МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1, f_2, \ldots, f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = 11$, а $f(1) = -1$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 14.

Решение. Данные трёхчлены имеют вид:

$$f_1(x) = x(x-a), \quad f_2(x) = x(x-b), \quad f_3(x) = x(x-c),$$

$$f_4(x) = (x-a)(x-b), \quad f_5(x) = (x-a)(x-c), \quad f_6(x) = (x-b)(x-c).$$

Значит, $f(x) = 6x^2 - 3(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$. Тогда $f(0) = ab+bc+ca$, $f(1) = 6-3(a+b+c)+(ab+bc+ca)$, откуда $3(a+b+c) = 6-f(1)+f(0)$. Осталось заметить, что $S = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = \frac{1}{9}\left(6-f(1)+f(0)\right)^2 - 2f(0) = 14$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$, для которых $a+bc$, $b+ac$, $b^2-a^2+21c^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

Ответ: $(1;2;0)$, $(17;16;2)$.

Решение. Пусть $a+bc = n$, $b+ac = n+1$, $b^2-a^2+21c^2 = n+2$. Тогда

$$1 = (n+1)-n = b+ac-a-bc = (b-a)(1-c),$$

откуда либо $b-a=1$, $1-c=1$, либо $b-a=-1$, $1-c=-1$.

Пусть $b-a=1$, $1-c=1$. Тогда $b=a+1$, $c=0$. Значит, $a=n$, $b=n+1$, откуда

$$b^2-a^2+21c^2 = 2n+1 \;\Rightarrow\; 2n+1 = n+2.$$

Тогда $n=1$, $a=1$, $b=2$.

Пусть $b-a=-1$, $1-c=-1$. Тогда $b=a-1$, $c=2$. Значит, $a+2b=n$, $3a-2=n$, $b=a-1$, откуда

$$b^2-a^2+21c^2 = -2a+1+84 = n+2 \;\Rightarrow\; -2a+85 = 3a.$$

Тогда $a=17$, $b=16$.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 56 одинаковых шаров по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

Ответ: $\frac{5}{19}$.

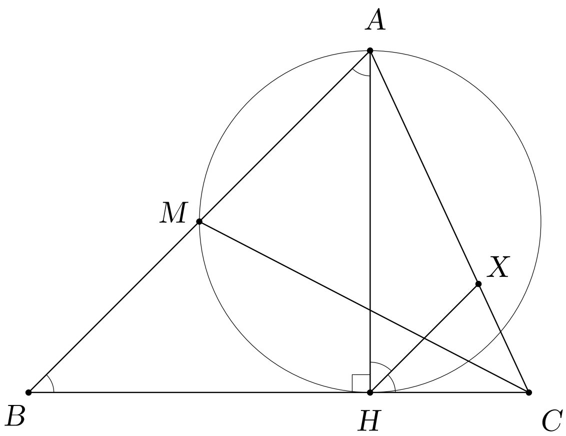
Решение. Количество способов разложить 56 шаров по 3 пронумерованным ящикам совпадает с количеством решений уравнения $x+y+z=56$ в целых неотрицательных числах, то есть C_{58}^2. Найдем количество способов разложить их так, чтобы в каждой коробке число шаров было чётным. Пусть в

первой коробке лежит $2a$ шаров, во второй $2b$ шаров, а в третьей $2c$ шаров. Уравнение $2a+2b+2c=56$ равносильно $a+b+c=28$, а количество способов совпадает с количеством целых неотрицательных решений этого уравнения: оно равно C_{30}^2. Искомая вероятность равна $\dfrac{C_{30}^2}{C_{58}^2}=\dfrac{5}{19}$.

4. [5 баллов] Окружность ω, построенная на высоте AH треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB этого треугольника в её середине M. Высота AH лежит внутри треугольника. На стороне AC отмечена точка X такая, что CM делит отрезок HX пополам. Найдите отношение $AX : XC$, если $BC : AB = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Решение. Поскольку $HM \perp AB$, в прямоугольном ΔABH медиана HM перпендикулярна гипотенузе AB, поэтому $AH = BH$. Прямая CM — медиана одновременно ΔCBA и ΔCHX. Покажем, что прямые HX и AB параллельны. В самом деле, пусть это не так, а X_1 — такая точка на AC, что $HX_1 \parallel AB$. Тогда треугольники CHX_1 и CBA подобны, а медиана CM треугольника CBA делит HX_1 пополам. Поэтому в треугольнике HXX_1 прямая CM является средней линией, а значит, она параллельна AC, что невозможно, поскольку AC и CM пересекаются в точке C. Итак, $HX \parallel AB$. Далее, $\angle ABC = 45°$, откуда HX — биссектриса прямого угла AHC. Искомое отношение $\dfrac{AX}{XC}$ равно $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{BH}{HC}$. Найдем это отношение:



$$2\sqrt{2}=\frac{BC}{AB}=\frac{BH+HC}{\sqrt{2}BH}=\frac{\frac{BH}{HC}+1}{\sqrt{2}\frac{BH}{HC}} \Rightarrow \frac{AX}{XC}=\frac{BH}{HC}=\frac{1}{3}.$$

5. [5 баллов] Цветочный луг, гречишное поле и липовая роща расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между лугом и полем так, чтобы сумма расстояний от улья до луга, поля и рощи была наименьшей. На каком расстоянии от луга установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1000 м, расстояния от улья до луга, рощи и поля (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от рощи до луга и расстояние от рощи до поля — соответственно вторым, четвертым и шестым членами некоторой арифметической прогрессии?

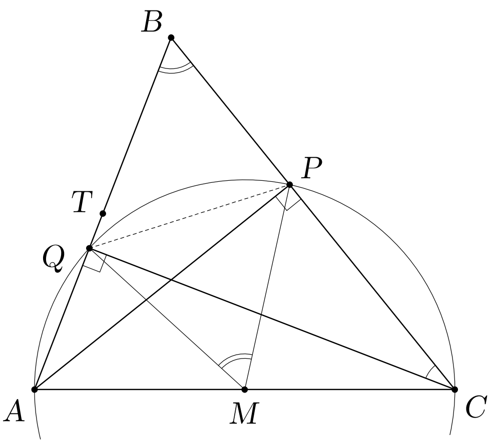
Ответ: 640 м.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с точкой D, расположенной на стороне AB: A — луг, B — поле, C — роща, D — улей. Заметим, что сумма длин отрезков AD и DB равна длине AB вне зависимости от расположения точки D, то есть речь идёт о минимизации длины отрезка DC. При этом точка D не совпадает ни с A, ни с B, поскольку в этом случае длины отрезков DA, DC и DB не могут быть членами геометрической прогрессии. Значит, в треугольнике ABC углы A и B — острые, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C. Тогда из условия $DC^2 = DA \cdot DB$ делаем вывод, что угол C — прямой. Поскольку $2 \cdot 4 = 2 + 6$, в любой арифметической прогрессии $2a_4 = a_2 + a_6$. Следовательно, $2AC = AB + BC$. Обозначим $AB = a - b$, $AC = a$, $BC = a + b$. Тогда $(a-b)^2 = a^2 + (a+b)^2$. Из двух случаев: $a = 0$ и $a = -4b$ подходит только $a = -4b$. Тогда $AB = -5b$, $AC = -4b$, $BC = -3b$, и $AC : BC = 4 : 3$. Отсюда $AD : DB = 16 : 9$, и $AD = 1000 : 25 \cdot 16 = 640$ м.

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Пусть M и T — соответственно середины сторон AC и AB. Известно, что $\angle PBQ = \angle PMQ$. Найдите QT, если $AB = 3$, $BC = 5$.

Ответ: 1.

Решение. Обозначим $\angle QBP = \beta$. Поскольку QM и PM — медианы прямоугольных треугольников AQC и APC, $MA = MQ = MP = MC$. Значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности ω, а центр этой окружности находится в точке M. Тогда в окружности ω угол QCP — вписанный, а угол QMP — центральный, опирающийся на ту же дугу QP, то есть $\angle QCP = \dfrac{\beta}{2}$. Поэтому в прямоугольном треугольнике BQC острые углы B и C равны β и $\dfrac{\beta}{2}$ соответственно, откуда $\beta = 60°$. Из прямоугольного треугольника BQC получаем равенство $BQ = BC\cos\beta = \dfrac{BC}{2}$. Поскольку $BT = \dfrac{AB}{2}$, находим $QT = BQ - BT = \dfrac{1}{2}(BC - AB) = 1$.



7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра a, для каждого из которых найдется такое значение b, что система

$$\begin{cases} y = x + b, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a = -1$.

Решение. Первое уравнение системы задает прямую с фиксированным углом наклона $\dfrac{\pi}{4}$, проходящую через точку $(0;b)$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих этому уравнению.

При $x \geqslant 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$(x - (x-a) - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow\; x = a.$$

Поскольку $x \geqslant 0 > a$, в этом случае ни одна точка не лежит в M.

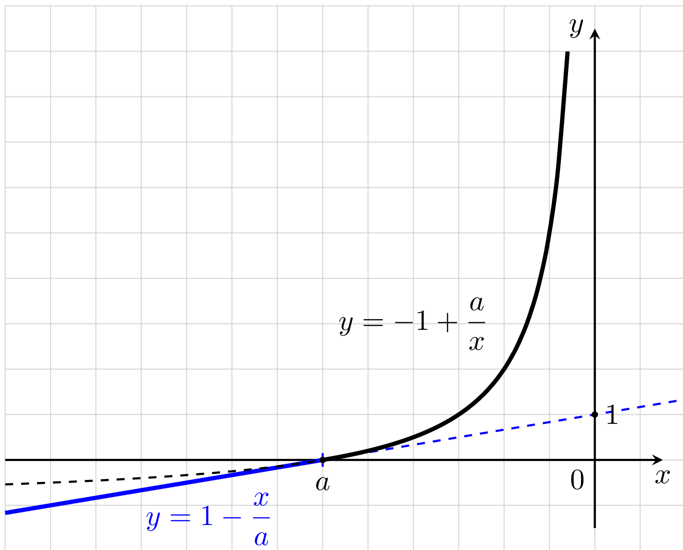
При $x \in [a;0)$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$(-x - (x-a) - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$y = -1 + \frac{a}{x}. \qquad (17)$$

Это уравнение гиперболы, проходящей через точку $(a;0)$.



