



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 $a, b, c \in \mathbb{N}$, будем обозначать $\|k\|_2$ наибольшим
степень входящим простым p в $\mathbb{N} \ni k$, такое что
 $k: p^2$, но $k \not: p^{2+1}$, тогда, т.к. $ac: 7^{42} \Rightarrow \|abc\|_7 \geq 42$,
это очевидно, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, заметим, что, т.к. $ab: 3^{14} 7^{13}$,
 $bc: 3^{14} 7^{14}$, $ac: 3^{23} 7^{42}$, то $abc: 3^{56} 7^{56} \Rightarrow$
 $a^2 b^2 c^2: 3^{56} \Rightarrow abc: 3^{28}$, в противном случае
 $a^2 b^2 c^2 \not: 3^{56} \Rightarrow \text{т.к. } \gcd(3, 7) = 1, \|abc\|_3 \geq 28, \|abc\|_7 \geq 42$,
то $abc \geq 3^{28} 7^{42}$, это выполнено, если
 $a = 3^4 7^{15}$, $c = 3^{14} 7^{27}$, $b = 3^5 7^0$ также
 $ac = 3^{23} 7^{42}$, $ab = 3^{14} 7^{13}$, $bc = 3^{19} 7^{14}$
 $7^{12} \Rightarrow \min abc = 3^{28} 7^{42} 419$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Так $\frac{a}{b}$ несократимо, то $\text{НОЗ}(a, b) = 1$; Заметим, что $\text{НОЗ}(a, b) = (a, b)$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}; \text{ так } (a, b) = 1, \text{ то } (a+b, ab) = 1,$$

Так в противном, пусть $(a+b, ab) = k > 1$, тогда или a или b $k \geq 2$ k делится на какое-то простое,

$\Rightarrow$, пусть $k = p$, тогда или a или $b \div p$, но так

$$(a+b, ab) = p, \Rightarrow a+b \div p, \Rightarrow \text{так то } a \div p, b \div p$$

$$\Rightarrow \text{НОЗ}(a, b) \geq p, \text{ но } \text{НОЗ}(a, b) = 1, \text{ противоречие, } \Rightarrow$$

$$\text{действительно } \text{НОЗ}(a+b, ab) = 1, \Rightarrow \text{НОЗ}(a+b, 11ab) \leq 11,$$

$$\Rightarrow m \leq 11, \Rightarrow \text{так, заметим, что } \frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+b}, \text{ то есть, нам}$$

$$\text{действительно необходимо найти только } (a+b, 11ab) \leq 11, \text{ как}$$

$$\text{мы доказали, если } a=5, b=6, \text{ то } \frac{11}{(11^2) - 11(30)} =$$

$$\frac{11}{11} \cdot \frac{1}{11-30} = \frac{1}{-19}, \Rightarrow m=11 \text{ действительно max,}$$

Отв: 11



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \quad \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} \quad \vee \quad \sqrt{3x^2 + x + 1} \\ 3x^2 - 5x + 6 \quad \vee \quad 3x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$-6x + 5 \quad \vee \quad 0$$

если

$$-6x + 5 \geq 0, \text{ то } 5 - 6x \leq 0, \Rightarrow \text{если } -6x + 5 > 0, \text{ то}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} > 0, \text{ но } 5 - 6x \leq 0,$$

$$\text{аналогично } -6x + 5 < 0, \Rightarrow -6x + 5 = 0, \text{ тогда}$$

$$6x = 5; \quad x = \frac{5}{6} \quad \text{Грани: } \frac{5}{6}$$

Замечание: мы можем сравнить $\sqrt{3x^2 - 5x + 6}$ и $\sqrt{3x^2 + x + 1}$,
т.к. под корнями трехчлены квадратичные, которые < 0 .

$$(\pi \Rightarrow \text{они все } > 0, \text{ и } 5 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0, 1 - 3 \cdot 4 < 0),$$

$$\text{случай с } -6x + 5 < 0: \text{ тогда } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} < 0,$$

