9 класс – день 1

1. а) На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число $A = 1\,188$, чтобы получилось некоторое натуральное число в натуральной степени, отличной от 1?
Ответ: 33.
Решение. Раскладывая на множители, получаем $A = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$. При разложении на простые множители числа вида n^k, где n и k — натуральные, степени всех простых множителей кратны k. Чтобы получить полный квадрат, надо умножить A на $3 \cdot 11 = 33$ — выйдет число $33A = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11^2 = \left(2 \cdot 3^2 \cdot 11\right)^2$. Для получения из A точного куба потребуется умножать на $2 \cdot 11^2 = 242$, а для получения бо́льших степеней — на бо́льшие числа.

   б) На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число $A = 936$, чтобы получилось некоторое натуральное число в натуральной степени, отличной от 1?
Ответ: 26.

   в) На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число $A = 792$, чтобы получилось некоторое натуральное число в натуральной степени, отличной от 1?
Ответ: 22.

   г) На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число $A = 756$, чтобы получилось некоторое натуральное число в натуральной степени, отличной от 1?
Ответ: 21.

2. а) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а $\sqrt{6}$ и $\sqrt{24}$ — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ.
Ответ: 12.

б) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а $\sqrt{7}$ и $\sqrt{63}$ — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ.
Ответ: 21.

в) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{50}$ — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ.
Ответ: 20.

г) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а $\sqrt{52}$ и $\sqrt{13}$ — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ.
Ответ: 26.

В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно, а R и r — радиусы этих окружностей. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника HPQ.
Ответ: Rr.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, следовательно, HP и HQ — биссектрисы прямых углов AHB и AHC соответственно. Тогда $HP = R\sqrt{2}$, $HQ = r\sqrt{2}$, а $\angle PHQ = 90^\circ$. Значит, $S_{HPQ} = \frac{1}{2} \cdot HP \cdot HQ = Rr$.

3. а) Ваня и Лёня бегают по круговой дорожке стадиона 500-метровой длины в одном направлении. Ваня бежит с постоянной скоростью v км/ч, но он начал пробежку на 23 минуты позже Лёни. А Лёня бежит с постоянной скоростью 12 км/ч, но останавливается на 1 минуту каждые 300 метров. С какой скоростью v бежит Ваня, если известно, что они одновременно пересекли финишную черту, пробежав ровно по 20 кругов каждый?

Ответ: 10.

Решение. Дистанция, которую пробегают Ваня и Лёня, составляет $500\,\text{м}\cdot 20 = 10\,\text{км}$. Лёня непосредственно на бег тратит $\frac{10\,\text{км}}{12\,\text{км/ч}} = 50\,\text{мин}$. Кроме того, он делает 33 остановки по 1 минуте, поэтому суммарно на дистанцию у него уходит 1 ч 23 мин.

Ваня начинает на 23 минуты позже, вследствие чего ему необходимо пробежать 10 ровно за час. Значит, $v = 10\,\text{км/ч}$.

б) Ваня и Лёня бегают по круговой дорожке стадиона 500-метровой длины в одном направлении. Ваня бежит с постоянной скоростью v км/ч, но он начал пробежку на 20 минут позже Лёни. А Лёня бежит с постоянной скоростью 15 км/ч, но останавливается на 1 минуту каждые 420 метров. С какой скоростью v бежит Ваня, если известно, что они одновременно пересекли финишную черту, пробежав ровно по 30 кругов каждый?

Ответ: 12.

в) Ваня и Лёня бегают по круговой дорожке стадиона 400-метровой длины в одном направлении. Ваня бежит с постоянной скоростью v км/ч, но он начал пробежку на 15 минут позже Лёни. А Лёня бежит с постоянной скоростью 12 км/ч, но останавливается на 1 минуту каждые 245 метров. С какой скоростью v бежит Ваня, если известно, что они одновременно пересекли финишную черту, пробежав ровно по 25 кругов каждый?

Ответ: 8.

