МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

   Ответ: $(6666, 202, 33)$.

   Решение. Заметим, что число A представляется в виде $\overline{xxxx} = x \cdot 11 \cdot 101$. В произведении ABC множители 11 и 101 встречаются четное число раз. Таким образом, трехзначное число B должно быть кратно 101, а двузначное число C – кратно 11. В силу условий $B = 202$, $C = 33$. Следовательно, $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot x$. Отсюда $x = 6$.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

   Ответ: 1.

   Решение. Из условия следует, что выполняется равенство
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}.$$
   Преобразуя, получаем:
$$\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y}\right) + 2\left(\frac{1}{(x-1)(y+1)} - \frac{1}{xy}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{y(y+1)} + 2 \cdot \frac{y-x+1}{xy(x-1)(y+1)} \;\Leftrightarrow\; y(y+1) - x(x-1) + 2(y-x+1) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (y+x+2)(y-x+1) = 0.$$
   Так как x и y — положительные числа, первый множитель положителен, поэтому второй множитель равен нулю, т.е. $x = y+1$. Значит, $x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = 1$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

   Ответ: а) $y = 1 + x + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$; $\quad y = 1 - 3x + 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
   б) 49 пар.

   Решение. Уравнение системы равносильно каждому из следующих:
$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi(x+y)) \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos\frac{\pi x - \pi y}{2} \cos\frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0,$$

откуда $\dfrac{\pi}{2}(y-x)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ или $\dfrac{\pi}{2}(3x+y)=\dfrac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнению удовлетворяют все такие (x,y), что либо $y=1+x+2k$, либо $y=1-3x+2m$, где k и m — целые. Заметим, что для целых x,y все точки, описываемые равенством $y=1-3x+2m$, $m\in\mathbb{Z}$, уже встречаются среди точек вида $y=1+x+2k$, $k\in\mathbb{Z}$ (достаточно взять $k=m-x$).

Рассмотрим теперь неравенство системы. По определению функций $\arcsin t$ и $\arccos t$ сумма $\arcsin\dfrac{x}{5}+$ $+\arccos\dfrac{y}{4}$ всегда лежит в $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, поэтому неравенство задаёт ограничения $x\in[-5,5]$, $y\in[-4,4]$ (из областей определения арккосинуса и арксинуса), а также $(x,y)\neq(5,-4)$ (в этой точке неравенство обращается в равенство).

Итак, остаётся подсчитать количество точек внутри прямоугольника $-5\leqslant x\leqslant 5$, $-4\leqslant y\leqslant 4$ без угловой точки $(x,y)=(5,-4)$, лежащих на прямых $y=x+1+2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Несложно видеть, что при чётных x в прямоугольник попадает по 4 точки, а при нечётных x — по 5 точек, за исключением $x=5$. Тогда получаем суммарно $5\times5+4\times6=49$ точек.

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

Ответ: 6.

Решение. Пусть всего одиннадцатиклассников N человек, а в конце месяца будет выделено $m>4$ билетов. Количество способов распределить 4 билета между учениками в начале месяца равно C_N^4, а количество способов распределения билетов, когда Петя и Вася попадают на концерт, равно C_{N-2}^2 (Петя и Вася получают билеты, а ещё два билета распределяются между оставшимися $N-2$ учениками). Значит, вероятность обоим ученикам попасть на концерт в начале месяца была равна

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4}=\frac{(N-2)!\,4!\,(N-4)!}{2!\,(N-4)!\,N!}=\frac{12}{N(N-1).}$$

Аналогично получаем, что вероятность, что Петя и Коля оба попадут на концерт в конце месяца, равна

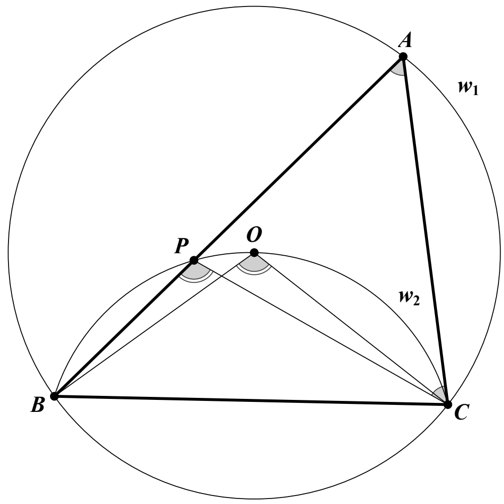
$$\frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m}=\frac{(N-2)!\,(N-m)!\,m!}{(m-2)!\,(N-m)!\,N!}=\frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Следовательно, вероятность увеличилась в $\frac{m\cdot(m-1)}{12}$ раз (эта величина не зависит от N). Отсюда получаем, что $\frac{m\cdot(m-1)}{12}=\frac{5}{2}$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $m=6$.

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

Ответ: 45.

Решение. Углы BAC и BOC — это центральный и вписанный углы для окружности ω_1, опирающиеся на дугу BC. Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Кроме того, углы BOC и BPC вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны между собой.



Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = \alpha$. Следовательно, треугольник ACP равнобедренный, $CP = AP = \dfrac{15}{2}$. Из этого треугольника находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2AP} = \dfrac{4}{5}$, и тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{2} \cdot 9 \cdot \dfrac{4}{5} = 45$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

Ответ: $M = 5\pi + 16$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. $\Phi(\alpha)$ — это две части круга ω с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 5$, отсекаемые хордами AB и CD, лежащими на прямых с уравнениями $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ соответственно. Хорды пересекаются в точке $N\left(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha\right)$, которая принадлежит ω, так как $|ON|^2 = \left(3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 = 18 < 25 = R^2$. Эта точка N является единственной общей точкой двух частей $\Phi(\alpha)$.

Периметр $\Phi(\alpha)$ равен $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где Σ_1 — сумма длин дуг AC и BD, Σ_2 — сумма длин хорд AB и CD. Угол между AB и CD равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\Sigma_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R = 5\pi.$$

Расстояния от точки O до AB и CD равны $\rho_1 = \left|3\sqrt{2}\sin\alpha\right|$ и $\rho_2 = \left|3\sqrt{2}\cos\alpha\right|$ соответственно, поэтому, используя неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ о среднем квадратическом и среднем арифметическом, получаем

$$\frac{\Sigma_2}{4} = \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2} + \sqrt{R^2 - \rho_2^2}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{2R^2 - \left(3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2}{2}} = 4.$$

Равенство достигается при

$$\sqrt{R^2 - \rho_1^2} = \sqrt{R^2 - \rho_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\alpha| = |\cos\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad |\operatorname{tg}\alpha| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\Sigma_2 = 16$, а $M = \max\left(\Sigma_1 + \Sigma_2\right) = 5\pi + 16$.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

Ответ: $60 - 24\sqrt{6}$.

Решение. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — нижнее, а $B_1B_2\dots B_n$ — верхнее основание данной усечённой пирамиды; O и O_1 — центры этих оснований (соответственно); M и M_1 — середины рёбер A_1A_2 и B_1B_2 (соответственно). Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что

$$MM_1 = MO + M_1O_1$$

и

$$A_1B_1 = A_1M + B_1M_1; \quad MO = A_1M\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \quad M_1O_1 = B_1M_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

следовательно,

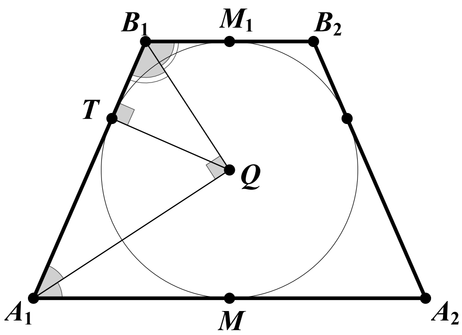
$$MM_1 = (A_1M + B_1M)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = A_1B_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Но $MM_1 < A_1B_1$, то есть

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; n < 4.$$

Поэтому данная в условии усечённая пирамида треугольная. Обозначим длину ребра нижнего основания через a, верхнего — через b. Так как шар Ω касается всех рёбер пирамиды, её боковая грань $A_1A_2B_2B_1$ — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и b.