но $5 - 6x > 0$, а что-то больше нуля не может

$$\text{быть } = \text{ чему-то меньшему, т.к. } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6. \left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{w} - 1 = \frac{AB}{M} \\ \frac{AB}{w} \cdot M = \frac{AB}{M} \cdot w + 49 \end{array} \right.$$

$$\frac{AB}{w} \cdot M = \frac{AB}{M} \cdot w + 49$$

$$\frac{AB}{w+7} + 0,6 = \frac{AB}{M+7}$$

$$AB \left(\frac{1}{M+7} - \frac{1}{w+7} \right) = 0,6$$

$$AB = \frac{0,6}{\frac{1}{M+7} - \frac{1}{w+7}} = \frac{0,6(M+7)(w+7)}{w+M+7}$$

$$10AB = \frac{6(Mw+7w+7M+49)}{w+M+7}$$

$$\frac{6(Mw+7w+7M+49)}{w+M+7} + 10M = \frac{6(Mw+7M+7w+49)w+49}{w+7+M+7}$$

Согласно условию, данные просто подставляем,
сложив к квадратному, на самом деле >0

AB = 5 AB-расстояние от 1 до 10

$$AB + M = \frac{AB}{M} \cdot w + 49$$

$$10AB + 10M = \frac{10AB}{M} \cdot w + 49$$

M-скорость мотоцикла
w-скорость велосипедиста

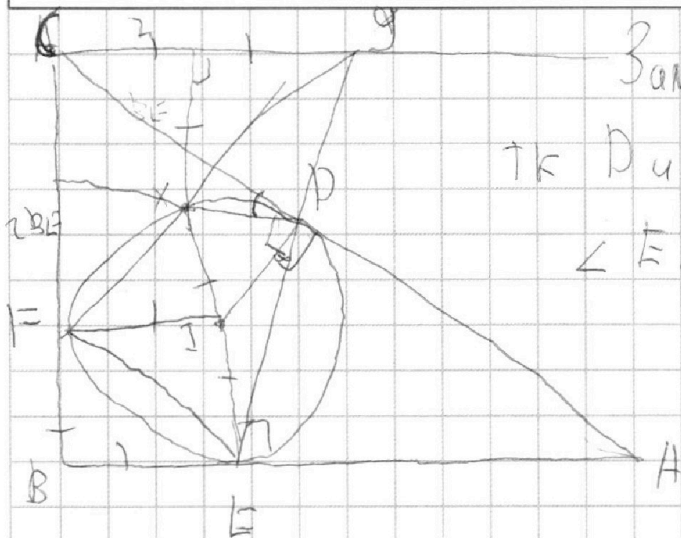
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $\angle CXD = \angle XEA =$

т.к. D и E — касания впис. окружности, то

$$\angle EDA = \angle XEA = \angle CDX \text{ (верт.)} \Rightarrow$$

$$\triangle CXD \sim \triangle DAE, (CD=CX, DA=AE)$$

т.к. $CF=CD$, то $CF=CX$,

$\triangle CFX$ — равнобедренный, $\angle CFX = 45^\circ \Rightarrow$

$\angle FEX = 45^\circ$ (CF — кас. $\angle CFX$ — угол между хордой

и касательной, он равен вписанному, опирающемуся на ту же дугу)

т.к. $FB=BE$, $\angle B=90^\circ$, $\angle FEB=45^\circ \Rightarrow \angle XEB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow X$ — диаметрально противоположна E , т.к. E — кас.

