



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

1) Пусть степени вхождения 3 и 7 в числа a, b и c —

a_3, b_3, c_3 и a_7, b_7 и c_7 , соответственно. $\Rightarrow$

из условия:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 & (1) \\ a_7 + b_7 \geq 13 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 19 & (3) \\ b_7 + c_7 \geq 17 & (4) \\ a_3 + c_3 \geq 23 & (5) \\ a_7 + c_7 \geq 42 & (6) \end{cases}$$

Тогда $(abc)_{\min} \geq 3^{(a_3+b_3+c_3)} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)}$.

2.) $((1) + (3) + (5)) : 2$

$$2 \cdot (a_3 + b_3 + c_3) \geq 56$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

пример:

$$a_3 = 9$$

$$b_3 = 5$$

$$c_3 = 14$$

3.) $((2) + (4) + (6)) : 2$

$$2 \cdot (a_7 + b_7 + c_7) \geq 72$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36$$

пример:

$$a_7 = 21$$

$$b_7 = 0$$

$$c_7 = 15$$

но $a_7 + c_7 \geq 42$, а $a_3, b_3, c_3, a_7, b_7, c_7 \geq 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 42$. пример: $a_7 = c_7 = 21, b_7 = 0$

4.) $(abc)_{\min} = 3^{(a_3+b_3+c_3)_{\min}} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)_{\min}} =$

$$= 3^{28} \cdot 7^{42} \quad (\text{достигается при } a = 3^9 \cdot 7^{21}$$

$$b = 3^5 \cdot 7^0$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{21})$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.)

$$\frac{84}{28} = 3 - 4$$

$$\begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} = -1 \\ \frac{L}{v_{m+7}} - \frac{L}{v_{8+7}} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{21 \cdot 345}{27}$$

$$3,5 \cdot 21 + 49$$

$$27 \cdot 4,5$$

$$\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{84}{55} - \frac{84}{38} = \frac{1}{v_{8+7}}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 3,5 \\ \hline 105 \\ + 63 \\ \hline 73,5 \end{array}$$

$$\frac{2,4 - 3 = -0,6}{v_m v_8} = \frac{(v_{m+7})(v_{8+7})}{v_m v_8} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{v_8 - v_m}{(v_{m+7})(v_{8+7})}$$

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 2,4 \\ \hline 128 \\ + 64 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735 \\ + 49 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$3 \cdot 21 + 49$$

$$4028$$

$$5 v_m v_8 = 3 v_m v_8 + 21 v_m + 21 v_8 + 147$$

$$2 v_m v_8 = 21 v_m + 21 v_8 + 147$$

$$27 \cdot 21$$

$$\frac{84}{242} =$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 3 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 4,5 \\ \hline 65 \\ + 130 \\ \hline 58,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 21 \\ \hline 70 \\ + 73,5 \\ \hline 122,5 \end{array}$$

$$v_m = 49 - v_8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a}{b} - \text{несократимое} \Rightarrow (a, b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} \text{ сократили на } m \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2-9ab+b^2 : m \end{matrix}$$

1) Пусть $a \equiv r_1 \pmod{m}$; $b \equiv r_2 \pmod{m}$ $\left(\begin{matrix} r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \text{ иначе} \\ (a, b) \neq 1, \text{ т.к.} \\ a+b : m \\ \text{или, доо, } r_1=0, \text{ тогда} \\ r_2 \neq 0 \Rightarrow (a, b) \neq 0 \end{matrix} \right)$

a) $a+b : m \Rightarrow r_1 + r_2 \equiv 0 \pmod{m}$

b) $a^2-9ab+b^2 : m \Rightarrow r_1^2-9r_1r_2+r_2^2 \equiv 0 \pmod{m}$

$$(r_1+r_2)^2 - 11r_1r_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$-11r_1r_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$((r_1+r_2)^2 : m \text{ и } n.a.)$$

б.) $r_1+r_2 \equiv 0 \pmod{m} \quad | \cdot r_1 \quad (r_1 \neq 0)$

$$r_1^2 + r_1r_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$r_1r_2 \equiv -r_1^2 \pmod{m} \Rightarrow 11r_1^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$r_1 \neq 0 \Rightarrow 11 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$11 : m$$



$$11 \geq m$$

2.) при $a=1$; $b=10$ грубо $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{11}$
сократили на 11 $\Rightarrow m_{\max} = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\text{Пусть } \begin{cases} 3x^2 + 5x + 1 = A \\ 5 - 6x = B \end{cases} \quad (A+B = 3x^2 - 5x + 6)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 5 - 6x$$

1)

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad (\text{возведем в квадраты по чл. ур-я})$$