Радиус вписанной окружности найдем из прямоугольного треугольника A_1QB_1:



$$QT^2 = A_1T\cdot B_1T = A_1M\cdot B_1M_1 = \frac{ab}{4},$$

$QT = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, следовательно, $MM_1 = \sqrt{ab}$. Но $MM_1 = MO + M_1O_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{b}{2\sqrt{3}}$, поэтому $\frac{a+b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{ab}$.

Имеем $(a+b)^2 = 12ab$, откуда $\frac{b}{a} = 5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ (так как $a > b$). Значит,

$$\frac{S_{\text{бок}}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{3\cdot\frac{a+b}{2}\cdot MM_1}{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3ab})\sqrt{ab}}{a^2} = 12\frac{b}{a} = 60 - 24\sqrt{6}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

   Ответ: $(5555, 101, 55)$.

   Решение. Заметим, что число A представляется в виде $\overline{xxxx} = x \cdot 11 \cdot 101$. В произведении ABC множители 11 и 101 встречаются четное число раз. Таким образом, трехзначное число B должно быть кратно 101, а двузначное число C – кратно 11. В силу условий $B = 101$, $C = 55$. Следовательно, $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = 5 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot x$. Отсюда $x = 5$.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

   Ответ: 27.

   Решение. Из условия следует, что выполняется равенство
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}.$$
   Преобразуя, получаем:
$$\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{(x-3)(y+3)} - \frac{1}{xy}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{3}{x(x-3)} - \frac{3}{y(y+3)} + 3 \cdot \frac{y-x+3}{xy(x-3)(y+3)} \;\Leftrightarrow\; y(y+3) - x(x-3) + (y-x+3) = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (y+x+1)(y-x+3) = 0.$$
   Так как x и y — положительные числа, первый множитель положителен, поэтому второй множитель равен нулю, т.е. $x = y+3$. Значит, $x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = 27$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

   Ответ: а) $y = 1 - x + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$; $\quad y = 3x - 1 + 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
   б) 85 пар.

   Решение. Уравнение системы равносильно каждому из следующих:
$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi(y-x)) \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos\frac{\pi x + \pi y}{2}\cos\frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0,$$

откуда $\dfrac{\pi}{2}(x+y)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ или $\dfrac{\pi}{2}(3x-y)=\dfrac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнению удовлетворяют все такие (x,y), что либо $y=1-x+2k$, либо $y=3x-1+2m$, где k и m — целые. Заметим, что для целых x,y все точки, описываемые равенством $y=3x-1+2m$, $m\in\mathbb{Z}$, уже встречаются среди точек вида $y=1-x+2k$, $k\in\mathbb{Z}$ (достаточно взять $k=m-x$).

Рассмотрим теперь неравенство системы. По определению функции $\arccos t$ сумма $\arccos\dfrac{x}{4}+\arccos\dfrac{y}{9}$ всегда лежит в $[0,2\pi]$, поэтому неравенство задаёт ограничения $x\in[-4,4]$, $y\in[-9,9]$ (из области определения арккосинуса), а также $(x,y)\neq(-4,-9)$ (в этой точке неравенство обращается в равенство).

Итак, остаётся подсчитать количество точек внутри прямоугольника $-4\leqslant x\leqslant 4$, $-9\leqslant y\leqslant 9$ без угловой точки $(x,y)=(-4,-9)$, лежащих на прямых $y=1-x+2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Несложно видеть, что при чётных x в прямоугольник попадает по 9 точек, а при нечётных x — по 10 точек, за исключением $x=-4$. Тогда получаем суммарно $9\times5+10\times4=85$ точек.

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

Ответ: 7.

Решение. Пусть всего одиннадцатиклассников N человек, а в конце месяца будет выделено $m>4$ билетов. Количество способов распределить 4 билета между учениками в начале месяца равно C_N^4, а количество способов распределения билетов, когда Петя и Вася попадают на концерт, равно C_{N-2}^2 (Петя и Вася получают билеты, а ещё два билета распределяются между оставшимися $N-2$ учениками). Значит, вероятность обоим ученикам попасть на концерт в начале месяца была равна

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4}=\frac{(N-2)!\,4!\,(N-4)!}{2!\,(N-4)!\,N!}=\frac{12}{N(N-1).}$$

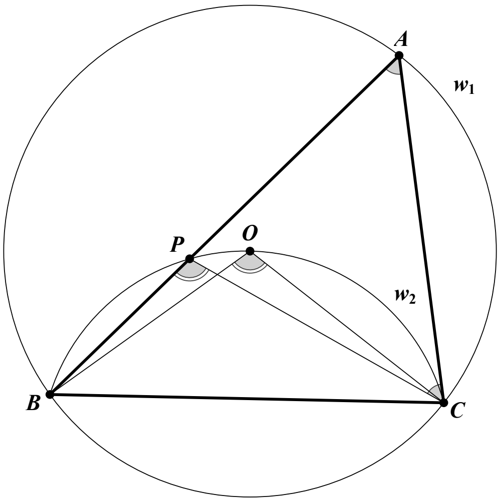
Аналогично получаем, что вероятность, что Петя и Коля оба попадут на концерт в конце месяца, равна

$$\frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m}=\frac{(N-2)!\,(N-m)!\,m!}{(m-2)!\,(N-m)!\,N!}=\frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Следовательно, вероятность увеличилась в $\frac{m\cdot(m-1)}{12}$ раз (эта величина не зависит от N). Отсюда получаем, что $\frac{m\cdot(m-1)}{12}=\frac{7}{2}$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $m=7$.

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

Ответ: $\dfrac{13\sqrt{39}}{10}$.



Решение. Углы BAC и BOC — это центральный и вписанный углы для окружности ω_1, опирающиеся на дугу BC. Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Кроме того, углы BOC и BPC вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны между собой.
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = \alpha$. Следовательно, треугольник ACP равнобедренный, $CP = AP = \dfrac{16}{5}$. Из этого треугольника находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2AP} = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$, и тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{26}{5} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{39}}{8} = \dfrac{13\sqrt{39}}{10}$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

Ответ: $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. $\Phi(\alpha)$ — это две части круга ω с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 3$, отсекаемые хордами AB и CD, лежащими на прямых с уравнениями $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$ соответственно. Хорды пересекаются в точке $N(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$, которая принадлежит ω, так как $|ON|^2 = (2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4 < 9 = R^2$. Эта точка N является единственной общей точкой двух частей $\Phi(\alpha)$.
Периметр $\Phi(\alpha)$ равен $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где Σ_1 — сумма длин дуг AC и BD, Σ_2 — сумма длин хорд AB и CD. Угол между AB и CD равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\Sigma_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R = 3\pi.$$

Расстояния от точки O до AB и CD равны $\rho_1 = |2\cos\alpha|$ и $\rho_2 = |2\sin\alpha|$ соответственно, поэтому, используя неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ о среднем квадратическом и среднем арифметическом, получаем

$$\frac{\Sigma_2}{4} = \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2} + \sqrt{R^2 - \rho_2^2}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{2R^2 - (2\cos\alpha)^2 - (2\sin\alpha)^2}{2}} = \sqrt{7}.$$