на AB , кас. J — центр, то $\angle JEB = 90^\circ = \angle XEB \Rightarrow$

$XI=JE$, $X \in JE$, т.к. $(F=DE)$, $JFFB$ — квадрат, следовательно

$$\text{прямой } \triangle BE = \frac{1}{2}XE = \frac{1}{2}\sqrt{2}XY = \frac{XY}{\sqrt{2}} \text{ проведи}$$

$XE \perp AC$, $\angle CXE = 45^\circ$ — прямой, равнобедренный, $\angle CXE = 45^\circ$

$$BA \parallel CX, XE \perp BA \Rightarrow \text{т.к. } BE = CL = \frac{XY}{\sqrt{2}} \quad \angle X = \frac{XY}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow L$ — середина XY , $XL \parallel CF$, EX — продолжение CF , $XY = 2BE = CD$

$$XL=BE, \text{ по теореме Пифагора } XD^2 = 8BE^2 - 2 \cos \angle DCX \cdot 4BE^2 \text{ в } \triangle DCX$$

в $\triangle DAE$, то $\angle EDX = 180^\circ - \angle DAE$



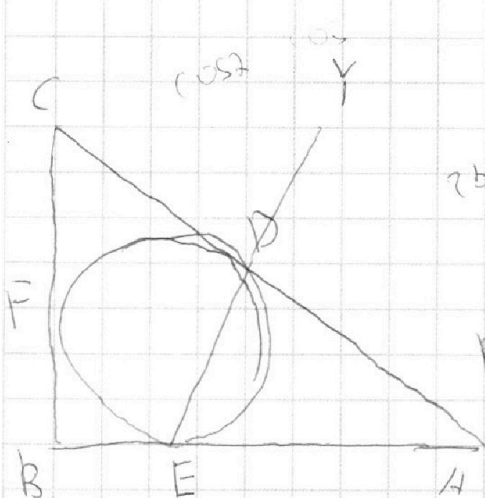
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$XY = \sqrt{2} LY$$

$$\frac{XE}{2} = BE = \frac{XY}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{AB+6}{W+7+10} = \frac{AB}{W+7}$$

$$FE = XY$$

$$CB = 5BE$$

$$3BE^2$$

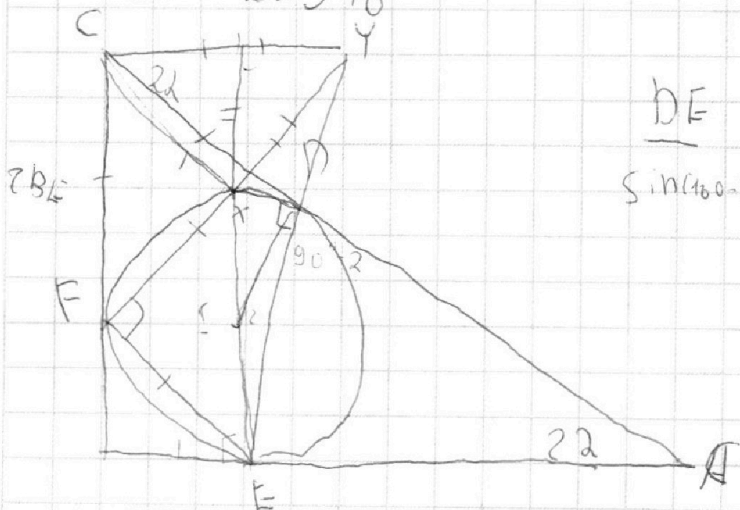
$$\frac{W+7}{AB} = \frac{W+7}{AB} + \frac{10\sqrt{\sin 22}}{6} \cdot \frac{2}{3}$$

$$DA = p - 5BE$$

$$\frac{p-1}{5BE} \cdot \frac{XE}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{XE}{\sqrt{2}}$$

$$CE^2 = 9BE^2 + BE^2$$

$$CE = BE\sqrt{10}$$



$$\frac{DE}{\sin(160-22)}$$

$$YD^2 = 2(4BE^2) - 2\cos 22 \cdot BE^2$$

$$DE = 2BE^2 - 2\cos$$

$$\frac{DE}{\sin(160-22)} = 2\cos FEB$$

$$DY =$$

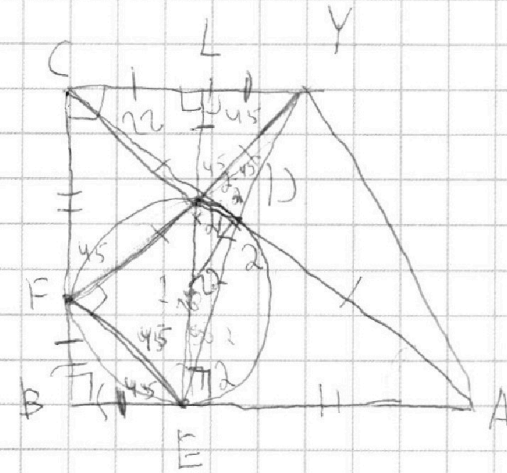
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{DC} = \frac{DE}{YD}$$