При $x < a$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow\; (-x + (x-a) - a)y = 2(x-a) \;\Leftrightarrow\; x + ay - a = 0. \qquad (18)$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $(a;0)$.

Множество точек M изображено на рисунке. Покажем, что гипербола (17) и прямая (18) касаются друг друга в точке $(a;0)$. В самом деле,

$$\begin{cases} y = -1 + \dfrac{a}{x}, \\ x + ay - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + \dfrac{a}{x}, \\ y = 1 - \dfrac{x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + \dfrac{a}{x}, \\ -1 + \dfrac{a}{x} = 1 - \dfrac{x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + \dfrac{a}{x}, \\ x^2 - 2ax + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Из того, что гипербола (17) и прямая (18) касаются, следует, что любой отрезок с концами во множестве M лежит не ниже этого множества.

При $a = -1$ прямые $x + ay - a = 0$ и $y = x + b$ параллельны, а при $b = 1$ они совпадают. В этом случае решение данной системы — весь луч $(-\infty; a]$.

При $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ прямая $y = x + b$ имеет с множеством M не более 2 общих точек.

Итак, $a = -1$ — искомое значение параметра.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены $f_1, f_2, \ldots, f_6$. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = -4$, а $f(1) = -7$. (Сами числа a, b и c не даны.)

   Ответ: 17.

   Решение. Данные трёхчлены имеют вид:

$$f_1(x) = x(x-a), \quad f_2(x) = x(x-b), \quad f_3(x) = x(x-c),$$

$$f_4(x) = (x-a)(x-b), \quad f_5(x) = (x-a)(x-c), \quad f_6(x) = (x-b)(x-c).$$

   Значит, $f(x) = 6x^2 - 3(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$. Тогда $f(0) = ab+bc+ca$, $f(1) = 6-3(a+b+c)+(ab+bc+ca)$, откуда $3(a+b+c) = 6 - f(1) + f(0)$. Осталось заметить, что $S = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \frac{1}{9}(6-f(1)+f(0))^2 - 2f(0) = 17$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $c + ab$, $c^2 - a^2 + 26b^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

   Ответ: $(1; 0; 2)$, $(21; 2; 20)$.

   Решение. Пусть $a + bc = n$, $c + ab = n + 1$, $c^2 - a^2 + 26b^2 = n + 2$. Тогда

$$1 = (n+1) - n = c + ab - a - bc = (c-a)(1-b),$$

   откуда либо $c - a = 1$, $1 - b = 1$, либо $c - a = -1$, $1 - b = -1$.

   Пусть $c - a = 1$, $1 - b = 1$. Тогда $c = a + 1$, $b = 0$. Значит, $a = n$, $c = n + 1$, откуда

$$c^2 - a^2 + 26b^2 = 2a + 1 \;\Rightarrow\; 2a + 1 = n + 2.$$

   Тогда $n = 1$, $a = 1$, $c = 2$, $b = 0$.

   Пусть $c - a = -1$, $1 - b = -1$. Тогда $c = a - 1$, $b = 2$. Значит, $a + 2c = n$, $3a - 2 = n$, $c = a - 1$, откуда

$$c^2 - a^2 + 26b^2 = -2a + 1 + 104 = n + 2 \;\Rightarrow\; -2a + 105 = 3a.$$

   Тогда $a = 21$, $c = 20$, $b = 2$.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 68 одинаковых шаров по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

   Ответ: $\frac{6}{23}$.

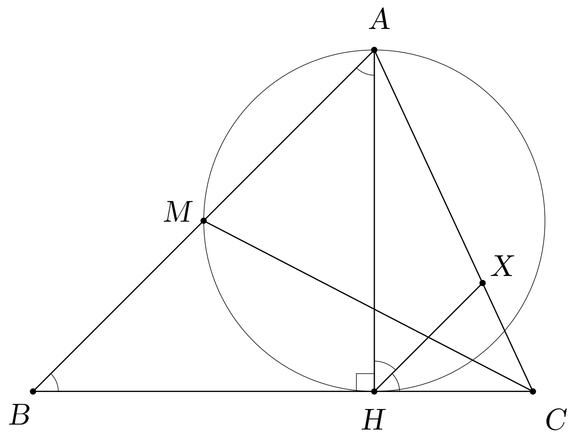
   Решение. Количество способов разложить 68 шаров по 3 пронумерованным ящикам совпадает с количеством решений уравнения $x + y + z = 68$ в целых неотрицательных числах, то есть C_{70}^2. Найдем количество способов разложить их так, чтобы в каждой коробке число шаров было чётным. Пусть в

первой коробке лежит $2a$ шаров, во второй $2b$ шаров, а в третьей $2c$ шаров. Уравнение $2a+2b+2c=68$ равносильно $a+b+c=34$, а количество способов совпадает с количеством целых неотрицательных решений этого уравнения: оно равно C_{36}^2. Искомая вероятность равна $\dfrac{C_{36}^2}{C_{70}^2}=\dfrac{6}{23}$.

4. [5 баллов] Окружность ω, построенная на высоте AH треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB этого треугольника в её середине M. Высота AH лежит внутри треугольника. На стороне AC отмечена точка X такая, что CM делит отрезок HX пополам. Найдите отношение $AX:XC$, если $BC:AB=5\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Решение. Поскольку $HM\perp AB$, в прямоугольном ΔABH медиана HM перпендикулярна гипотенузе AB, поэтому $AH=BH$. Прямая CM — медиана одновременно ΔCBA и ΔCHX. Покажем, что прямые HX и AB параллельны. В самом деле, пусть это не так, а X_1 — такая точка на AC, что $HX_1\parallel AB$. Тогда треугольники CHX_1 и CBA подобны, а медиана CM треугольника CBA делит HX_1 пополам. Поэтому в треугольнике HXX_1 прямая CM является средней линией, а значит, она параллельна AC, что невозможно, поскольку AC и CM пересекаются в точке C. Итак, $HX\parallel AB$. Далее, $\angle ABC=45^\circ$, откуда HX — биссектриса прямого угла AHC. Искомое отношение $\dfrac{AX}{XC}$ равно $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{BH}{HC}$. Найдем это отношение:



$$5\sqrt{2}=\frac{BC}{AB}=\frac{BH+HC}{\sqrt{2}BH}=\frac{\frac{BH}{HC}+1}{\sqrt{2}\frac{BH}{HC}}\;\Rightarrow\;\frac{AX}{XC}=\frac{BH}{HC}=\frac{1}{9}.$$

5. [5 баллов] Лужайка с клевером, заросли вереска и поле подсолнечника расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между клевером и подсолнечником так, чтобы сумма расстояний от улья до клевера, вереска и подсолнечника была наименьшей. На каком расстоянии от подсолнечника установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1250 м, расстояния от улья до клевера, вереска и подсолнечника (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от вереска до клевера и расстояние от вереска до подсолнечника — соответственно вторым, пятым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

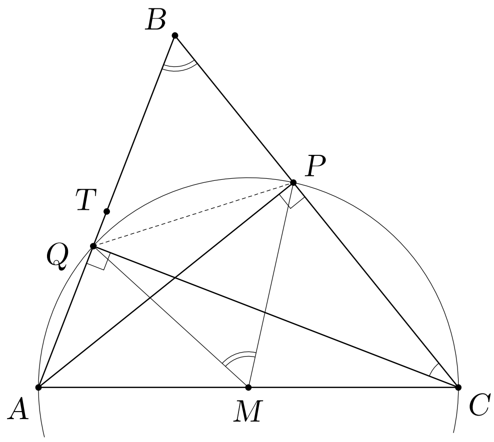
Ответ: 450 м.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с точкой D, расположенной на стороне AB: A — клевер, B — подсолнечник, C — вереск, D — улей. Заметим, что сумма длин отрезков AD и DB равна длине AB вне зависимости от расположения точки D, то есть речь идёт о минимизации длины отрезка DC. При этом точка D не совпадает ни с A, ни с B, поскольку в этом случае длины отрезков DA, DC и DB не могут быть членами геометрической прогрессии. Значит, в треугольнике ABC углы A и B — острые, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C. Тогда из условия $DC^2=DA\cdot DB$ делаем вывод, что угол C — прямой. Поскольку $2\cdot5=2+8$, в любой арифметической прогрессии $2a_5=a_2+a_8$. Следовательно, $2AC=AB+BC$. Обозначим $AB=a-b$, $AC=a$, $BC=a+b$. Тогда $(a-b)^2=a^2+(a+b)^2$. Из двух случаев: $a=0$ и $a=-4b$ подходит только $a=-4b$. Тогда $AB=-5b$, $AC=-4b$, $BC=-3b$, и $AC:BC=4:3$. Отсюда $AD:DB=16:9$, и $DB=1250:25\cdot9=450$ м.

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Пусть M и T — соответственно середины сторон AC и AB. Известно, что $\angle PBQ=\angle PMQ$. Найдите QT, если $AB=4$, $BC=5$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $\angle QBP = \beta$. Поскольку QM и PM — медианы прямоугольных треугольников AQC и APC, $MA = MQ = MP = MC$. Значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности ω, а центр этой окружности находится в точке M. Тогда в окружности ω угол QCP — вписанный, а угол QMP — центральный, опирающийся на ту же дугу QP, то есть $\angle QCP = \frac{\beta}{2}$. Поэтому в прямоугольном треугольнике BQC острые углы B и C равны β и $\frac{\beta}{2}$ соответственно, откуда $\beta = 60°$. Из прямоугольного треугольника BQC получаем равенство $BQ = BC\cos\beta = \frac{BC}{2}$. Поскольку $BT = \frac{AB}{2}$, находим $QT = BQ - BT = \frac{1}{2}(BC - AB) = \frac{1}{2}$.