Равенство достигается при

$$\sqrt{R^2 - \rho_1^2} = \sqrt{R^2 - \rho_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\alpha| = |\cos\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad |\operatorname{tg}\alpha| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\Sigma_2 = 4\sqrt{7}$, а $M = \max(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 3\pi + 4\sqrt{7}$.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — нижнее, а $B_1B_2\dots B_n$ — верхнее основание данной усечённой пирамиды, причём сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего; O и O_1 — центры этих оснований (соответственно); M и M_1 — середины рёбер A_1A_2 и B_1B_2 (соответственно). Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что

$$MM_1 = MO + M_1O_1$$

и

$$A_1B_1 = A_1M + B_1M_1;\quad MO = A_1M\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\quad M_1O_1 = B_1M_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

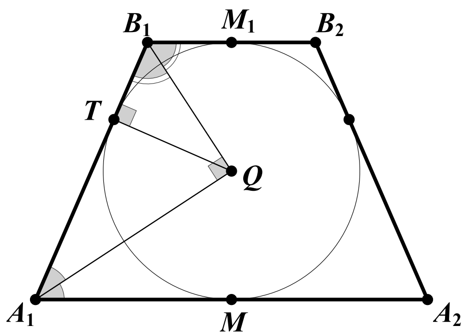
следовательно,

$$MM_1 = (A_1M + B_1M)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = A_1B_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Но $MM_1 < A_1B_1$, то есть

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad n < 4.$$

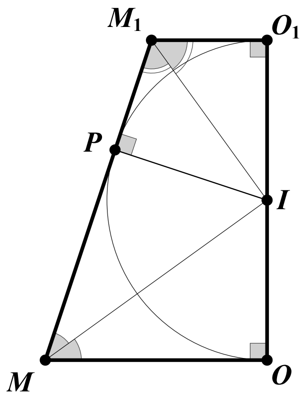
Поэтому данная в условии усечённая пирамида треугольная. Обозначим длину ребра нижнего основания через a, верхнего — через b. Так как шар Ω касается всех рёбер пирамиды, её боковая грань $A_1A_2B_2B_1$ — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и b.



Радиус вписанной окружности найдем из прямоугольного треугольника A_1QB_1:

$$QT^2 = A_1T\cdot B_1T = A_1M\cdot B_1M_1 = \frac{ab}{4},$$

$QT = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, следовательно, $MM_1 = \sqrt{ab}$. Но $MM_1 = MO + M_1O_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{b}{2\sqrt{3}}$, поэтому $\frac{a+b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{ab}$.



Аналогично из прямоугольной трапеции MOO_1M_1

$$IP^2 = MP\cdot M_1P = MO\cdot M_1O_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{ab}{12},$$

$OO_1 = 2IP = \sqrt{\frac{ab}{3}}$. Искомый угол есть $\angle OA_1B_1$:

$$\sin\angle OA_1B_1 = \frac{OO_1}{A_1B_1} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{3}}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{3}}}{\sqrt{3ab}} = \frac{1}{3}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

   Ответ: $(2222, 606, 33)$, $(8888, 606, 33)$.

   Решение. Заметим, что число A представляется в виде $\overline{xxxx} = x \cdot 11 \cdot 101$. В произведении ABC множители 11 и 101 встречаются четное число раз. Таким образом, трехзначное число B должно быть кратно 101, а двузначное число C – кратно 11. В силу условий $B = 606$, $C = 33$. Следовательно, $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 606 \cdot 33 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot x$. Отсюда $x = 2$ или $x = 8$.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

   Ответ: 8.

   Решение. Из условия следует, что выполняется равенство
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}.$$
   Преобразуя, получаем:
$$\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y}\right) + 5\left(\frac{1}{(x-2)(y+2)} - \frac{1}{xy}\right) = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \frac{2}{x(x-2)} - \frac{2}{y(y+2)} + 10 \cdot \frac{y-x+2}{xy(x-2)(y+2)} \ \Leftrightarrow \ y(y+2) - x(x-2) + 5(y-x+2) = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ (y+x+5)(y-x+2) = 0.$$
   Так как x и y — положительные числа, первый множитель положителен, поэтому второй множитель равен нулю, т.е. $x = y + 2$. Значит, $x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) = 8$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

   Ответ: а) $y = -x + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$; $\quad y = 3x + 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
   б) 32 пары.

   Решение. Уравнение системы равносильно каждому из следующих:
$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi(y-x)), \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0,$$

откуда $\dfrac{\pi}{2}(x+y)=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ или $\dfrac{\pi}{2}(3x-y)=\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнению удовлетворяют все такие (x,y), что либо $y=-x+2k$, либо $y=3x+2m$, где k и m — целые. Заметим, что для целых x,y все точки, описываемые равенством $y=3x+2m$, $m\in\mathbb{Z}$, уже встречаются среди точек вида $y=-x+2k$, $k\in\mathbb{Z}$ (достаточно взять $k=m+2x$).

Рассмотрим теперь неравенство системы. По определению функции $\arcsin t$ сумма $\arcsin\dfrac{x}{6}+\arcsin\dfrac{y}{2}$ всегда лежит в $[-\pi,\pi]$, поэтому неравенство задаёт ограничения $x\in[-6,6]$, $y\in[-2,2]$ (из области определения арксинуса), а также $(x,y)\neq(6,2)$ (в этой точке неравенство обращается в равенство).

Итак, остаётся подсчитать количество точек внутри прямоугольника $-6\leqslant x\leqslant 6$, $-2\leqslant y\leqslant 2$ без угловой точки $(x,y)=(6,2)$, лежащих на прямых $y=-x+2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Несложно видеть, что при чётных y в прямоугольник попадает по 7 точек (кроме $y=2$), а при нечётных y — по 6 точек. Тогда получаем суммарно $6\times 3+7\times 2=32$ точки.

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

Ответ: 9.

Решение. Пусть всего одиннадцатиклассников N человек, а в конце месяца будет выделено $m>4$ билетов. Количество способов распределить 4 билета между учениками в начале месяца равно C_N^4, а количество способов распределения билетов, когда Петя и Вася попадают на концерт, равно C_{N-2}^2 (Петя и Вася получают билеты, а ещё два билета распределяются между оставшимися $N-2$ учениками). Значит, вероятность обоим ученикам попасть на концерт в начале месяца была равна

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4}=\frac{(N-2)!\,4!\,(N-4)!}{2!\,(N-4)!\,N!}=\frac{12}{N(N-1).}$$

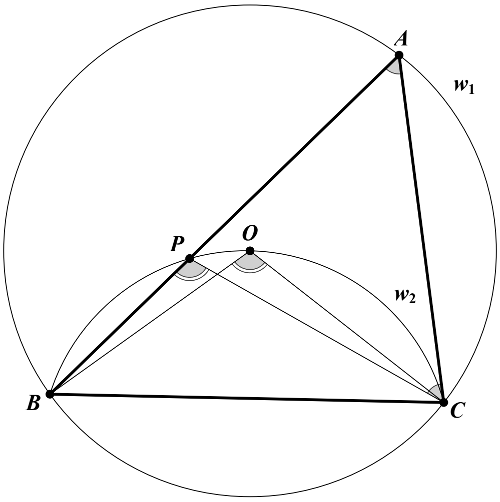
Аналогично получаем, что вероятность, что Петя и Коля оба попадут на концерт в конце месяца, равна

$$\frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m}=\frac{(N-2)!\,(N-m)!\,m!}{(m-2)!\,(N-m)!\,N!}=\frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Следовательно, вероятность увеличилась в $\frac{m\cdot(m-1)}{12}$ раз (эта величина не зависит от N). Отсюда получаем, что $\frac{m\cdot(m-1)}{12}=6$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $m=9$.

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

Ответ: $\dfrac{105\sqrt{51}}{2}$.