$$YF = \sqrt{2} CY = \sqrt{2} CF$$

$$\angle XYD = 2 - 45^\circ \quad 90^\circ - 2$$

$$\angle XYD \quad (2)$$

$$XE = 2 BE$$

$$\sqrt{2} BE = XY = \sqrt{2} LY$$

$$XY = \sqrt{2} LY$$

$$XY = \sqrt{2} LY$$

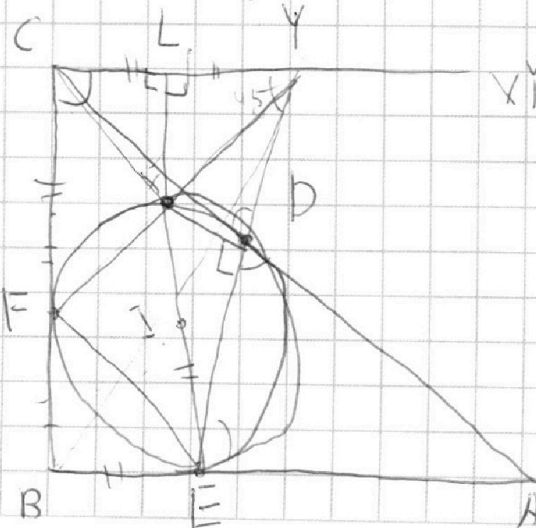
$$EX = 2 LY$$

$$XE$$

$$XE = 2 BE = \sqrt{2} XY$$

$$\sqrt{2} BE = \sqrt{2} XY$$

$$BE = LY$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{z}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2}$$

$$5x = 3z + y$$

$$25x^2 = 9z^2 + 6zy + y^2$$

$$8yz + xz + 15xy = 15xy$$

$$8 = x \left(\frac{15}{z} - \frac{1}{y} \right)$$

$$25x^2 = y^2 + z^2 = (3z + y)^2$$

$$y^2 + 3z^2$$

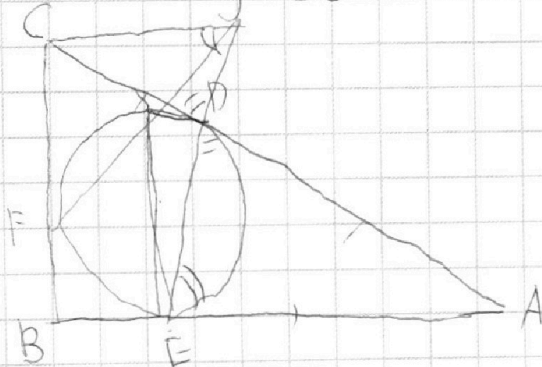
$$y =$$

$$8yz = 15xy - zx$$

$$6yz = \frac{6}{8} (15xy - zx)$$

$$8z^2 + \frac{6}{8} (15xy - zx)$$

$$y^2 + 3z^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $|\vec{AB}| = \frac{1}{K} S_{km}$; W - скорость вело-ста; M - мото-лестя (км/ч)

$$\begin{cases} \frac{S}{W} - 0.1 = \frac{S}{M} & \frac{S}{M} = 8 \\ \frac{S \cdot M}{W} = \frac{S \cdot W + 49 km}{M} & \frac{S}{W} \cdot M = S - W + 49 km \\ \frac{S}{W+7} = \frac{S}{M+2} - 0.6 & \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 + (2\sqrt{3x^2 - 5x + 6})(\sqrt{3x^2 + x + 1}) =$$

$$= 25 - 60x + 36x^2 + 32x^2$$

$$2(\sqrt{3x^2 - 5x + 6})(\sqrt{3x^2 + x + 1}) = 18 - 56x + 32x^2$$

$$(\sqrt{3x^2 - 5x + 6})(\sqrt{3x^2 + x + 1})' = 9 - 28x + 16x^2 =$$

$$= 16x^2 - 28x + 9 - 28x + 16x^2 - 28x + 9$$

$$28^2 - 64 - 9 = 28 \cdot 4 \cdot (28 + 24) = 4 \cdot 52 =$$

$$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1) = (16x^2 - 28x + 9)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

