC$, а так как эти углы не равны, $\angle ASB + \angle ASC = \pi$. Пусть $\angle SAB = \alpha$. Тогда $\angle ASB = \pi - 2\alpha$, $\angle ASC = 2\alpha$, $\angle SAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда имеем

$$1 = \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} = \frac{0{,}5AS \cdot AB\sin\alpha}{0{,}5AS \cdot AC\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{AB}{AC} \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad AB : AC = \operatorname{ctg}\alpha.$$

б) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{8}{\sqrt{73}}$.

Ответ: 0,375.

в) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Ответ: 1,25.

г) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{5}{\sqrt{146}}$.

Ответ: 2,2.

9. а) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 1\,000\,001$?

Ответ: 144.

Решение. Правая часть равенства имеет остаток 2 от деления на 7. Левая часть имеет остаток 2 от деления на 7, только если a имеет остаток 1 или 5 от деления на 7.

Разберём эти случаи.

Пусть $a = 7k+1$, где k — целое неотрицательное число. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2+3k+b = 142\,857$. Заметим, что для каждого целого k такого, что $7k^2+3k < 142\,857$ число b определяется однозначно и является натуральным. Также заметим, что $7k^2+3k$ всегда чётно, поэтому b нечётно. Тогда сумма $a+b = 7k+1+b$ будет чётной, если k — чётное число. Значит, количество пар в этом случае равно количеству чётных $k \geqslant 0$ таких, что $7k^2+3k < 142\,857$, то есть $k \leqslant 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Пусть $a = 7k+5$. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2+11k+b = 142\,853$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что количество пар равно количеству чётных $k \geqslant 0$ таких, что $7k^2+11k < 142\,853$, то есть $k \leqslant 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Общее количество пар равно $72+72 = 144$.

б) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 3\,000\,006$?

Ответ: 247.

в) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 4\,000\,005$?

Ответ: 286.

г) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 5\,000\,004$?

Ответ: 319.

10. а) В вершинах правильного 30-угольника разместили 28 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 80.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Если три вершины образуют прямоугольный треугольник, то гипотенуза является диаметром этой окружности.

Возможны два случая.

1. Угол с чёрной фишкой – прямой. Тогда гипотенузу для каждой из чёрных фишек можно выбрать $(30-4):2=13$ способами. Всего в этом случае получаем $2\cdot 13=26$ способов.

2. Угол с чёрной фишкой – не прямой. Значит, диаметр с концами в вершинах с белой и чёрной фишками является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать $30-3=27$ способами. Всего в этом случае получаем $2\cdot 27=54$ способа.

Общее количество способов есть $26+54=80$.

б) В вершинах правильного 34-угольника разместили 32 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 92.

в) В вершинах правильного 40-угольника разместили 38 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 110.

г) В вершинах правильного 44-угольника разместили 42 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 122.