Решение. Углы BAC и BOC — это центральный и вписанный углы для окружности ω_1, опирающиеся на дугу BC. Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Кроме того, углы BOC и BPC вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны между собой.
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = \alpha$. Следовательно, треугольник ACP равнобедренный, $CP = AP = 25$. Из этого треугольника находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4AP^2 - AC^2}}{2AP} = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$, и тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot 30\cdot 35\cdot\dfrac{\sqrt{51}}{10} = \dfrac{105\sqrt{51}}{2}$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0,\\ x^2 + y^2 \leqslant 169.\end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

Ответ: $M = 13\pi + 48$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. $\Phi(\alpha)$ — это две части круга ω с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 13$, отсекаемые хордами AB и CD, лежащими на прямых с уравнениями $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$ и $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ соответственно. Хорды пересекаются в точке $N\left(-5\sqrt{2}\cos\alpha; -5\sqrt{2}\sin\alpha\right)$, которая принадлежит ω, так как $|ON|^2 = \left(-5\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 + \left(-5\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2 = 50 < 169 = R^2$. Эта точка N является единственной общей точкой двух частей $\Phi(\alpha)$.
Периметр $\Phi(\alpha)$ равен $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где Σ_1 — сумма длин дуг AC и BD, Σ_2 — сумма длин хорд AB и CD. Угол между AB и CD равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\Sigma_1 = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot R = 13\pi.$$

Расстояния от точки O до AB и CD равны $\rho_1 = \left|-5\sqrt{2}\cos\alpha\right|$ и $\rho_2 = \left|-5\sqrt{2}\sin\alpha\right|$ соответственно, поэтому, используя неравенство $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ о среднем квадратическом и среднем арифметическом, получаем

$$\frac{\Sigma_2}{4} = \frac{\sqrt{R^2-\rho_1^2} + \sqrt{R^2-\rho_2^2}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{2R^2 - \left(5\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2}{2}} = 12.$$

Равенство достигается при

$$\sqrt{R^2-\rho_1^2} = \sqrt{R^2-\rho_1^2} \quad\Leftrightarrow\quad \rho_1 = \rho_2 \quad\Leftrightarrow\quad |\sin\alpha| = |\cos\alpha| \quad\Leftrightarrow\quad |\operatorname{tg}\alpha| = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда $\Sigma_2 = 48$, а $M = \max\left(\Sigma_1 + \Sigma_2\right) = 13\pi + 48$.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

Ответ: $\dfrac{5-2\sqrt{6}}{12}$.

Решение. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — нижнее, а $B_1B_2\ldots B_n$ — верхнее основание данной усечённой пирамиды; O и O_1 — центры этих оснований (соответственно); M и M_1 — середины рёбер A_1A_2 и B_1B_2 (соответственно). Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что

$$MM_1 = MO + M_1O_1$$

и

$$A_1B_1 = A_1M + B_1M_1;\quad MO = A_1M\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\quad M_1O_1 = B_1M_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

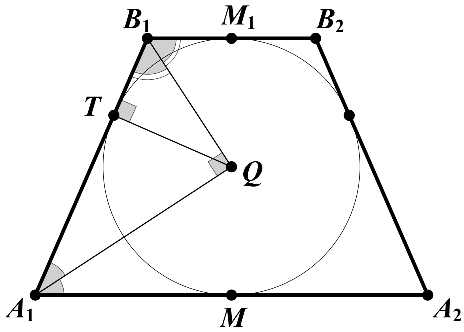
следовательно,

$$MM_1 = (A_1M + B_1M)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = A_1B_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Но $MM_1 < A_1B_1$, то есть

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad n < 4.$$

Поэтому данная в условии усечённая пирамида треугольная. Обозначим длину ребра нижнего основания через a, верхнего — через b. Так как шар Ω касается всех рёбер пирамиды, её боковая грань $A_1A_2B_2B_1$ — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и b.



Радиус вписанной окружности найдем из прямоугольного треугольника A_1QB_1:

$$QT^2 = A_1T\cdot B_1T = A_1M\cdot B_1M_1 = \frac{ab}{4},$$

$QT = \dfrac{1}{2}\sqrt{ab}$, следовательно, $MM_1 = \sqrt{ab}$. Но $MM_1 = MO + M_1O_1 = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} + \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$, поэтому $\dfrac{a+b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{ab}$.

Имеем $(a+b)^2 = 12ab$, откуда $\dfrac{b}{a} = 5 - 2\sqrt{6} = \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ (так как $a > b$). Значит,

$$\frac{S_{B_1B_2B_3}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)}{3\cdot\frac{a+b}{2}\cdot MM_1} = \frac{b^2}{2\sqrt{3}(a+b)\sqrt{ab}} = \frac{b}{12a} = \frac{5-2\sqrt{6}}{12}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

   Ответ: $(7777, 707, 11)$.

   Решение. Заметим, что число A представляется в виде $\overline{xxxx} = x \cdot 11 \cdot 101$. В произведении ABC множители 11 и 101 встречаются четное число раз. Таким образом, трехзначное число B должно быть кратно 101, а двузначное число C – кратно 11. В силу условий $B = 707$, $C = 11$. Следовательно, $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 707 \cdot 11 = 7 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot x$. Отсюда $x = 7$.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

   Ответ: 64.

   Решение. Из условия следует, что выполняется равенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}.$$

   Преобразуя, получаем:

$$\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y+4} - \frac{1}{y}\right) + 3\left(\frac{1}{(x-4)(y+4)} - \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{x(x-4)} - \frac{4}{y(y+4)} + 12 \cdot \frac{y-x+4}{xy(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow y(y+4) - x(x-4) + 3(y-x+4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+x+3)(y-x+4) = 0.$$

   Так как x и y — положительные числа, первый множитель положителен, поэтому второй множитель равен нулю, т.е. $x = y + 4$. Значит, $x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = 64$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

   Ответ: а) $x = 1 - y + 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$; $x = 1 + 3y + 2m$, где $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
   б) 67 пар.

   Решение. Уравнение системы равносильно каждому из следующих:

$$\cos(2\pi y) = -\cos(\pi(y-x)) \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{\pi x + \pi y}{2} \cos\frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0,$$

откуда $\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $\frac{\pi}{2}(x-3y) = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнению удовлетворяют все такие (x, y), что либо $x = 1 - y + 2k$, либо $x = 1 + 3y + 2m$, где k и m — целые. Заметим, что для целых x, y все точки, описываемые равенством $x = 1 + 3y + 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, уже встречаются среди точек вида $x = 1 - y + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ (достаточно взять $k = m + 2y$).

Рассмотрим теперь неравенство системы. По определению функций $\arcsin t$ и $\arccos t$ сумма $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ всегда лежит в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, поэтому неравенство задаёт ограничения $x \in [-7, 7]$, $y \in [-4, 4]$ (из областей определения арккосинуса и арксинуса), а также $(x, y) \neq (7, 4)$ (в этой точке неравенство обращается в равенство).

Итак, остаётся подсчитать количество точек внутри прямоугольника $-7 \leqslant x \leqslant 7$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$ без угловой точки $(x, y) = (7, 4)$, лежащих на прямых $x = 1 - y + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Несложно видеть, что при чётных x в прямоугольник попадает по 4 точки, а при нечётных x — по 5 точек, за исключением $x = 7$. Тогда получаем суммарно $5 \times 7 + 4 \times 8 = 67$ точек.

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

Ответ: 12.