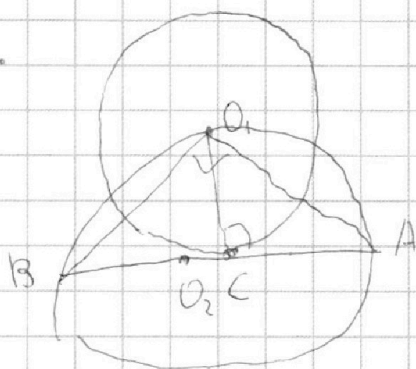
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.



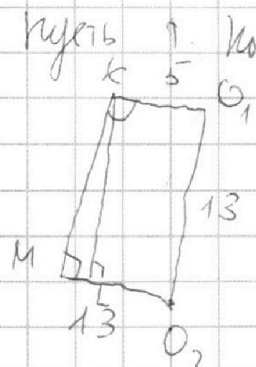
Пусть O_1 - центр W , O_2 - центр L

тк BA - диаметр L , а $O_1 \in L$,

$\angle BO_1A = 90^\circ$, тк BA - касательная,
с-т. касан
а O_1 - центр, то $\angle O_1CB = 90^\circ$,

$\Rightarrow O_1C$ - высота в $\triangle O_1BA$, из свойств прямоугольного
 $\triangle$, а (из подобия) $O_1C = \sqrt{BC \cdot CA} = 5$, $\Rightarrow$ радиус
 $W = 5$. Тк O_2 - центр L , середины AB , то радиус L
 $= \frac{26}{2} = 13$, $\therefore O_2O_1 = 13$, тк $O_1 \in L$, пусть ML

провели общую касательную, провели радиус из O_1 в
касая этой кас-ной с W , аналогично для O_2 и L ,
пусть K - касая этой ка-тной с W , с L - M , тогда
 KO_1 - радиус $W = 5$, $MO_2 = 13$, аналогично для L



$O_1O_2 = 13$, проведем высоту из O_1 на MO_2 ,

пусть она L , тогда KLO_1O_2 - прямо угольн

KO_1ML - прямоугольн, $ML = 5$, $O_1L = KM =$
 $\sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$, тк $\triangle O_1LO_2$ - прямоугольн, по Т. Пифагора
 $13^2 = MO_2^2 + O_1L^2 = (13-5)^2 + O_1L^2$, $KM = \sqrt{105} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 5}$,

$\Rightarrow$, тк KM - общая касательная, то это и есть ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}, bc : 3^{19} \cdot 7^{17}, ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$
 Будем обозначать $\|k\|_p$ - наибольшую степень
 $k \in \mathbb{N}$
 входящую простого p в k , так что $k : p^2$, но $k \not: p^{2+1}$
 тогда, т.к. $ac : 7^{42}$, то $\|abc\|_7 \geq 42$, т.к. $ac : 3^{23}$, то
 $\|abc\|_3 \geq 23$, т.к. $ac : 3^{23}$, то $\|abc\|_3 \geq 23$,
 $\|bc\|_3 \geq 19$, $\|ac\|_3 \geq 23$, $\|a\|_3 = n$, $\|c\|_3 \geq 23 - n$
 $a^{21} b^2 c^2 : 3^{19+14+23} \cdot 7^{42}$
 $\cos(a, b) = 1$
 $19+14+23 = 56$
 $X \quad 3^{23} \quad abc : 3^{23}$
 $a : 3^9$
 $c : 3^{14}$
 $b : 3^{10}$
 $(a, b) = 1$
 $(a+b, ab) = 1$
 $26 \quad 16$
 $27 \quad 15$
 $a = 3^9 \cdot 7^{15}$
 $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$
 $b = 3^5 \cdot 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$DE^2 = 2BE^2 - 2\cos(180^\circ - \angle DCY) \cdot BE^2, \text{ по 1 косинус в } \triangle IDE.$$