7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра a, для каждого из которых найдется такое значение b, что система

$$\begin{cases} y = x + b, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a = -2$.

Решение. Первое уравнение системы задает прямую с фиксированным углом наклона $\frac{\pi}{4}$, проходящую через точку $(0; b)$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению.

При $x \geqslant 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$(x - (x-a) - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow\; x = a.$$

Поскольку $x \geqslant 0 > a$, в этом случае ни одна точка не лежит в M.

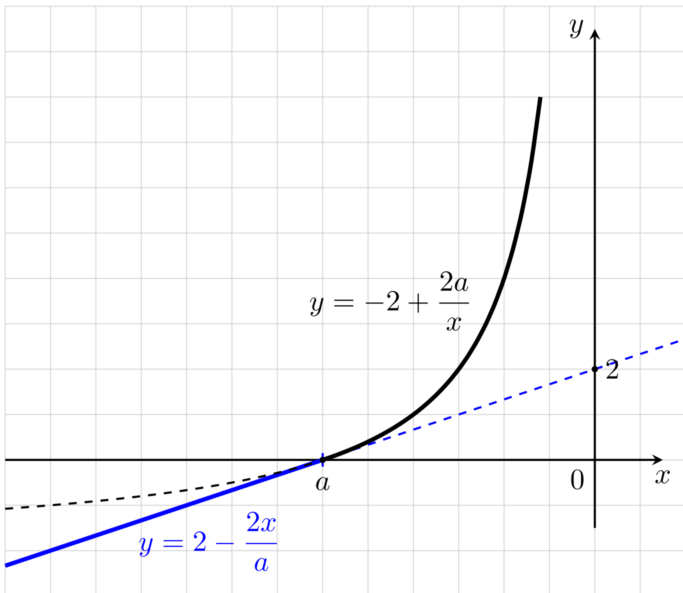
При $x \in [a; 0)$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$(-x - (x-a) - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow$$

$$y = -2 + \frac{2a}{x}. \qquad (19)$$

Это уравнение гиперболы, проходящей через точку $(a; 0)$.



При $x < a$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow\; (-x + (x-a) - a)y = 4(x-a) \;\Leftrightarrow\; 2x + ay - 2a = 0. \qquad (20)$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $(a; 0)$.

Множество точек M изображено на рисунке. Покажем, что гипербола (19) и прямая (20) касаются друг друга в точке $(a;0)$. В самом деле,

$$\begin{cases} y=-2+\dfrac{2a}{x}, \\ 2x+ay-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2a}{x}-2, \\ y=2-\dfrac{2x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2a}{x}-2, \\ \dfrac{2a}{x}-2=2-\dfrac{2x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2+\dfrac{2a}{x}, \\ 2x^2-4ax+2a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=a. \end{cases}$$

Из того, что гипербола (19) и прямая (20) касаются, следует, что любой отрезок с концами во множестве M лежит не ниже этого множества.

При $a=-2$ прямые $2x+ay-2a=0$ и $y=x+b$ параллельны, а при $b=2$ они совпадают. В этом случае решение данной системы — весь луч $(-\infty;a]$.

При $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)$ прямая $y=x+b$ имеет с множеством M не более 2 общих точек.

Итак, $a=-2$ — искомое значение параметра.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, ..., f_6. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = 5$, а $f(1) = -7$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 26.

Решение. Данные трёхчлены имеют вид:

$$f_1(x) = x(x-a), \quad f_2(x) = x(x-b), \quad f_3(x) = x(x-c),$$

$$f_4(x) = (x-a)(x-b), \quad f_5(x) = (x-a)(x-c), \quad f_6(x) = (x-b)(x-c).$$

Значит, $f(x) = 6x^2 - 3(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$. Тогда $f(0) = ab+bc+ca$, $f(1) = 6-3(a+b+c)+(ab+bc+ca)$, откуда $3(a+b+c) = 6-f(1)+f(0)$. Осталось заметить, что $S = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = \frac{1}{9}(6-f(1)+f(0))^2 - 2f(0) = 26$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$, для которых $a+bc$, $b+ac$, $b^2-a^2+11c^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

Ответ: $(1;2;0)$, $(9;8;2)$.

Решение. Пусть $a+bc = n$, $b+ac = n+1$, $b^2-a^2+11c^2 = n+2$. Тогда

$$1 = (n+1)-n = b+ac-a-bc = (b-a)(1-c),$$

откуда либо $b-a=1$, $1-c=1$, либо $b-a=-1$, $1-c=-1$.

Пусть $b-a=1$, $1-c=1$. Тогда $b=a+1$, $c=0$. Значит, $a=n$, $b=n+1$, откуда

$$b^2-a^2+11c^2 = 2n+1 \;\Rightarrow\; 2n+1 = n+2.$$

Тогда $n=1$, $a=1$, $b=2$.

Пусть $b-a=-1$, $1-c=-1$. Тогда $b=a-1$, $c=2$. Значит, $a+2b=n$, $3a-2=n$, $b=a-1$, откуда

$$b^2-a^2+11c^2 = -2a+1+44 = n+2 \;\Rightarrow\; -2a+45 = 3a.$$

Тогда $a=9$, $b=8$.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 92 одинаковых шара по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

Ответ: $\frac{8}{31}$.

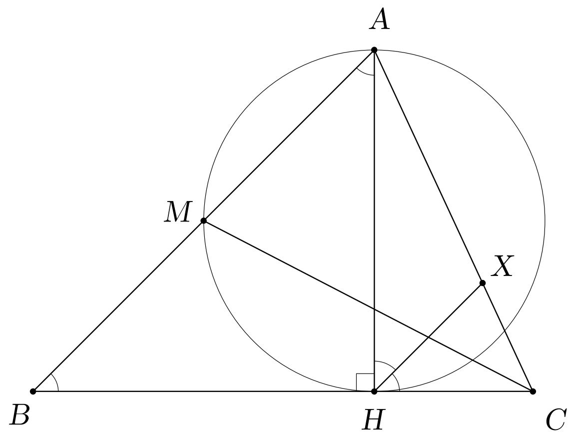
Решение. Количество способов разложить 92 шара по 3 пронумерованным ящикам совпадает с количеством решений уравнения $x+y+z=92$ в целых неотрицательных числах, то есть C_{94}^2. Найдем количество способов разложить их так, чтобы в каждой коробке число шаров было чётным. Пусть в

первой коробке лежит $2a$ шаров, во второй $2b$ шаров, а в третьей $2c$ шаров. Уравнение $2a+2b+2c=92$ равносильно $a+b+c=46$, а количество способов совпадает с количеством целых неотрицательных решений этого уравнения: оно равно C_{48}^2. Искомая вероятность равна $\dfrac{C_{48}^2}{C_{94}^2}=\dfrac{8}{31}$.

4. [5 баллов] Окружность ω, построенная на высоте AH треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB этого треугольника в её середине M. Высота AH лежит внутри треугольника. На стороне AC отмечена точка X такая, что CM делит отрезок HX пополам. Найдите отношение $AX:XC$, если $BC:AB=4\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Решение. Поскольку $HM\perp AB$, в прямоугольном ΔABH медиана HM перпендикулярна гипотенузе AB, поэтому $AH=BH$. Прямая CM — медиана одновременно ΔCBA и ΔCHX. Покажем, что прямые HX и AB параллельны. В самом деле, пусть это не так, а X_1 — такая точка на AC, что $HX_1\parallel AB$. Тогда треугольники CHX_1 и CBA подобны, а медиана CM треугольника CBA делит HX_1 пополам. Поэтому в треугольнике HXX_1 прямая CM является средней линией, а значит, она параллельна AC, что невозможно, поскольку AC и CM пересекаются в точке C. Итак, $HX\parallel AB$. Далее, $\angle ABC=45^\circ$, откуда HX — биссектриса прямого угла AHC. Искомое отношение $\dfrac{AX}{XC}$ равно $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{BH}{HC}$. Найдем это отношение:



$$4\sqrt{2}=\frac{BC}{AB}=\frac{BH+HC}{\sqrt{2}BH}=\frac{\frac{BH}{HC}+1}{\sqrt{2}\frac{BH}{HC}}\ \Rightarrow\ \frac{AX}{XC}=\frac{BH}{HC}=\frac{1}{7}.$$

5. [5 баллов] Цветочный луг, гречишное поле и липовая роща расположены в трёх различных точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между лугом и полем так, чтобы сумма расстояний от улья до луга, поля и рощи была наименьшей. На каком расстоянии от луга установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 1500 м, расстояния от улья до луга, рощи и поля (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от луга до рощи и расстояние от поля до рощи — соответственно четвертым, шестым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

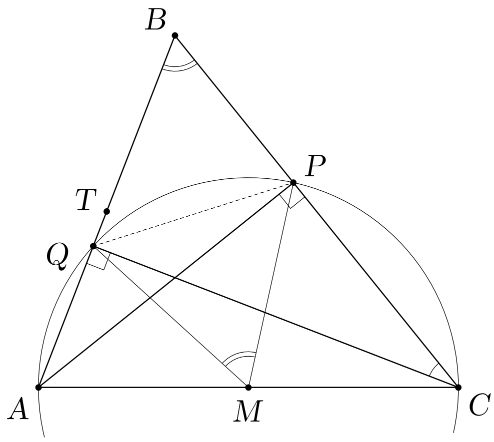
Ответ: 960 м.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с точкой D, расположенной на стороне AB: A — луг, B — поле, C — роща, D — улей. Заметим, что сумма длин отрезков AD и DB равна длине AB вне зависимости от расположения точки D, то есть речь идёт о минимизации длины отрезка DC. При этом точка D не совпадает ни с A, ни с B, поскольку в этом случае длины отрезков DA, DC и DB не могут быть членами геометрической прогрессии. Значит, в треугольнике ABC углы A и B — острые, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C. Тогда из условия $DC^2=DA\cdot DB$ делаем вывод, что угол C — прямой. Поскольку $2\cdot 6=4+8$, в любой арифметической прогрессии $2a_6=a_4+a_8$. Следовательно, $2AC=AB+BC$. Обозначим $AB=a-b$, $AC=a$, $BC=a+b$. Тогда $(a-b)^2=a^2+(a+b)^2$. Из двух случаев: $a=0$ и $a=-4b$ подходит только $a=-4b$. Тогда $AB=-5b$, $AC=-4b$, $BC=-3b$, и $AC:BC=4:3$. Отсюда $AD:DB=16:9$, и $AD=1500:25\cdot 16=960$ м.