Решение. Пусть всего одиннадцатиклассников N человек, а в конце месяца будет выделено $m > 4$ билетов. Количество способов распределить 4 билета между учениками в начале месяца равно C_N^4, а количество способов распределения билетов, когда Петя и Вася попадают на концерт, равно C_{N-2}^2 (Петя и Вася получают билеты, а ещё два билета распределяются между оставшимися $N-2$ учениками). Значит, вероятность обоим ученикам попасть на концерт в начале месяца была равна

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{(N-2)!\,4!\,(N-4)!}{2!\,(N-4)!\,N!} = \frac{12}{N(N-1).}$$

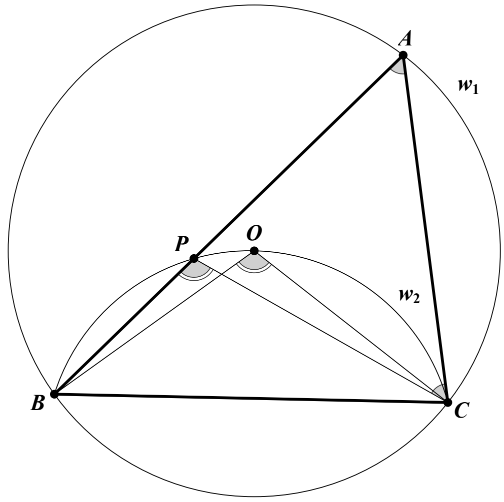
Аналогично получаем, что вероятность, что Петя и Коля оба попадут на концерт в конце месяца, равна

$$\frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m} = \frac{(N-2)!\,(N-m)!\,m!}{(m-2)!\,(N-m)!\,N!} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Следовательно, вероятность увеличилась в $\frac{m\cdot(m-1)}{12}$ раз (эта величина не зависит от N). Отсюда получаем, что $\frac{m\cdot(m-1)}{12} = 11$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $m = 12$.

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

Ответ: $\dfrac{99\sqrt{15}}{2}$.



Решение. Углы BAC и BOC — это центральный и вписанный углы для окружности ω_1, опирающиеся на дугу BC. Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC$. Кроме того, углы BOC и BPC вписаны в окружность ω_2 и опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны между собой.
Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = \alpha$. Следовательно, треугольник ACP равнобедренный, $CP = AP = 16$. Из этого треугольника находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4AP^2-AC^2}}{2AP} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$, и тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot 22\cdot\dfrac{3\sqrt{15}}{16} = \dfrac{99\sqrt{15}}{2}$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\leqslant 0,\\ x^2+y^2\leqslant 36.\end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. $\Phi(\alpha)$ — это две части круга ω с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 6$, отсекаемые хордами AB и CD, лежащими на прямых с уравнениями $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ соответственно. Хорды пересекаются в точке $N(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$, которая принадлежит ω, так как $|ON|^2 = (-4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = 16 < 36 = R^2$. Эта точка N является единственной общей точкой двух частей $\Phi(\alpha)$.
Периметр $\Phi(\alpha)$ равен $\Sigma_1+\Sigma_2$, где Σ_1 — сумма длин дуг AC и BD, Σ_2 — сумма длин хорд AB и CD. Угол между AB и CD равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\Sigma_1 = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot R = 6\pi.$$

Расстояния от точки O до AB и CD равны $\rho_1 = |-4\sin\alpha|$ и $\rho_2 = |4\cos\alpha|$ соответственно, поэтому, используя неравенство $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ о среднем квадратическом и среднем арифметическом, получаем

$$\frac{\Sigma_2}{4} = \frac{\sqrt{R^2-\rho_1^2}+\sqrt{R^2-\rho_2^2}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{2R^2-(4\sin\alpha)^2-(4\cos\alpha)^2}{2}} = 2\sqrt{7}.$$

Равенство достигается при

$$\sqrt{R^2-\rho_1^2} = \sqrt{R^2-\rho_1^2}\quad\Leftrightarrow\quad\rho_1=\rho_2\quad\Leftrightarrow\quad|\sin\alpha| = |\cos\alpha|\quad\Leftrightarrow\quad|\operatorname{tg}\alpha| = 1\quad\Leftrightarrow\quad\alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда $\Sigma_2 = 8\sqrt{7}$, а $M = \max(\Sigma_1+\Sigma_2) = 6\pi + 8\sqrt{7}$.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — нижнее, а $B_1B_2\dots B_n$ — верхнее основание данной усечённой пирамиды, причём сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего; O и O_1 — центры этих оснований (соответственно); M и M_1 — середины рёбер A_1A_2 и B_1B_2 (соответственно). Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что

$$MM_1 = MO + M_1O_1$$

и

$$A_1B_1 = A_1M + B_1M_1;\quad MO = A_1M\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\quad M_1O_1 = B_1M_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

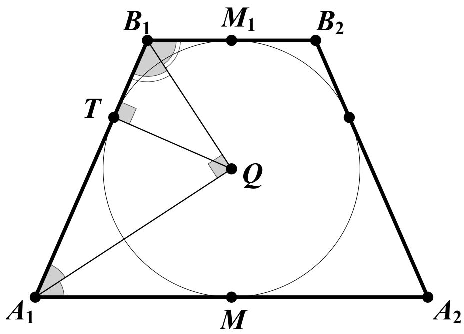
следовательно,

$$MM_1 = (A_1M + B_1M)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = A_1B_1\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Но $MM_1 < A_1B_1$, то есть

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; n < 4.$$

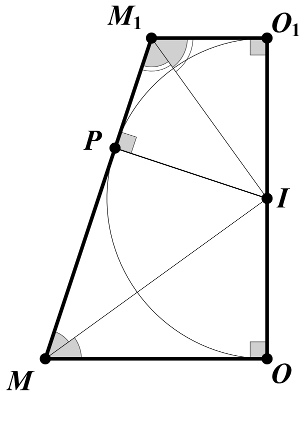
Поэтому данная в условии усечённая пирамида треугольная. Обозначим длину ребра нижнего основания через a, верхнего — через b. Так как шар Ω касается всех рёбер пирамиды, её боковая грань $A_1A_2B_2B_1$ — описанная равнобокая трапеция с основаниями a и b.



Радиус вписанной окружности найдем из прямоугольного треугольника A_1QB_1:

$$QT^2 = A_1T\cdot B_1T = A_1M\cdot B_1M_1 = \frac{ab}{4},$$

$QT = \dfrac{1}{2}\sqrt{ab}$, следовательно, $MM_1 = \sqrt{ab}$. Но $MM_1 = MO + M_1O_1 = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} + \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$, поэтому $\dfrac{a+b}{2\sqrt{3}} = \sqrt{ab}$.



Аналогично из прямоугольной трапеции MOO_1M_1

$$IP^2 = MP\cdot M_1P = MO\cdot M_1O_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{ab}{12},$$

$OO_1 = 2IP = \sqrt{\dfrac{ab}{3}}$. Искомый угол есть $\angle OMM_1$:

$$\sin\angle OMM_1 = \frac{OO_1}{MM_1} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{3}}}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = 2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -8$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

   Ответ: ± 4.

   Решение. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. По теореме Виета сумма корней уравнения $f(x) = 0$ равна $-p$.

   По условию уравнения $x^2 - px - q = 0$ и $x^2 + px + q + 8 = 0$ имеют по одному решению каждое. Значит, дискриминанты обоих уравнений равны нулю, следовательно, $\begin{cases} p^2 + 4q = 0, \\ p^2 - 4(q+8) = 0. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $-q = q + 8$ и $q = -4$, Тогда $p = \pm 4$.

   При этом $f(x) = x^2 \pm 4x - 4$. Оба трёхчлена имеют вещественные корни и удовлетворяют условию задачи.

2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 2^{401} \cdot 3^{500}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y, где y делится на x?

   Ответ: 50451.

   Решение. Пусть $x = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1}$, $y = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2}$. Тогда $a_1 + a_2 = 401$, $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 + b_2 = 500$, $b_1 \leqslant b_2$. Количество решений уравнения $a_1 + a_2 = 401$ в целых неотрицательных числах равно 402, причём ровно половина этих решений удовлетворяет условию $a_1 \leqslant a_2$. Для второго уравнения $b_1 + b_2 = 500$ количество решений в целых неотрицательных числах равно 501, а условию $b_1 \leqslant b_2$ удовлетворяет 251 решение (поскольку $b_1 = b_2 = 250$ также подходит).