$$\triangle IDE. \quad YD = \frac{CD}{DE}, \text{ тк } \triangle (DY \sim \triangle DAE)$$

$$YE = \sqrt{3BE^2 + BE^2} = BE\sqrt{10}$$

$$YD = BE \sqrt{8 - 8\cos\angle DCY}$$

$$DE = BE \sqrt{2 - 2\cos(180^\circ - \angle DCY)}$$

$$\sqrt{8 - 8\cos\angle DCY} + \sqrt{2 - 2\cos(180^\circ - \angle DCY)} = \sqrt{10} = \frac{YD + DE}{BE} = \frac{YE}{BE}$$

$$\text{по 1 косинус } \frac{DY}{\sin\angle DCY} = \frac{2BE}{\sin\angle DCY} = \frac{YD}{\sin\angle DCY}$$

$$\angle CYE = \angle CAE, \Rightarrow \exists (CYAE),$$

$$\text{power}_{(CYAE)} = -YD \cdot DE = CD \cdot DA$$

$$\Rightarrow CD \cdot DA = YD \cdot DY$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$(a+b, ab)$$

мотоциклста - x м

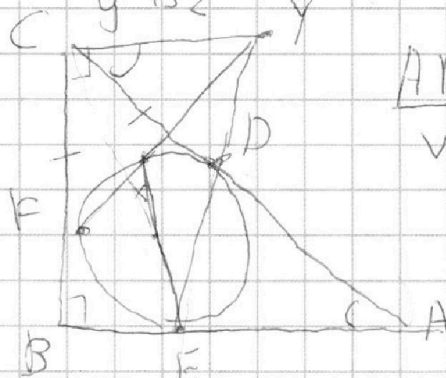
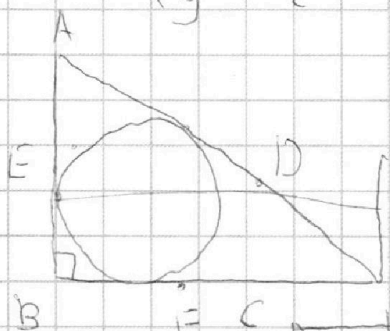
вело - y м

$$5x = 3z + y$$

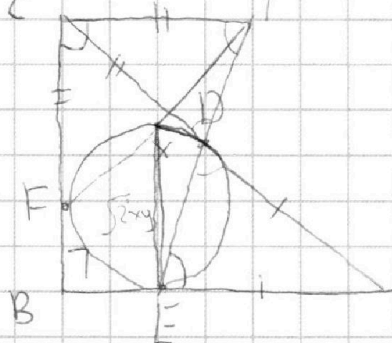
$$(3z + y)^2 - y^2 - z^2 = \frac{3z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = 2 \left(\frac{yz^2 + 3y}{y^2 + 3z^2} \right)$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{AB}{w} - 1 = \frac{AB}{m}$$



$$yx \cdot y = yd \cdot ye$$



$$\frac{AB}{x} \cdot \frac{AB}{y} = \frac{AB}{y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{w} - 1 = \frac{AB}{m} \\ \frac{AB}{w} \cdot m = \frac{AB}{m} \cdot w + 4g \end{array} \right.$$

$$\frac{AB}{w} \cdot m = \frac{AB}{m} \cdot w + 4g$$

$$AB + m = \frac{AB}{m} \cdot w + 4g$$

$$\frac{AB}{w+7} \cdot 0.6 = \frac{AB}{m+7}$$

$$AB \left(\frac{1}{w+7} - \frac{1}{m+7} \right) = 0$$