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Пусть M и T — соответственно середины сторон AC и AB. Известно, что $\angle PBQ=\angle PMQ$. Найдите QT, если $AB=6$, $BC=9$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Решение. Обозначим $\angle QBP = \beta$. Поскольку QM и PM — медианы прямоугольных треугольников AQC и APC, $MA = MQ = MP = MC$. Значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности ω, а центр этой окружности находится в точке M. Тогда в окружности ω угол QCP — вписанный, а угол QMP — центральный, опирающийся на ту же дугу QP, то есть $\angle QCP = \dfrac{\beta}{2}$. Поэтому в прямоугольном треугольнике BQC острые углы B и C равны β и $\dfrac{\beta}{2}$ соответственно, откуда $\beta = 60°$. Из прямоугольного треугольника BQC получаем равенство $BQ = BC\cos\beta = \dfrac{BC}{2}$. Поскольку $BT = \dfrac{AB}{2}$, находим $QT = BQ - BT = \dfrac{1}{2}(BC - AB) = \dfrac{3}{2}$.



7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра a, для каждого из которых найдется такое значение b, что система

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 2(a-x) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a = -1$.

Решение. Первое уравнение системы задает прямую с фиксированным углом наклона $-\dfrac{\pi}{4}$, проходящую через точку $(0; b)$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению.

При $x \geqslant 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow$$

$$(x - (x-a) - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow\; x = a.$$

Поскольку $x \geqslant 0 > a$, в этом случае ни одна точка не лежит в M.

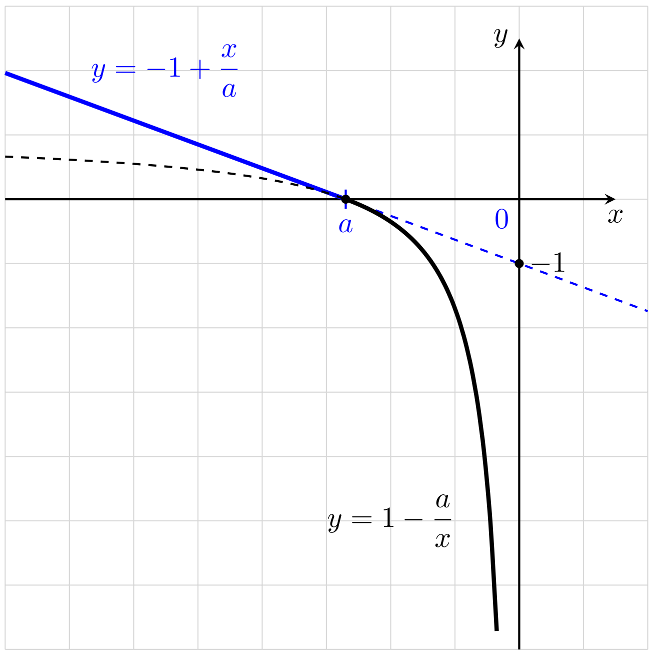
При $x \in [a; 0)$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow$$

$$(-x - (x-a) - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow$$

$$y = 1 - \frac{a}{x}. \qquad (21)$$

Это уравнение гиперболы, проходящей через точку $(a; 0)$.



При $x < a$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow\; (-x + (x-a) - a)y = 2(a-x) \;\Leftrightarrow\; x - ay - a = 0. \qquad (22)$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $(a; 0)$.

Множество точек M изображено на рисунке. Покажем, что гипербола (21) и прямая (22) касаются друг друга в точке $(a;0)$. В самом деле,

$$\begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{x}, \\ x - ay - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{x}, \\ y = \dfrac{x}{a} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{x}, \\ 1 - \dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{a} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{a}{x}, \\ x^2 - 2ax + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Из того, что гипербола (21) и прямая (22) касаются, следует, что любой отрезок с концами во множестве M лежит не ниже этого множества.

При $a = -1$ прямые $x - ay - a = 0$ и $y = -x + b$ параллельны, а при $b = -1$ они совпадают. В этом случае решение данной системы — весь луч $(-\infty; a]$.

При $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ прямая $y = -x + b$ имеет с множеством M не более 2 общих точек.

Итак, $a = -1$ — искомое значение параметра.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных ненулевых числа. Для каждой пары из чисел 0, a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, $\ldots$, f_6. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_6$. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если $f(0) = -9$, а $f(1) = -6$. (Сами числа a, b и c не даны.)

   Ответ: 19.

   Решение. Данные трёхчлены имеют вид:

$$f_1(x) = x(x-a), \quad f_2(x) = x(x-b), \quad f_3(x) = x(x-c),$$

$$f_4(x) = (x-a)(x-b), \quad f_5(x) = (x-a)(x-c), \quad f_6(x) = (x-b)(x-c).$$

   Значит, $f(x) = 6x^2 - 3(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$. Тогда $f(0) = ab+bc+ca$, $f(1) = 6 - 3(a+b+c) + (ab+bc+ca)$, откуда $3(a+b+c) = 6 - f(1) + f(0)$. Осталось заметить, что $S = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \frac{1}{9}(6 - f(1) + f(0))^2 - 2f(0) = 19$.

2. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $a + bc$, $c + ab$, $c^2 - a^2 + 16b^2$ — три последовательных натуральных числа, расположенных в порядке возрастания.

   Ответ: $(1; 0; 2)$, $(13; 2; 12)$.

   Решение. Пусть $a + bc = n$, $c + ab = n + 1$, $c^2 - a^2 + 16b^2 = n + 2$. Тогда

$$1 = (n+1) - n = c + ab - a - bc = (c-a)(1-b),$$

   откуда либо $c - a = 1$, $1 - b = 1$, либо $c - a = -1$, $1 - b = -1$.

   Пусть $c - a = 1$, $1 - b = 1$. Тогда $c = a + 1$, $b = 0$. Значит, $a = n$, $c = n + 1$, откуда

$$c^2 - a^2 + 16b^2 = 2a + 1 \;\Rightarrow\; 2a + 1 = n + 2.$$

   Тогда $n = 1$, $a = 1$, $c = 2$.

   Пусть $c - a = -1$, $1 - b = -1$. Тогда $c = a - 1$, $b = 2$. Значит, $a + 2c = n$, $3a - 2 = n$, $c = a - 1$, откуда

$$c^2 - a^2 + 16b^2 = -2a + 1 + 64 = n + 2 \;\Rightarrow\; -2a + 65 = 3a.$$

   Тогда $a = 13$, $c = 12$.

3. [4 балла] Петя случайно раскладывает 104 одинаковых шара по 3 пронумерованным ящикам. Найдите вероятность того, что в каждом ящике окажется чётное (возможно, нулевое) количество шаров.

   Ответ: $\frac{9}{35}$.

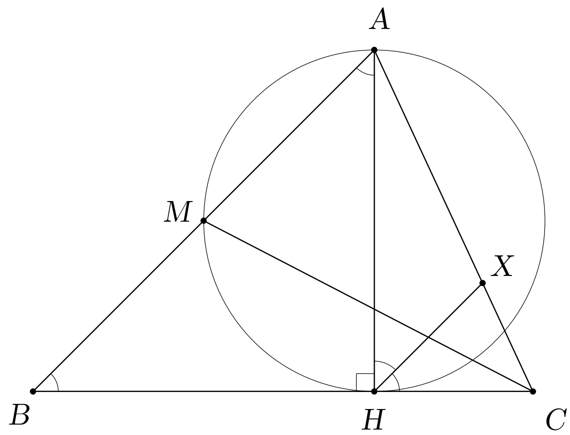
   Решение. Количество способов разложить 104 шара по 3 пронумерованным ящикам совпадает с количеством решений уравнения $x+y+z = 104$ в целых неотрицательных числах, то есть C_{106}^2. Найдем количество способов разложить их так, чтобы в каждой коробке число шаров было чётным. Пусть в

первой коробке лежит $2a$ шаров, во второй $2b$ шаров, а в третьей $2c$ шаров. Уравнение $2a+2b+2c=104$ равносильно $a+b+c=52$, а количество способов совпадает с количеством целых неотрицательных решений этого уравнения: оно равно C_{54}^2. Искомая вероятность равна $\dfrac{C_{54}^2}{C_{106}^2}=\dfrac{9}{35}$.