   Итак, искомое число способов равно $201 \cdot 251 = 50\,451$.

3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3\log_y 8 + 4\log_{xy} \dfrac{1}{16} = 0, \\ \dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leqslant 31. \end{cases}$$

   Ответ: 29.

   Решение. Основания логарифмов должны быть положительны и отличны от единицы. Так как числа x и y целые, получаем, что $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$. Уравнение системы можно переписать в виде

$$\frac{1}{\log_2 x} + 9\log_y 2 - 16\log_{xy} 2 = 0 \iff \frac{1}{\log_2 x} + \frac{9}{\log_2 y} - \frac{16}{\log_2 x + \log_2 y} = 0.$$

   С учётом указанных выше ограничений знаменатели всех трёх дробей положительны, поэтому умножая обе части уравнения на их произведение, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$(\log_2 x + \log_2 y)\log_2 y + 9(\log_2 x + \log_2 y)\log_2 x - 16\log_2 x \log_2 y = 0 \iff$$
$$\iff 9\log_2^2 x - 6\log_2 x \log_2 y + \log_2^2 y = 0 \iff (3\log_2 x - \log_2 y)^2 = 0 \iff \log_2 y = \log_2 x^3.$$

Значит, $y = x^3$. Подставляя в первое неравенство системы, имеем

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x^3-1}{x^3+1} \iff \frac{x-1}{x+1} > \frac{3}{7} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

Так как $x \geqslant 2$, можно разделить обе части на $\frac{x-1}{x+1}$, а затем умножить их на общий знаменатель. В итоге имеем:

$$7x^2 - 7x + 7 > 3x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 4 > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

С учётом второго неравенства $2 < x \leqslant 31$. Ему удовлетворяет 29 целых значений x, а так как каждому x соответствует единственный y (и притом тоже целый), у данной системы есть 29 целочисленных решений $(x; y)$.

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a-b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

Ответ: $(5; 3)$, $(16; 12)$, $(3; 5)$, $(12; 16)$.

Решение. Исходная система симметрична относительно a и b: если $(a; b)$ — решение, то и $(b; a)$ — решение. Тогда без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$.

Для $a \geqslant b$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} 4b = 3(a-b)^2, \\ 3a = \text{НОК}(a; b). \end{cases} \tag{1}$$

Из первого уравнения системы (6) следует, что $b \,\vdots\, 3$. Пусть $b = 3p$, где $p \in \mathbb{N}$. Но тогда число $\text{НОК}(a, 3p)$ делится на $3p$, а значит из второго уравнения системы следует, что $a = kp$ для некоторого натурального $k \geqslant 3$ (поскольку $a \geqslant b$). В переменных p и k первое уравнение системы (6) примет вид

$$12p = 3(kp-3p)^2 \iff 4 = p(k-3)^2 \implies$$
$$\implies \begin{cases} p = 1, \\ (k-3)^2 = 4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = 4, \\ (k-3)^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} p = 1, \\ k = 5 \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = 4, \\ k = 4. \end{cases}$$

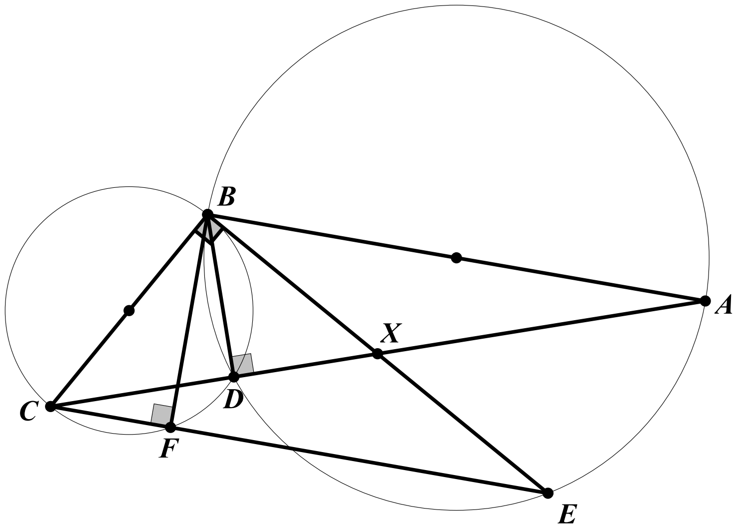
Отсюда получается, что $(a; b) = (5; 3)$ или $(a; b) = (16; 12)$. Тогда для исходной системы пары $(3; 5)$ и $(12; 16)$ также являются решениями.

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D. Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC, а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1. Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos\angle BCE = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{52}}{5}$.

Решение. Заметим, что $BF \perp CE$ и $BE \perp BC$ по условию, $AE \perp BE$, поскольку BA — диаметр окружности ω_1, а $BF \perp BA$, поскольку BF — касательная к ω_1. Значит, $ABCE$ — параллелограмм. Его площадь равна, с одной стороны, $BF \cdot CE$, а с другой — произведению $BD \cdot CA = 2BD \cdot CX$. Приравняв два выражения для площади, получим

$$\frac{BF}{BD} = 2\frac{CX}{CE}.$$



Обозначим $BC = 2a$, а $\angle BCE = \alpha$. Тогда $BE = 2BX = 2a\operatorname{tg}\alpha$. Поскольку $BE = 2BX$, длину отрезка CX можно найти по теореме Пифагора из треугольника CBX: $CX = \sqrt{4a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\alpha}$. Значит,

$$\frac{BF}{BD} = 2\frac{CX}{CE} = 2\frac{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\left(\frac{2}{\cos\alpha}\right)} = \sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1+3\cos^2\alpha} = \sqrt{1+3\cdot\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{52}}{5}.$$

6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}(y-x^2-x-1)(x^2-3xy+4y^2)(y+x-1)=0,\\ y=(2a+1)x-a^2+1\end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

Ответ: $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$.

Решение. Множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, представляет собой объединение параболы $y = x^2+x+1$, прямой $y = -x+1$ и точки $(0,0)$. Назовем это множество M.

Парабола $y = x^2+x+1$ и прямая $y=-x+1$ пересекаются в точках $(-2,3)$ и $(0,1)$.

При каждом значении параметра a прямая $y = (2a+1)x - a^2 + 1$ является касательной к параболе $y = x^2+x+1$. Назовем ее прямой l.

При $a = 1$ прямая l проходит через точку $(0,0)$ и имеет со множеством M 3 общих точки.

При $a = 0$ прямая l проходит через точку $(0,1)$ и имеет со множеством M 1 общую точку.

При $a = -2$ прямая l проходит через точку $(-2,3)$ и имеет со множеством M 1 общую точку.

Заметим, что при $a = -1$ прямая l проходит через точку $(0,0)$ и параллельна прямой $y = -x+1$. Таким образом, прямая l имеет со множеством M 2 общих точки.

В остальных случаях прямая l не параллельна и не совпадает с прямой $y=-x+1$ (имеет ровно одну общую точку), касается параболы $y = x^2+x+1$ и не проходит через точку $(0,0)$. Таким образом, имеет со множеством M 2 общих точки.

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω. Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q, а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC, если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 4$, $AP = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AQ = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $CM = \frac{10\sqrt{5}}{9}$, $CN = 2\sqrt{5}$.