г) Ваня и Лёня бегают по круговой дорожке стадиона 400-метровой длины в одном направлении. Ваня бежит с постоянной скоростью v км/ч, но он начал пробежку на 16 минут позже Лёни. А Лёня бежит с постоянной скоростью 15 км/ч, но останавливается на 1 минуту каждые 670 метров. С какой скоростью v бежит Ваня, если известно, что они одновременно пересекли финишную черту, пробежав ровно по 35 кругов каждый?

Ответ: 14.

4. а) Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90°$. Точки O, P, Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE, CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 20$, $OP = 29$.
Ответ: 1 680.

б) Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90°$. Точки O, P, Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE, CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 9$, $OP = 41$.
Ответ: 1 440.

в) Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90°$. Точки O, P, Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE, CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 7$, $OP = 25$.
Ответ: 672.

г) Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90°$. Точки O, P, Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE, CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 10$, $OP = 26$.
Ответ: 960.

Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, и при этом $\angle CED = 90°$. Точки O, P, Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE, CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = a$, $OP = b$.
Ответ: $4a\sqrt{b^2 - a^2}$.

Решение. Треугольники ADE, BCE, CDE прямоугольные, поэтому центры их описанных окружностей — середины их гипотенуз, то есть отрезков DE, BE, CD. Значит, OP и OQ — средние линии треугольника CDE, значит, $CE = 2OQ = 2a$, $CD = 2OP = 2b$. Но тогда

$$S_{ABCD} = 2S_{CDE} = CE \cdot DE = CE \cdot \sqrt{CD^2 - CE^2} = 4a\sqrt{b^2 - a^2}.$$

5. а) Есть 300 карточек с числами от 1 до 300 (на каждой карточке написано ровно одно число, числа на карточках попарно различны). Сколькими способами можно выбрать три карточки, чтобы сумма чисел на них была кратна 3?

Ответ: $3 \cdot C_{100}^3 + 100^3 = 1\,485\,100$.

Решение. Найдем количество способов выбрать три карточки (без повторений), содержащие натуральные числа 1 до $3n$ так, чтобы сумма чисел на карточках делилась на 3. Все наборы разобьём на два класса: к первому отнесём все те тройки, в которых остатки всех трёх чисел от деления на 3 одинаковы, а ко второму — тройки, в которых все три остатка от деления на 3 встречаются по одному разу. Общее число способов из первого класса равно $3 \cdot C_n^3$, а из второго, соответственно, n^3. Получаем ответ $3 \cdot C_n^3 + n^3$. При $n = 100$ получаем $3 \cdot C_{100}^3 + 100^3 = 1\,485\,100$.

б) Есть 270 карточек с числами от 1 до 270 (на каждой карточке написано ровно одно число, числа на карточках попарно различны). Сколькими способами можно выбрать три карточки, чтобы сумма чисел на них была кратна 3?

Ответ: $3 \cdot C_{90}^3 + 90^3 = 1\,081\,440$.

в) Есть 240 карточек с числами от 1 до 240 (на каждой карточке написано ровно одно число, числа на карточках попарно различны). Сколькими способами можно выбрать три карточки, чтобы сумма чисел на них была кратна 3?

Ответ: $3 \cdot C_{80}^3 + 80^3 = 758\,480$.

г) Есть 210 карточек с числами от 1 до 210 (на каждой карточке написано ровно одно число, числа на карточках попарно различны). Сколькими способами можно выбрать три карточки, чтобы сумма чисел на них была кратна 3?

Ответ: $3 \cdot C_{70}^3 + 70^3 = 507\,220$.

6. а) Ненулевые числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b+c-5a} = \frac{b}{a+c-5b} = \frac{c}{a+b-5c}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{5a}{b} + \frac{5c}{b}$?

Ответ: -7.