4. [5 баллов] Окружность ω, построенная на высоте AH треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB этого треугольника в её середине M. Высота AH лежит внутри треугольника. На стороне AC отмечена точка X такая, что CM делит отрезок HX пополам. Найдите отношение $AX:XC$, если $BC:AB=3\sqrt{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

Решение. Поскольку $HM\perp AB$, в прямоугольном ΔABH медиана HM перпендикулярна гипотенузе AB, поэтому $AH=BH$. Прямая CM — медиана одновременно ΔCBA и ΔCHX. Покажем, что прямые HX и AB параллельны. В самом деле, пусть это не так, а X_1 — такая точка на AC, что $HX_1\parallel AB$. Тогда треугольники CHX_1 и CBA подобны, а медиана CM треугольника CBA делит HX_1 пополам. Поэтому в треугольнике HXX_1 прямая CM является средней линией, а значит, она параллельна AC, что невозможно, поскольку AC и CM пересекаются в точке C. Итак, $HX\parallel AB$. Далее, $\angle ABC=45^\circ$, откуда HX — биссектриса прямого угла AHC. Искомое отношение $\dfrac{AX}{XC}$ равно $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{BH}{HC}$. Найдем это отношение:



$$3\sqrt{2}=\frac{BC}{AB}=\frac{BH+HC}{\sqrt{2}BH}=\frac{\frac{BH}{HC}+1}{\sqrt{2}\frac{BH}{HC}}\ \Rightarrow\ \frac{AX}{XC}=\frac{BH}{HC}=\frac{1}{5}.$$

5. [5 баллов] Лужайка с клевером, заросли вереска и поле подсолнечника расположены в трёх точках, не лежащих на одной прямой. Пасечник поставил улей на прямолинейной тропинке между клевером и подсолнечником так, чтобы сумма расстояний от улья до клевера, вереска и подсолнечника была наименьшей. На каком расстоянии от подсолнечника установлен улей, если известно, что длина тропинки равна 2000 м, расстояния от улья до клевера, вереска и подсолнечника (в указанном порядке) являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, а длина тропинки, расстояние от вереска до клевера и расстояние от вереска до подсолнечника — соответственно первым, четвёртым и седьмым членами некоторой арифметической прогрессии?

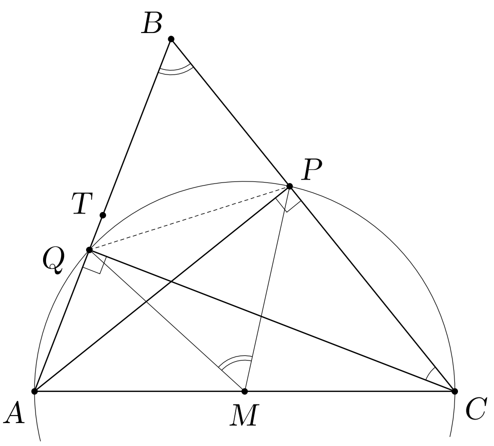
Ответ: 720 м.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с точкой D, расположенной на стороне AB: A — клевер, B — подсолнечник, C — вереск, D — улей. Заметим, что сумма длин отрезков AD и DB равна длине AB вне зависимости от расположения точки D, то есть речь идёт о минимизации длины отрезка DC. При этом точка D не совпадает ни с A, ни с B, поскольку в этом случае длины отрезков DA, DC и DB не могут быть членами геометрической прогрессии. Значит, в треугольнике ABC углы A и B — острые, а точка D — основание высоты, проведённой из вершины C. Тогда из условия $DC^2=DA\cdot DB$ делаем вывод, что угол C — прямой. Поскольку $2\cdot 4=1+7$, в любой арифметической прогрессии $2a_4=a_1+a_7$. Следовательно, $2AC=AB+BC$. Обозначим $AB=a-b$, $AC=a$, $BC=a+b$. Тогда $(a-b)^2=a^2+(a+b)^2$. Из двух случаев: $a=0$ и $a=-4b$ подходит только $a=-4b$. Тогда $AB=-5b$, $AC=-4b$, $BC=-3b$, и $AC:BC=4:3$. Отсюда $AD:DB=16:9$, и $DB=2000:25\cdot 9=720$ м.

6. [5 баллов] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Пусть M и T — соответственно середины сторон AC и AB. Известно, что $\angle PBQ=\angle PMQ$. Найдите QT, если $AB=7$, $BC=11$.

Ответ: 2.

Решение. Обозначим $\angle QBP = \beta$. Поскольку QM и PM — медианы прямоугольных треугольников AQC и APC, $MA = MQ = MP = MC$. Значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности ω, а центр этой окружности находится в точке M. Тогда в окружности ω угол QCP — вписанный, а угол QMP — центральный, опирающийся на ту же дугу QP, то есть $\angle QCP = \frac{\beta}{2}$. Поэтому в прямоугольном треугольнике BQC острые углы B и C равны β и $\frac{\beta}{2}$ соответственно, откуда $\beta = 60°$. Из прямоугольного треугольника BQC получаем равенство $BQ = BC\cos\beta = \frac{BC}{2}$. Поскольку $BT = \frac{AB}{2}$, находим $QT = BQ - BT = \frac{1}{2}(BC - AB) = 2$.



7. [6 баллов] Найдите все *отрицательные* значения параметра a, для каждого из которых найдется такое значение b, что система

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 4(a-x) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответ: $a = -2$.

Решение. Первое уравнение системы задает прямую с фиксированным углом наклона $-\frac{\pi}{4}$, проходящую через точку $(0; b)$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению.

При $x \geqslant 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow$$

$$(x - (x-a) - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow x = a.$$

Поскольку $x \geqslant 0 > a$, в этом случае ни одна точка не лежит в M.

При $x \in [a; 0)$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow$$

$$(-x - (x-a) - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow$$

$$y = 2 - \frac{2a}{x}. \tag{23}$$

Это уравнение гиперболы, проходящей через точку $(a; 0)$.

При $x < a$

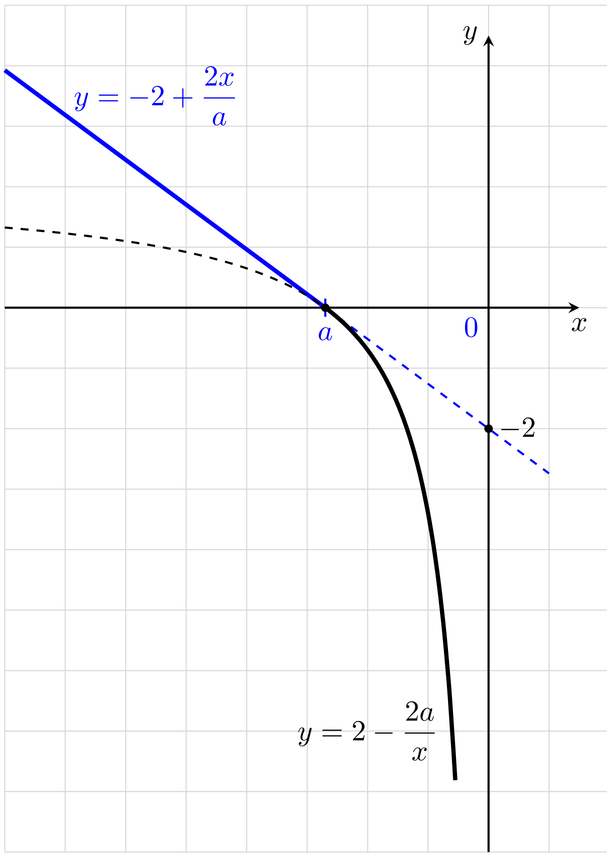
$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow$$

$$(-x + (x-a) - a)y = 4(a-x) \Leftrightarrow$$

$$2x - ay - 2a = 0. \tag{24}$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $(a; 0)$.

Множество точек M изображено на рисунке.



Покажем, что гипербола (23) и прямая (24) касаются друг друга в точке $(a;0)$. В самом деле,

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{2a}{x}, \\ 2x - ay - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \dfrac{2a}{x}, \\ y = \dfrac{2x}{a} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \dfrac{2a}{x}, \\ 2 - \dfrac{2a}{x} = \dfrac{2x}{a} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \dfrac{2a}{x}, \\ x^2 - 2ax + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Из того, что гипербола (23) и прямая (24) касаются, следует, что любой отрезок с концами во множестве M лежит не ниже этого множества.

При $a = -2$ прямые $2x - ay - 2a = 0$ и $y = -x + b$ параллельны, а при $b = -2$ они совпадают. В этом случае решение данной системы — весь луч $(-\infty; a]$.

При $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$ прямая $y = -x + b$ имеет с множеством M не более 2 общих точек.

Итак, $a = -2$ — искомое значение параметра.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 5, полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Какое наименьшее значение может принимать произведение всех четырёх корней этих уравнений?

   Ответ: -21.

   Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2+cx+b=0$. Тогда $x_1+x_2=-b, x_1x_2=c, x_3+x_4=-c, x_3x_4=b$. По условию $(x_1+x_2)-(x_3+x_4)=10=c-b$. Также $b=x_3x_4=(x_1-5)(x_2-5)=x_1x_2-5(x_1+x_2)+25=c+5b+25$, то есть $c+4b+25=0$. Из этих уравнений получаем, что $c=3, b=-7$. Тогда $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=c\cdot b=-21$.

2. [3 балла] Сумма пяти подряд идущих двузначных чисел является полным квадратом. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

   Ответ: $\{100, 225, 400\}$.

   Решение. Рассмотрим пять подряд идущих двузначных чисел $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ $(12 \leqslant n \leqslant 97)$. Их сумма равна $5n$. Следовательно, квадрат, которым является эта сумма, кратен 5, а, значит, и 25. При этом $60 \leqslant 5n \leqslant 485$. В данном отрезке лежат следующие квадраты, кратные 25: 100, 225, 400. Они же и равны сумме исходных чисел.

3. [5 баллов] В научной лаборатории составляется план запуска численного решения задачи на кластере. За 100 дней требуется сделать 10 запусков, а после каждого запуска, кроме последнего, кластер загружен только данной задачей в течение 7 дней, включая день запуска. При последнем запуске требуется обработать результаты всех предыдущих запусков, на что требуется 8 дней работы кластера, включая день последнего запуска. Сколькими способами сотрудники лаборатории могут выбрать дни запусков расчётов? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

   Ответ: C_{39}^{10}.

   Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{10}$ — номера дней запусков расчётов. Тогда $x_1 \geqslant 1$, $x_2 > x_1+6, \ldots, x_{10} > x_9+6$, $x_{10}+7 \leqslant 100$. Обозначим $y_1=x_1$, $y_2=x_2-6$, $y_3=x_3-12, \ldots, y_{10}=x_{10}-54$. Тогда достаточно выбрать числа $y_1, \ldots, y_{10}$, удовлетворяющими условиям

$$1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_{10} \leqslant (100-7)-54=39,$$

   что можно сделать C_{39}^{10} способами.

4. [5 баллов] Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Луч BH пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников AHP и CHP, если известно, что $BA_1 : BC_1 = 3:4$, а $AH : CH = 3:10$.

   Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

   Решение. Пусть $\angle CAA_1=\alpha, \angle ACC_1=\beta$, а K — основание высоты треугольника ABC, опущенной на сторону AC. Точка P лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, причем она симметрична H относительно AC. Пусть R_1 и R_2 — радиусы описанных окружностей вокруг треугольников AHP и CHP соответственно. Запишем теорему синусов для этих треугольников:

$$\frac{PH}{\sin 2\alpha} = 2R_1, \qquad \frac{PH}{\sin 2\beta} = 2R_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

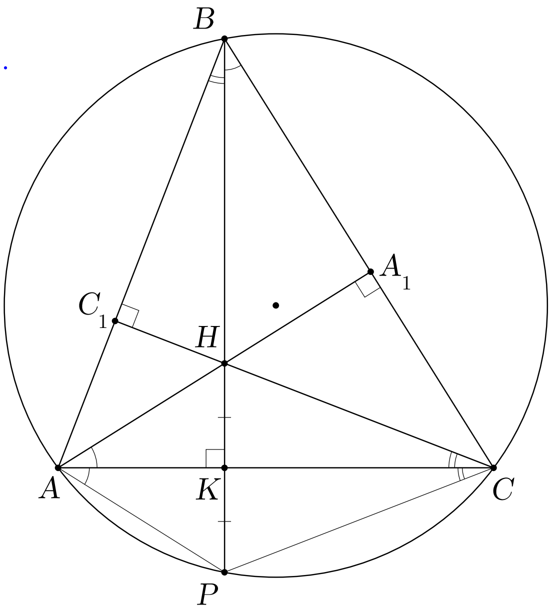
Из треугольников AHK и CHK находим

$$\sin\alpha = \frac{HK}{AH}, \qquad \sin\beta = \frac{HK}{CH} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CH}{AH} = \frac{10}{3}.$$

Так как $\angle ABP = \angle ACC_1 = \beta$, а $\angle CBP = \angle CAA_1 = \alpha$, из треугольников AKB и CKB находим

$$\cos\alpha = \frac{BK}{BC}, \qquad \cos\beta = \frac{BK}{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{AB}{BC}.$$

Так как треугольники BA_1C_1 и BAC подобны, $AB : BC = BA_1 : BC_1 = 3 : 4$. Таким образом, окончательно получаем, что $R_1 : R_2 = (3/10) : (3/4) = 2 : 5$.



5. [5 баллов] От пристани A к пристани B, расположенной от A вниз по течению, одновременно отправились лодка и байдарка. Километром ниже от A по течению к B отправился также плот. Если сложить времена движения лодки, байдарки и плота до пристани B, то получится 22 часа. Найдите расстояние между пристанями, если известно, что байдарка прибыла к B на 2 часа раньше лодки, скорости плота, лодки и байдарки являются тремя последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, а скорость плота, скорость в стоячей воде лодки и скорость в стоячей воде байдарки — тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: 15 км.

Решение. Обозначим через x км расстояние между пристанями, y км/ч — скорость течения реки (и, соответственно, скорость плота) и через z км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость движения лодки по течению равна $z+y$ км/ч, а скорость движения по течению байдарки (как третий член арифметической прогрессии) равна $z+y+(z+y-y) = 2z+y$. Получаем систему:

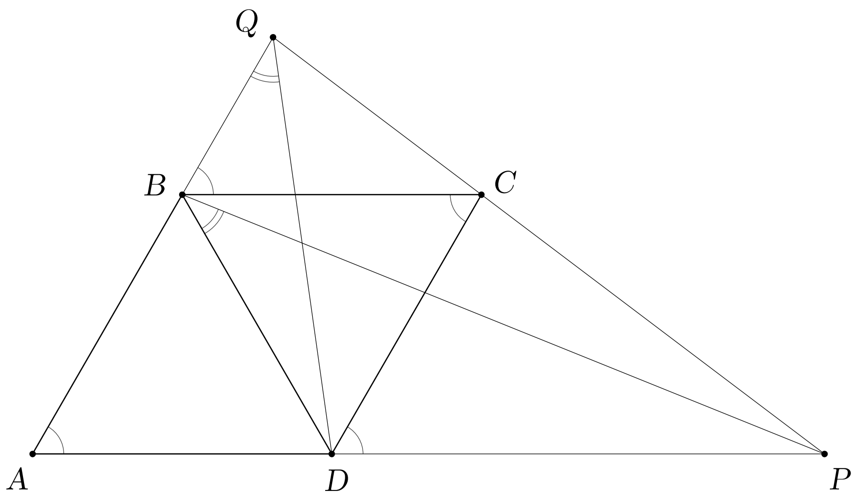
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y} + \dfrac{x}{z+y} + \dfrac{x}{2z+y} = 22, \\[2ex] \dfrac{x}{z+y} - \dfrac{x}{2z+y} = 2. \end{cases}$$

Так как скорость движения байдарки в стоячей воде равна $2z$ км/ч, получаем, что $z = 2y$, поскольку y, z и $2z$ составляют геометрическую прогрессию. Из второго уравнения системы следует, что $\dfrac{x}{y} = 15$. Тогда из первого уравнения $y = 1$, и $x = 15$.

6. [5 баллов] Угол A ромба $ABCD$ равен 60°. На продолжениях его сторон AB и AD за точки B и D взяты точки Q и P соответственно так, что прямая PQ проходит через точку C. Найдите длину отрезка BQ, если $DP = 10$, а $DQ : BP = 11 : 10$.

Ответ: $\dfrac{121}{10}$.

Решение. Треугольники BAD и BCD равносторонние, поэтому $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$, откуда $\angle QBC = \angle CDP = 60^\circ$. Поскольку $BC \parallel AP$, треугольники BCQ и APQ подобны.



Аналогично из того, что $DC \parallel AQ$, следует, что треугольники DPC и APQ подобны. Поэтому треугольники BCQ и DPC подобны, откуда $\dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{DC}{DP}$. Поскольку $BC = CD = BD$, получаем соотношение $\dfrac{BQ}{BD} = \dfrac{BD}{DP}$. Углы DBQ и PDB равны 120°, поэтому треугольники QBD и BDP подобны по углу и двум парам прилежащих пропорциональных сторон. Значит, $\dfrac{DQ}{BP} = \dfrac{BQ}{BD}$ и $\dfrac{DQ}{BP} = \dfrac{BD}{DP}$. Умножив два полученных равенства, получим, что $\left(\dfrac{DQ}{BP}\right)^2 = \dfrac{BQ}{DP}$, то есть $BQ = \left(\dfrac{DQ}{BP}\right)^2 \cdot DP = \dfrac{121}{10}$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \max\left(8 + \dfrac{6y}{x}; 6 - \dfrac{8y}{x}\right), \\ y = ax - 9a + 8 \end{cases}$$

имеет нечётное количество решений.

Ответ: $a \in \{0\} \cup \left[\dfrac{2}{9}; \dfrac{16}{9}\right] \cup \left\{\dfrac{9}{2}; \dfrac{72 + 5\sqrt{155}}{11}\right\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $8 + \dfrac{6y}{x}$ и $6 - \dfrac{8y}{x}$ больше. Заметим, что

$$8 + \frac{6y}{x} \leqslant 6 - \frac{8y}{x} \iff \frac{7y + x}{x} \leqslant 0.$$

При $x > 0$ это неравенство выполняется во всех точках, лежащих на прямой $y = -\dfrac{x}{7}$ и ниже неё, а при $x < 0$ — во всех точках, лежащих на прямой $y = -\dfrac{x}{7}$ и выше неё.

При $\dfrac{7y + x}{x} \leqslant 0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x + \frac{y^2}{x} = 6 - \frac{8y}{x} \iff (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25. \tag{5}$$

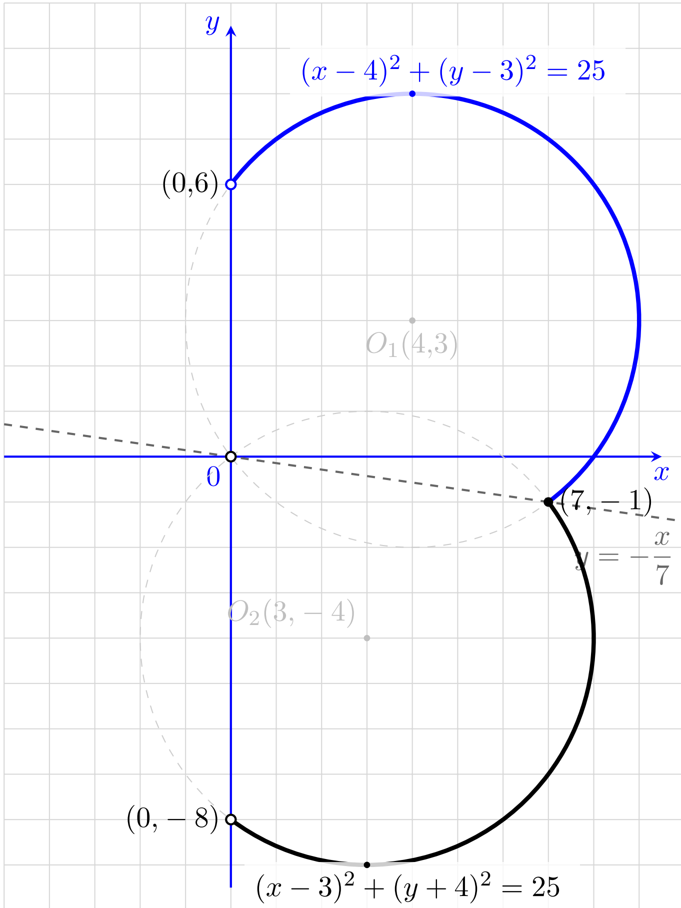
Это уравнение окружности с центром в точке $(3; -4)$ и радиусом 5. Прямую $y = -\dfrac{x}{7}$ окружность (5) пересекает в точках $(0; 0)$ и $(7; -1)$, а прямую $x = 0$ — в точке $(0; -8)$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\dfrac{7y + x}{x} \leqslant 0$, есть дуга окружности (5) с концами $(0; -8)$ и $(7; -1)$.