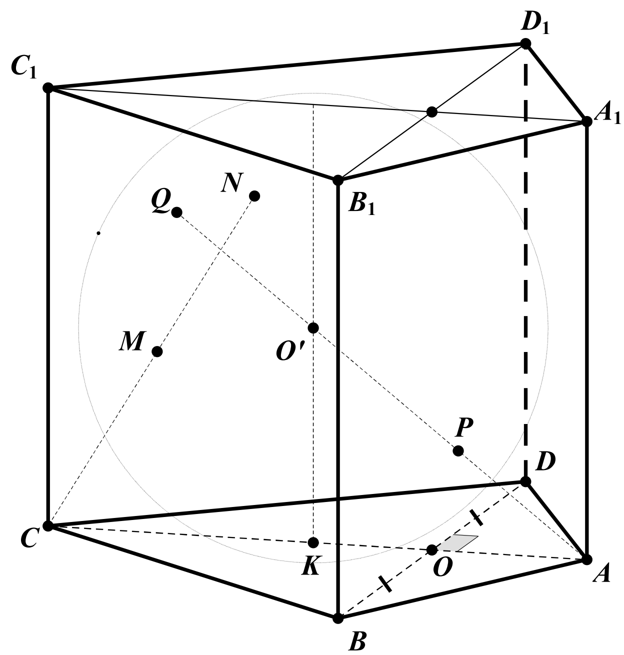
Ответ: $V = \dfrac{40\sqrt{5}}{3}$, расстояние от центра ω до плоскости PAC равно нулю.

Решение. Проекция сферы, вписанной в прямую призму, на плоскость её основания — круг, вписанный в основание, центр которого — точка K касания сферы и плоскости $ABCD$. По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AQ \cdot AP = \frac{5\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow AK = \frac{5}{3}.$$

Аналогично

$$CK^2 = CN \cdot CM = 2\sqrt{5} \cdot \frac{10\sqrt{5}}{9} = \frac{100}{9} \Rightarrow CK = \frac{10}{3}.$$



Заметим, что $AK + CK = \dfrac{15}{3} = 5 = AC$. Значит, K лежит на отрезке AC. Но точка K лежит на биссектрисах углов BAD и BCD, а значит, диагональ AC делит пополам углы BAD и BCD, то есть является осью симметрии четырёхугольника $ABCD$. Итак, четырёхугольник $ABCD$ — дельтоид, и тогда $AC \perp BD$, $DO = 2$. Имеем:

$$AD = AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$BC = DC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

Найдем радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, вычислив его площадь S двумя способами:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10,$$

$$S = p \cdot r = 3\sqrt{5} \cdot r \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Отметим, что r — это также и радиус сферы ω, а высота призмы равна $2r$. Вычислим тогда объём призмы:

$$V = S \cdot 2r = 10 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Заметим теперь, что $AQ - AP = \dfrac{5\sqrt{5}}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 2r$, то есть PQ — диаметр сферы. Значит, центр сферы O' лежит в плоскости PAC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что уравнение $f(x) = -2x^2$ имеет единственное решение, а также уравнение $f(x) = -6$ имеет единственное решение. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

   Ответ: ± 6.

   Решение. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. По теореме Виета сумма корней уравнения $f(x) = 0$ равна $-p$.

   По условию уравнения $3x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + px + q + 6 = 0$ имеют по одному решению каждое. Значит, дискриминанты обоих уравнений равны нулю, следовательно, $\begin{cases} p^2 - 12q = 0, \\ p^2 - 4(q+6) = 0. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $3q = q + 6$ и $q = 3$. Тогда $p = \pm 6$.

   При этом $f(x) = x^2 \pm 6x + 3$. Оба трёхчлена имеют вещественные корни и удовлетворяют условию задачи.

2. [3 балла] Сколькими способами можно представить число $n = 5^{151} \cdot 7^{600}$ в виде произведения двух натуральных чисел x и y, где y делится на x?

   Ответ: 22 876.

   Решение. Пусть $x = 5^{a_1} \cdot 7^{b_1}$, $y = 5^{a_2} \cdot 7^{b_2}$. Тогда $a_1 + a_2 = 151$, $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 + b_2 = 600$, $b_1 \leqslant b_2$. Количество решений уравнения $a_1 + a_2 = 151$ в целых неотрицательных числах равно 152, причём ровно половина этих решений удовлетворяет условию $a_1 \leqslant a_2$. Для второго уравнения $b_1 + b_2 = 600$ количество решений в целых неотрицательных числах равно 601, а условию $b_1 \leqslant b_2$ удовлетворяют 301 решение (поскольку $b_1 = b_2 = 300$ также подходит).

   Итак, искомое число способов равно $76 \cdot 301 = 22\,876$.

3. [5 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 3\log_x 27 + \log_y 3 + 8\log_{xy} \dfrac{1}{9} = 0, \\ \dfrac{3y+3}{y-1} < \dfrac{7x+7}{x-1}, \\ y \leqslant 24. \end{cases}$$

   Ответ: 22.

   Решение. Основания логарифмов должны быть положительны и отличны от единицы. Так как числа x и y целые, получаем, что $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$. Уравнение системы можно переписать в виде

$$9\log_x 3 + \frac{1}{\log_3 y} - 16\log_{xy} 3 = 0 \iff \frac{9}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} - \frac{16}{\log_3 x + \log_3 y} = 0.$$

   С учётом указанных выше ограничений знаменатели всех трёх дробей положительны, поэтому умножая обе части уравнения на их произведение, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$9(\log_3 x + \log_3 y)\log_3 y + (\log_3 x + \log_3 y)\log_3 x - 16\log_3 x \log_3 y = 0 \iff$$
$$\iff \log_3^2 x - 6\log_3 x \log_3 y + 9\log_2^2 y = 0 \iff (\log_3 x - 3\log_3 y)^2 = 0 \iff \log_3 y^3 = \log_3 x.$$

Значит, $x = y^3$. Подставляя в первое неравенство системы, имеем

$$\frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7\left(y^3+1\right)}{y^3-1} \iff \frac{3(y+1)}{y-1} < \frac{7\left(y^2-y+1\right)(y+1)}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}.$$

Так как $y \geqslant 2$, можно разделить обе части на $\frac{y+1}{y-1}$, а затем умножить их на общий знаменатель. В итоге имеем:

$$7y^2 - 7y + 7 > 3y^2 + 3y + 3 \Leftrightarrow 4y^2 - 10y + 4 > 0 \iff y \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

С учётом второго неравенства $2 < y \leqslant 24$. Ему удовлетворяет 22 целых значения x, а так как каждому y соответствует единственный x (и притом тоже целый), у данной системы есть 22 целочисленных решения $(x; y)$.

4. [5 баллов] Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 5(a-b)^2, \\ 5 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

Ответ: $(7; 5)$, $(24; 20)$, $(5; 7)$, $(20; 24)$.

Решение. Исходная система симметрична относительно a и b: если $(a; b)$ — решение, то и $(b; a)$ — решение. Тогда без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$.