Решение. Перепишем равенство в виде $\frac{a}{(a+b+c)-6a} = \frac{b}{(a+b+c)-6b} = \frac{c}{(a+b+c)-6c}$. Перевернув это равенство, получим $\frac{a+b+c}{a} - 6 = \frac{a+b+c}{b} - 6 = \frac{a+b+c}{c} - 6$. Отсюда либо $a+b+c=0$, либо $a=b=c$. Разберем эти случаи.

- Если $a+b+c=0$, то $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{5a}{b} + \frac{5c}{b} = \frac{2(b+c)}{a} + \frac{5(a+c)}{b} = \frac{-2a}{a} + \frac{-5b}{b} = -7$.
- Если $a=b=c$, то $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{5a}{b} + \frac{5c}{b} = 2+2+5+5 = 14$.

Таким образом, искомое наименьшее значение равно -7.

б) Ненулевые числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b+c-5a} = \frac{b}{a+c-5b} = \frac{c}{a+b-5c}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{3b}{a} + \frac{3c}{a} + \frac{7a}{c} + \frac{7b}{c}$?

Ответ: -10.

в) Ненулевые числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b+c-5a} = \frac{b}{a+c-5b} = \frac{c}{a+b-5c}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{7b}{a} + \frac{7c}{a} - \frac{2a}{b} - \frac{2c}{b}$?

Ответ: -5.

г) Ненулевые числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b+c-5a} = \frac{b}{a+c-5b} = \frac{c}{a+b-5c}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{5b}{a} + \frac{5c}{a} - \frac{3a}{c} - \frac{3b}{c}$?

Ответ: -2.

7. а) Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC. Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC. Найдите CE, если $AP = 4$, а радиус окружности ω равен 10,5.
Ответ: 4,725.

б) Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC. Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC. Найдите CE, если $AP = 5$, а радиус окружности ω равен 7,5.
Ответ: 1,875.

в) Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC. Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC. Найдите CE, если $AP = 20$, а радиус окружности ω равен 15,6.
Ответ: 1,755.

г) Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC. Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC. Найдите CE, если $AP = 3$, а радиус окружности ω равен 12.
Ответ: 8.

Центр окружности ω радиуса R расположен на гипотенузе AC треугольника ABC. Известно, что ω пересекает AC в точках P и E (P лежит между A и E) и касается обоих катетов треугольника ABC. Найдите CE, если $AP = a = 3$, а радиус окружности ω равен $r = 12$.
Ответ: $\frac{r(r+a)}{\sqrt{a^2+2ar}} - r = 8$.
Решение. Пусть O — центр окружности, G и H — точки касания окружности с катетами AB и BC соответственно, а $\angle ACB = \gamma$, $CE = x$. Из прямоугольных треугольников AGO и CHO получаем соотношения

$$\cos\gamma = \frac{GO}{AG} = \frac{r}{r+a}, \qquad \sin\gamma = \frac{HO}{CO} = \frac{r}{r+x}.$$

Отсюда следует, что $\frac{r^2}{(r+a)^2} + \frac{r^2}{(r+x)^2} = 1$. Решая это уравнение, получаем, что $x = \frac{r(r+a)}{\sqrt{a^2+2ar}} - r$.

8. а) Сколько существует способов переставить местами буквы $abcabe$ так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

Ответ: $\dfrac{6!}{2^2} - 2 \cdot \dfrac{5!}{2} + 4! = 84$.

Решение. Пусть X — число способов переставить местами буквы $abcabe$, A — число способов переставить их так, чтобы две буквы a стояли рядом, а B — аналогичное число способов, в которых две буквы b стоят рядом. Наконец, пусть C — число способов, в которых как две буквы a стоят рядом, так и две буквы b стоят рядом. Тогда искомое в задаче число равно $X - A - B + C$. Несложно подсчитать, что $X = \dfrac{6!}{2! \cdot 2!}$, $A = B = \dfrac{5!}{2}$, $C = 4!$, поэтому ответ $\dfrac{6!}{2^2} - 2 \cdot \dfrac{5!}{2} + 4! = 84$.