При $\dfrac{7y+x}{x}>0$ первое уравнение системы примет вид

$$x+\frac{y^2}{x}=8+\frac{6y}{x}\iff (x-4)^2+(y-3)^2=25. \quad (6)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(4;3)$ и радиусом 5. Прямую $y=-\dfrac{x}{7}$ окружность (6) пересекает в точках $(0;0)$ и $(7;-1)$, а прямую $x=0$ — в точке $(0;6)$. Поэтому часть множества M, точки которой удовлетворяют условию $\dfrac{7y+x}{x}>0$, есть дуга окружности (6) с концами $(0;6)$ и $(7;-1)$.

Итак, множество M имеет вид объединения двух указанных дуг и изображено на рисунке.



Перепишем второе уравнение системы в виде $y-8=a(x-9)$. При различных значениях параметра a данное уравнение задаёт прямые с угловым коэффициентом a, проходящие через точку $(9;8)$. Отметим, что любая прямая, проходящая через эту точку, кроме вертикальной, может быть задана данным уравнением с помощью выбора значения a.

Найдем значения a, при которых окружность (5) касается прямой $y-8=a(x-9)$:

$$\frac{|3a+4-9a+8|}{\sqrt{a^2+1}}=5 \iff |12-6a|=5\sqrt{a^2+1} \iff 11a^2-144a+119=0,$$

то есть касание с дугой

$$\left\{(x;y)\ \middle|\ \frac{7y+x}{x}\leqslant 0,\ (x-3)^2+(y+4)^2=25\right\}$$

происходит при $a=\dfrac{72+5\sqrt{155}}{11}$.

Точка $(4;8)$ окружности (6) имеет максимальную ординату среди всех точек множества M, поэтому прямая $y=a(x-9)+8$ касается этой окружности только при $a=0$.

При $a=\dfrac{2}{9}$ прямая проходит через точку $(0;6)$, при $a=\dfrac{16}{9}$ — через точку $(0;-8)$, а при $a=\dfrac{9}{2}$ — через точку $(7;-1)$.

Найдём количество точек пересечения прямой $y=a(x-9)+8$ со множеством M:

1) при $a\in(-\infty;0)$ — 0 общих точек;
2) при $a=0$ — 1 общая точка;
3) при $a\in\left(0;\dfrac{2}{9}\right)$ — 2 общие точки;
4) при $a\in\left[\dfrac{2}{9};\dfrac{16}{9}\right]$ — 1 общая точка;
5) при $a\in\left(\dfrac{16}{9};\dfrac{9}{2}\right)$ — 2 общие точки;
6) при $a=\dfrac{9}{2}$ — 3 общие точки;
7) при $a\in\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{72+5\sqrt{155}}{11}\right)$ — 4 общие точки;
8) при $a=\dfrac{72+5\sqrt{155}}{11}$ — 3 общие точки;
9) при $a\in\left(\dfrac{72+5\sqrt{155}}{11},+\infty\right)$ — 2 общие точки.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a\in\{0\}\cup\left[\dfrac{2}{9};\dfrac{16}{9}\right]\cup\left\{\dfrac{9}{2};\dfrac{72+5\sqrt{155}}{11}\right\}$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 6, полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Какое наименьшее значение может принимать произведение всех четырёх корней этих уравнений?

   Ответ: -32.

   Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2+cx+b=0$. Тогда $x_1+x_2=-b, x_1x_2=c, x_3+x_4=-c, x_3x_4=b$. По условию $(x_1+x_2)-(x_3+x_4)=-12=c-b$. Также $b=x_3x_4=(x_1+6)(x_2+6)=x_1x_2+6(x_1+x_2)+36=c-6b+36$, то есть $c-7b+36=0$. Из этих уравнений получаем, что $c=-8, b=4$. Тогда $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=c\cdot b=-32$.

2. [3 балла] Сумма семи подряд идущих двузначных чисел является полным квадратом. Найдите все возможные значения суммы исходных чисел.

   Ответ: 196, 441.

   Решение. Рассмотрим семь подряд идущих двузначных чисел $n-3$, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ($13\leqslant n\leqslant 96$). Их сумма равна $7n$. Следовательно, квадрат, которым является эта сумма, кратен 7, а, значит, и 49. При этом $91\leqslant 7n\leqslant 672$. В данном отрезке лежат следующие квадраты, кратные 49: 196, 441. Они же и равны сумме исходных чисел.

3. [5 баллов] В научной лаборатории составляется план запуска численного решения задачи на кластере. За 120 дней требуется сделать 11 запусков, а после каждого запуска, кроме последнего, кластер загружен только данной задачей в течение 6 дней, включая день запуска. При последнем запуске требуется обработать результаты всех предыдущих запусков, на что требуется 7 дней работы кластера, включая день последнего запуска. Сколькими способами сотрудники лаборатории могут выбрать дни запусков расчётов? Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

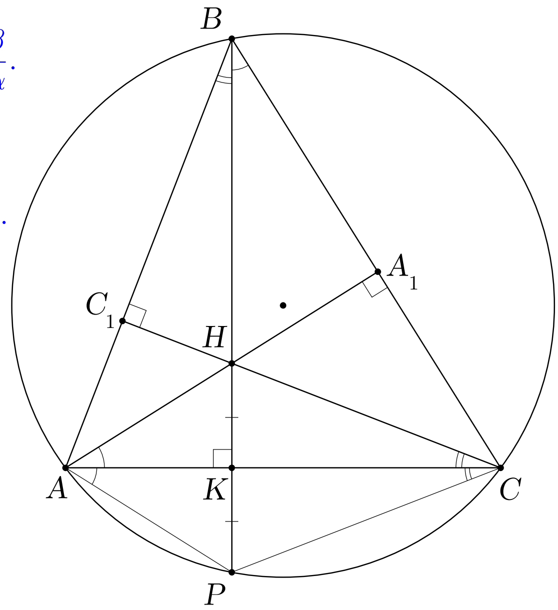
   Ответ: C_{64}^{11}.

   Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{11}$ — номера дней запусков расчётов. Тогда $x_1\geqslant 1$, $x_2>x_1+5$, $\ldots$, $x_{11}>x_{10}+5$, $x_{11}+6\leqslant 120$. Обозначим $y_1=x_1$, $y_2=x_2-5$, $y_3=x_3-10$, $\ldots$, $y_{11}=x_{11}-50$. Тогда достаточно выбрать числа $y_1, \ldots, y_{11}$, удовлетворяющими условиям $1\leqslant y_1<y_2<\ldots<y_11\leqslant(120-6)-50=64$, что можно сделать C_{64}^{11} способами.

4. [5 баллов] Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Луч BH пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников AHP и CHP, если известно, что $BA_1 : BC_1 = 6:5$, а $AH : CH = 21:10$.

   Ответ: $\frac{7}{4}$.

   Решение. Пусть $\angle CAA_1=\alpha, \angle ACC_1=\beta$, а K — основание высоты треугольника ABC, опущенной на сторону AC. Точка P лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, причем она симметрична H относительно AC. Пусть R_1 и R_2 — радиусы описанных окружностей вокруг треугольников AHP и CHP соответственно. Запишем теорему синусов для этих треугольников:



$$\frac{PH}{\sin 2\alpha} = 2R_1, \qquad \frac{PH}{\sin 2\beta} = 2R_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Из треугольников AHK и CHK находим

$$\sin\alpha = \frac{HK}{AH}, \qquad \sin\beta = \frac{HK}{CH} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CH}{AH} = \frac{10}{21}.$$

Так как $\angle ABP = \angle ACC_1 = \beta$, а $\angle CBP = \angle CAA_1 = \alpha$, из треугольников AKB и CKB находим

$$\cos\alpha = \frac{BK}{BC}, \qquad \cos\beta = \frac{BK}{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{AB}{BC}.$$

Так как треугольники BA_1C_1 и BAC подобны, $AB : BC = BA_1 : BC_1 = 6 : 5$. Таким образом, окончательно получаем, что $R_1 : R_2 = (21/10) : (6/5) = 7 : 4$.

5. [5 баллов] От пристани A к пристани B, расположенной от A вниз по течению, одновременно отправились лодка и катер. Двумя километрами выше от A по течению к B отправился также плот. Если сложить времена движения лодки, катера и плота до пристани B, то получится 29 часов. Найдите расстояние между пристанями, если известно, что лодка прибыла к B на 3 часа позже катера, скорости плота, лодки и катера являются соответственно первым, вторым и четвертым членами некоторой арифметической прогрессии, а скорость плота, скорость в стоячей воде лодки и скорость в стоячей воде катера — тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: 20 км.