Для $a \geqslant b$ данная система принимает вид

$$\begin{cases} 4b = 5(a-b)^2, \\ 5a = \text{НОК}(a; b). \end{cases} \tag{2}$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что $b \,\vdots\, 5$. Пусть $b = 5p$, где $p \in \mathbb{N}$. Но тогда число $\text{НОК}(a, 5p)$ делится на $5p$, а значит из второго уравнения системы следует, что $a = kp$ для некоторого натурального $k \geqslant 5$ (поскольку $a \geqslant b$). В переменных p и k первое уравнение системы (2) примет вид

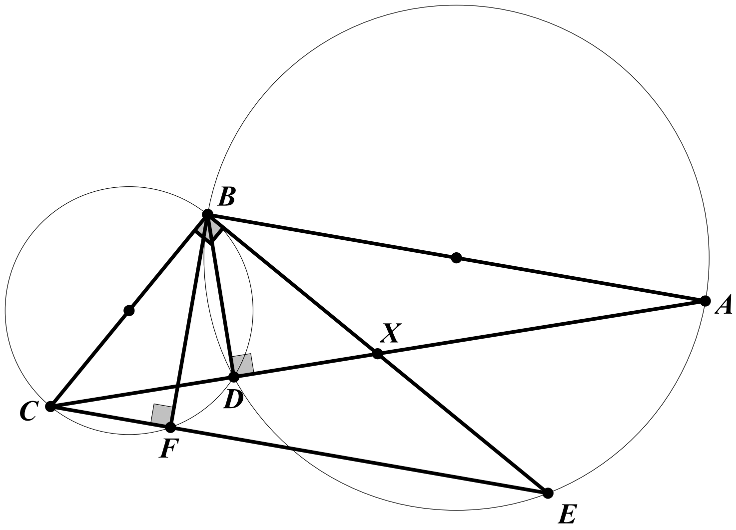
$$20p = 5(kp - 5p)^2 \iff 4 = p(k-5)^2 \implies$$
$$\implies \begin{cases} p = 1, \\ (k-5)^2 = 4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = 4, \\ (k-5)^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} p = 1, \\ k = 7 \end{cases} \text{или} \begin{cases} p = 4, \\ k = 6. \end{cases}$$

Отсюда получается, что $(a; b) = (7; 5)$ или $(a; b) = (24; 20)$. Тогда для исходной системы пары $(5; 7)$ и $(20; 24)$ также являются решениями.

5. [5 баллов] На сторонах BA и BC треугольника ABC с тупым углом B как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно, пересекающиеся в точках B и D. Хорда BE окружности ω_1 перпендикулярна BC, а хорда BF окружности ω_2 перпендикулярна CE и касается ω_1. Найдите отношение $BF : BD$, если $\cos\angle BCE = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{43}}{4}$.

Решение. Заметим, что $BF \perp CE$ и $BE \perp BC$ по условию, $AE \perp BE$, поскольку BA — диаметр окружности ω_1, а $BF \perp BA$, поскольку BF — касательная к ω_1. Значит, $ABCE$ — параллелограмм. Его площадь равна, с одной стороны, $BF \cdot CE$, а с другой — произведению $BD \cdot CA = 2BD \cdot CX$. Приравняв два выражения для площади, получим



$$\frac{BF}{BD} = 2\frac{CX}{CE}.$$

Обозначим $BC = 2a$, а $\angle BCE = \alpha$. Тогда $BE = 2BX = 2a\operatorname{tg}\alpha$. Поскольку $BE = 2BX$, длину отрезка CX можно найти по теореме Пифагора из треугольника CBX: $CX = \sqrt{4a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\alpha}$. Значит,

$$\frac{BF}{BD} = 2\frac{CX}{CE} = 2\frac{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\left(\frac{2}{\cos\alpha}\right)} = \sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1+3\cos^2\alpha} = \sqrt{1+3\cdot\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{43}}{4}.$$

6. [5 баллов] При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}(y+x^2-4x+1)(x^2-2xy+3y^2)(y-2x+1)=0,\\ y=(-2a+4)x+a^2-1\end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

Ответ: $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,2\}$.

Решение. Множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, представляет собой объединение параболы $y=-x^2+4x-1$, прямой $y=2x-1$ и точки $(0,0)$. Назовем это множество M.

Парабола $y=x^2-4x+1$ и прямая $y=2x-1$ пересекаются в точках $(2,3)$ и $(0,-1)$.

При каждом значении параметра a прямая $y=(-2a+4)x+a^2-1$ является касательной к параболе $y=-x^2+4x-1$. Назовем ее прямой l.

При $a=-1$ прямая l проходит через точку $(0,0)$ и имеет со множеством M 3 общих точки.

При $a=0$ прямая l проходит через точку $(0,-1)$ и имеет со множеством M 1 общую точку.

При $a=2$ прямая l проходит через точку $(2,3)$ и имеет со множеством M 1 общую точку.

Заметим, что при $a=1$ прямая l проходит через точку $(0,0)$ и параллельна прямой $y=2x-1$. Таким образом, прямая l имеет со множеством M 2 общих точки.

В остальных случаях прямая l не параллельна и не совпадает с прямой $y=2x-1$ (имеет ровно одну общую точку), касается параболы $y=-x^2+4x-1$ и не проходит через точку $(0,0)$. Таким образом, имеет со множеством M 2 общих точки.

7. [6 баллов] В прямую четырёхугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана сфера ω. Луч с началом в точке A пересекает ω точках P и Q, а луч с началом в точке C пересекает ω в точках M и N. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Найдите объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и расстояние ρ от центра ω до плоскости PAC, если известно, что $AO = 1$, $BO = 2$, $CO = 11$, $AP = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AQ = 2\sqrt{5}$, $CM = 4\sqrt{5}$, $CN = 5\sqrt{5}$.

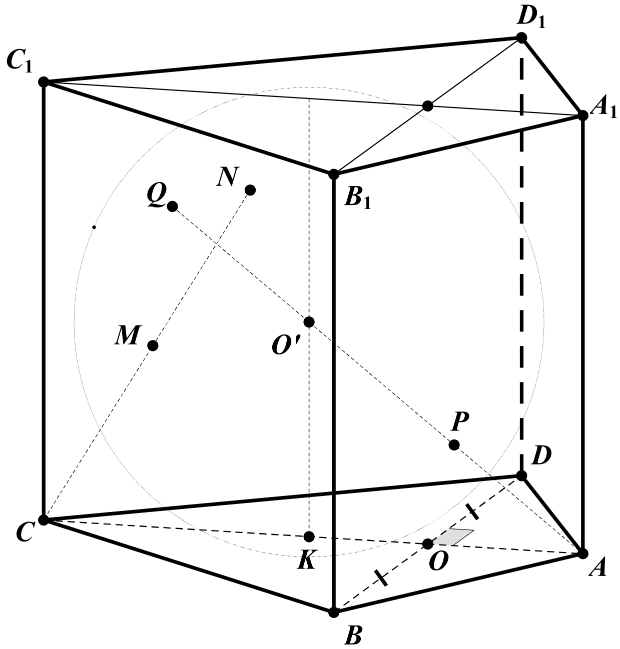
Ответ: $V = \dfrac{192}{\sqrt{5}}$, расстояние от центра ω до плоскости PAC равно нулю.

Решение. Проекция сферы, вписанной в прямую призму, на плоскость её основания — круг, вписанный в основание, центр которого — точка K касания сферы и плоскости $ABCD$. По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AQ \cdot AP = 4 \ \Rightarrow\ AK = 2.$$

Аналогично

$$CK^2 = CN \cdot CM = 100 \ \Rightarrow\ CK = 10.$$



Заметим, что $AK + CK = 12 = AC$. Значит, K лежит на отрезке AC. Но точка K лежит на биссектрисах углов BAD и BCD, а значит, диагональ AC делит пополам углы BAD и BCD, то есть является осью симметрии четырёхугольника $ABCD$. Итак, четырёхугольник $ABCD$ — дельтоид, и тогда $AC \perp BD$, $DO = 2$. Имеем:

$$AD = AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$BC = DC = \sqrt{2^2 + 11^2} = 5\sqrt{5}.$$

Найдем радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, вычислив его площадь S двумя способами:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24,$$

$$S = p \cdot r = 6\sqrt{5} \cdot r \ \Rightarrow\ r = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Отметим, что r — это также и радиус сферы ω, а высота призмы равна $2r$. Вычислим тогда объём призмы:

$$V = S \cdot 2r = 24 \cdot \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Заметим теперь, что $AQ - AP = \dfrac{10}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 2r$, то есть PQ — диаметр сферы. Значит, центр сферы O' лежит в плоскости PAC.