б) Сколько существует способов переставить местами буквы $bcdecfb$ так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

Ответ: $\dfrac{7!}{2^2} - 2 \cdot \dfrac{6!}{2} + 5! = 660$.

в) Сколько существует способов переставить местами буквы $abefcbad$ так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

Ответ: $\dfrac{8!}{2^2} - 2 \cdot \dfrac{7!}{2} + 6! = 5\,760$.

г) Сколько существует способов переставить местами буквы $abefcbadg$ так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

Ответ: $\dfrac{9!}{2^2} - 2 \cdot \dfrac{8!}{2} + 7! = 55\,440$.

9. а) Числа a, b, c с нулевой суммой таковы, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=49$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

Ответ: -7.

Решение. Пусть $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$. Тогда $ab+bc+ca=kabc$. Возведя это равенство в квадрат, получим: $(kabc)^2=(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$, так как $a+b+c=0$. Тогда $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}=k^2$. Значит, если $\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}=49$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\pm 7$. Из условия следует, что хотя бы одна подходящая тройка чисел a, b, c существует. Тогда либо для тройки a, b, c, либо для тройки $-a, -b, -c$ значение выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ равно -7.

б) Числа a, b, c с нулевой суммой таковы, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=64$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

Ответ: -8.

в) Числа a, b, c с нулевой суммой таковы, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=81$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

Ответ: -9.

г) Числа a, b, c с нулевой суммой таковы, что $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=100$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

Ответ: -10.

10. а) Учитель математики договорился с пришедшими на кружок 23 учениками, что они выберут, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто — рыцарем (всегда говорить правду). После чего учитель раздал ученикам карточки с числами, причем числа на всех карточках различны. Ученики встали по кругу и посмотрели карточки соседей. После этого каждый из учеников сказал: «Число на моей карточке больше, чем у моих соседей». Какое наибольшее количество учеников могут сказать: «Число на моей карточке меньше, чем у моих соседей»?

Ответ: 21.

Решение. Пусть A и B – ученики, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами, соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу, A — рыцарь, а B — лжец. Значит, они оба не могут сказать вторую фразу. Поэтому вторую фразу могут сказать не больше 21 ученика.

Покажем, что ситуация, когда 21 ученик сможет сказать вторую фразу, возможна. Пусть ученикам (по кругу) достались карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 23$; при этом карточка с числом 23 досталась рыцарю, а остальные — лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую – все, кроме учеников с карточками 1 и 23.

б) Учитель математики договорился с пришедшими на кружок 19 учениками, что они выберут, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто — рыцарем (всегда говорить правду). После чего учитель раздал ученикам карточки с числами, причем числа на всех карточках различны. Ученики встали по кругу и посмотрели карточки соседей. После этого каждый из учеников сказал: «Число на моей карточке больше, чем у моих соседей». Какое наибольшее количество учеников могут сказать: «Число на моей карточке меньше, чем у моих соседей»?

Ответ: 17.

в) Учитель математики договорился с пришедшими на кружок 18 учениками, что они выберут, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто — рыцарем (всегда говорить правду). После чего учитель раздал ученикам карточки с числами, причем числа на всех карточках различны. Ученики встали по кругу и посмотрели карточки соседей. После этого каждый из учеников сказал: «Число на моей карточке больше, чем у моих соседей». Какое наибольшее количество учеников могут сказать: «Число на моей карточке меньше, чем у моих соседей»?

Ответ: 16.

г) Учитель математики договорился с пришедшими на кружок 15 учениками, что они выберут, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто — рыцарем (всегда говорить правду). После чего учитель раздал ученикам карточки с числами, причем числа на всех карточках различны. Ученики встали по кругу и посмотрели карточки соседей. После этого каждый из учеников сказал: «Число на моей карточке больше, чем у моих соседей». Какое наибольшее количество учеников могут сказать: «Число на моей карточке меньше, чем у моих соседей»?

Ответ: 13.