Решение. Обозначим через x км расстояние между пристанями, y км/ч — скорость течения реки (и, соответственно, скорость плота) и через z км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость движения лодки по течению равна $z+y$ км/ч, а скорость движения по течению катера (как четвёртый член арифметической прогрессии) равна $z+y+2(z+y-y) = 3z+y$. Получаем систему:

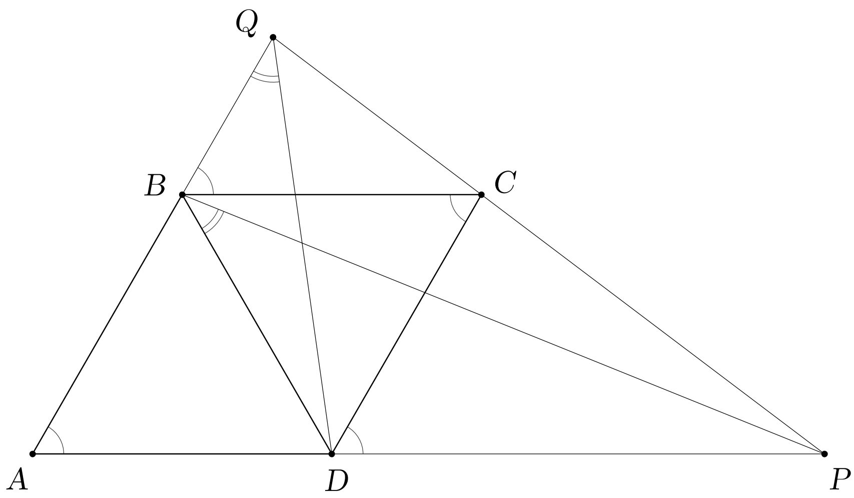
$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{y} + \dfrac{x}{z+y} + \dfrac{x}{3z+y} = 29, \\[2ex] \dfrac{x}{z+y} - \dfrac{x}{3z+y} = 3. \end{cases}$$

Так как скорость движения катера в стоячей воде равна $3z$ км/ч, получаем, что $z = 3y$, поскольку y, z и $3z$ составляют геометрическую прогрессию. Из второго уравнения системы следует, что $\dfrac{x}{y} = 20$. Тогда из первого уравнения $y = 1$, и $x = 20$.

6. [5 баллов] Угол A ромба $ABCD$ равен 60°. На продолжениях его сторон AB и AD за точки B и D взяты точки Q и P соответственно так, что прямая PQ проходит через точку C. Найдите длину отрезка BQ, если $DP = 20$, а $DQ : BP = 9 : 10$.

Ответ: $\dfrac{81}{5}$.

Решение. Треугольники BAD и BCD равносторонние, поэтому $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$, откуда $\angle QBC = \angle CDP = 60^\circ$. Поскольку $BC \parallel AP$, треугольники BCQ и APQ подобны.



Аналогично из того, что $DC \parallel AQ$, следует, что треугольники DPC и APQ подобны. Поэтому треугольники BCQ и DPC подобны, откуда $\dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{DC}{DP}$. Поскольку $BC = CD = BD$, получаем соотношение $\dfrac{BQ}{BD} = \dfrac{BD}{DP}$. Углы DBQ и PDB равны $120°$, поэтому треугольники QBD и BDP подобны по углу и двум парам прилежащих пропорциональных сторон. Значит, $\dfrac{DQ}{BP} = \dfrac{BQ}{BD}$ и $\dfrac{DQ}{BP} = \dfrac{BD}{DP}$. Умножив два полученных равенства, получим, что $\left(\dfrac{DQ}{BP}\right)^2 = \dfrac{BQ}{DP}$, то есть $BQ = \left(\dfrac{DQ}{BP}\right)^2 \cdot DP = \dfrac{81}{5}$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \max\left(6 + \dfrac{8y}{x}; 8 - \dfrac{6y}{x}\right), \\ y = ax - 8a + 9 \end{cases}$$

имеет нечётное количество решений.

Ответ: $a \in \left\{-\dfrac{16 + 5\sqrt{15}}{3}, 0\right\} \cup \left[\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right] \cup \{8\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $6 + \dfrac{8y}{x}$ и $8 - \dfrac{6y}{x}$ больше. Заметим, что

$$6 + \frac{8y}{x} \leqslant 8 - \frac{6y}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7y - x}{x} \leqslant 0.$$

При $x > 0$ это неравенство выполняется во всех точках, лежащих на прямой $y = \dfrac{x}{7}$ и ниже неё, а при $x < 0$ — во всех точках, лежащих на прямой $y = \dfrac{x}{7}$ и выше неё.

При $\dfrac{7y - x}{x} \leqslant 0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x + \frac{y^2}{x} = 8 - \frac{6y}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25. \tag{7}$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(4; -3)$ и радиусом 5. Прямую $y = \dfrac{x}{7}$ окружность (7) пересекает в точках $(0; 0)$ и $(7; 1)$, а прямую $x = 0$ — в точке $(0; -6)$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\dfrac{7y - x}{x} \leqslant 0$, есть дуга окружности (7) с концами $(0; -6)$ и $(7; 1)$.

При $\dfrac{7y-x}{x} > 0$ первое уравнение системы примет вид

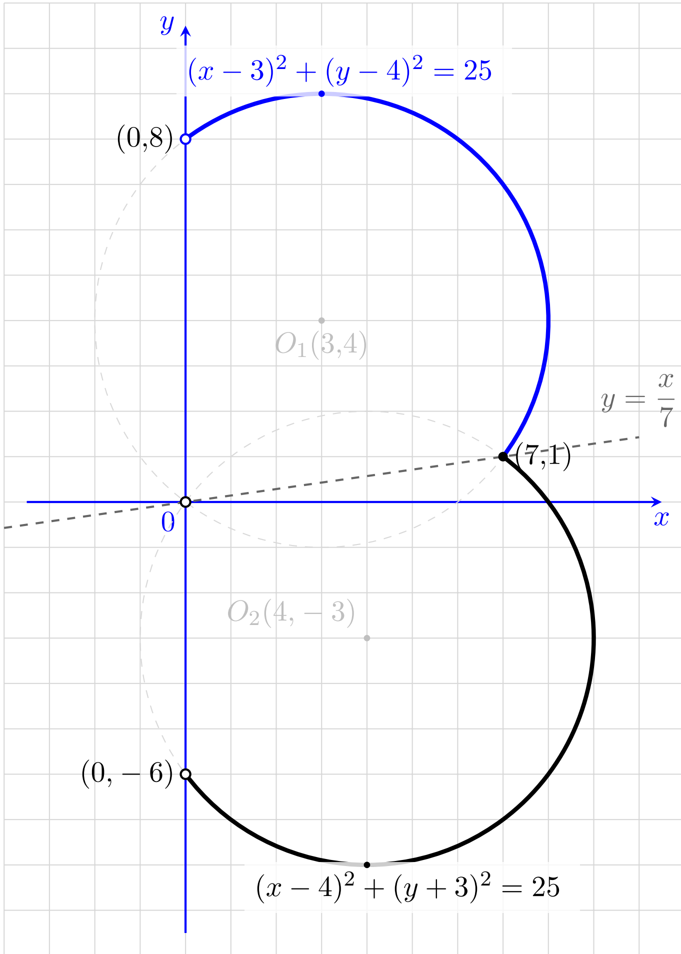
$$x + \frac{y^2}{x} = 6 + \frac{8y}{x} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25. \quad (8)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(3;4)$ и радиусом 5. Прямую $y = \dfrac{x}{7}$ окружность (8) пересекает в точках $(0;0)$ и $(7;1)$, а прямую $x=0$ — в точке $(0;8)$. Поэтому часть множества M, точки которой удовлетворяют условию $\dfrac{7y-x}{x} > 0$, есть дуга окружности (8) с концами $(0;8)$ и $(7;1)$.

Итак, множество M имеет вид объединения двух указанных дуг и изображено на рисунке.

Перепишем второе уравнение системы в виде $y - 9 = a(x-8)$. При различных значениях параметра a данное уравнение задаёт прямые с угловым коэффициентом a, проходящие через точку $(8;9)$. Отметим, что любая прямая, проходящая через эту точку, кроме вертикальной, может быть задана данным уравнением с помощью выбора значения a.

Найдем значения a, при которых окружность (7) касается прямой $y - 9 = a(x-8)$:



$$\frac{|4a+3+9-8a|}{\sqrt{a^2+1}} = 5 \iff |12-4a| = 5\sqrt{a^2+1} \iff 9a^2+96a-119=0,$$

то есть касание с дугой

$$\left\{(x;y) \;\middle|\; \frac{7y-x}{x} \leqslant 0,\ (x-4)^2+(y+3)^2=25\right\}$$

происходит при $a = -\dfrac{16+5\sqrt{15}}{3}$.

Точка $(3;9)$ окружности (8) имеет максимальную ординату среди всех точек множества M, поэтому прямая $y = a(x-8)+9$ касается этой окружности только при $a=0$.

При $a = \dfrac{1}{8}$ прямая проходит через точку $(0;8)$, при $a = \dfrac{15}{8}$ — через точку $(0;-6)$, а при $a=8$ — через точку $(7;1)$.

Найдём количество точек пересечения прямой $y = a(x-8)+9$ со множеством M:

1) при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{16+5\sqrt{15}}{3}\right)$ — 2 точки;
2) при $a = -\dfrac{16+5\sqrt{15}}{3}$ — 3 точки;
3) при $a \in \left(-\dfrac{16+5\sqrt{15}}{3}; 0\right)$ — 2 точки;
4) при $a = 0$ — 1 точка;
5) при $a \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right)$ — 2 точки;
6) при $a \in \left[\dfrac{1}{8}; \dfrac{15}{8}\right]$ — 1 точка;
7) при $a \in \left(\dfrac{15}{8}; 8\right)$ — 2 точки;
8) при $a = 8$ — 3 точки;
9) при $a \in (8, +\infty)$ — 2 точки.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a \in \left\{-\dfrac{16+5\sqrt{15}}{3}; 0\right\} \cup \left[\dfrac{1}{8}; \dfrac{15}{8}\right] \cup \{8\}$.