(A и A+B ≥ 0)

$$A+B+A-2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$(2A+B-B^2) = 2\sqrt{(A+B)A}$$

$$4A^2 + 2AB - 2AB^2 - 2AB - 2AB^2 + B^2 - B^3 - B^3 + B^4 = 4A^2 + 4AB \quad (\text{снова возведем в кв-н})$$

$$B^4 - 2B^3 + B^2 - 4AB = 0$$

$$B^2(B^2 - 2B + 1 - 4A) = 0$$

⇓

$$1.) B^2 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$5 - 6x = 0$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$B = 0; A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

⇓

2) ур-е

$$2.) B^2 - 2B + 1 - 4A = 0$$

$$(5 - 6x)^2 - 2(5 - 6x) + 1 = 4(3x^2 + 5x + 1)$$

$$36x^2 + 25 - 60x - 10 + 12x + 1 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(B-1)^2 - 4A = 0$$

$$36x^2 - 48x + 16 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (продолжение)

$$\begin{aligned} X &= \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 12 \cdot 6}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 288}}{24} \\ &= \frac{26 \pm \sqrt{676 - 288}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{388}}{24} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \end{aligned}$$

а.) $x = \frac{13 + \sqrt{97}}{2}$

$$12 > x > 11$$

$$\Downarrow$$
$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0.$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 =$$

$$= x(3x-5) + 6 > 0,$$

$$\text{т.к. } x \text{ и } 3x-5 > 0.$$

$$\Downarrow$$
$$\text{yg. yes.}$$

б.) $x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$

$$\frac{2}{6} > x > \frac{1}{6}$$

$$\Downarrow$$
$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 = x(3x-5) + 6 > 0$$

$$\text{т.к. } x(3x-5) > -\frac{6}{5}$$

(пограничные пределы
по модулю)

$$\frac{2}{6} \left(\frac{3}{6} - 5 \right).$$

$$\Downarrow$$
$$\text{yg. yes.}$$

Ответ: $x = \frac{5}{6}, x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

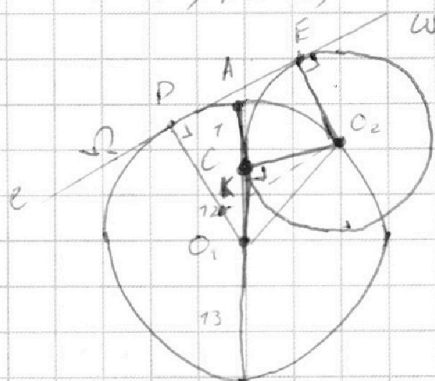
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24

$$AB = AC + BC = 26 \Rightarrow R_1 = 13.$$

$$O_1B=13; AC=1; CO_1=12$$



O_1 и O_2 - центры ок-тн

Ω и ω . R_1 и R_2 - их радиусы.

1.) $W \cap \Omega = C \Rightarrow O_2 C \perp AC$.

Заменим m . Полагаме ΔCO_2O_1 .

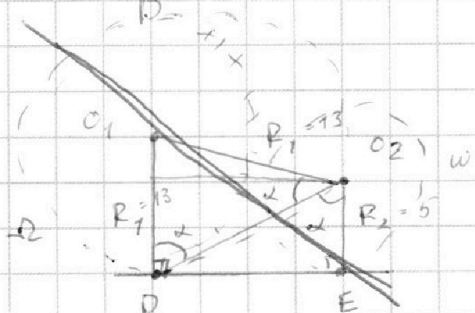
$$R_1^2 = R_2^2 + R_2^2$$

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 - r_2^2} = 5$$

2.) пусть касательная - l

$$C \cap \Omega = \emptyset$$

$$e \cap w = E, \quad C_1 D \perp e, \quad O_2 E \perp e.$$



$$3) \angle C_1DO_2 = \angle O_1O_2D, \text{ т.к. } CO_2 =$$

$$O_1 D = P_1$$

$$O_1 D \parallel O_2 E \Rightarrow \angle D O_2 E = 2$$

4.) a.) ~~$DO_2 = \frac{5}{\cos 2}$~~ , $\sin \angle O_2ED$

5.) $DO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 120^\circ$

3.) Отменим ρ_1 D много малы K , но $DK = 0.2 E = 5$.

$\Rightarrow O_1K = 13 - 5 = 8$. $O_2K \parallel DE$, max. K on DE -
применяем: $\Rightarrow DE \perp O_2K$, $O_2K = \sqrt{13^2 - 8^2} =$

$$= \sqrt{105}$$

Onbem: $\sqrt{105}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow$

а.) $25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$

б.) $x = \frac{3z + y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot x y z$

$\frac{8yz}{15y - z} \Rightarrow x = \frac{3z + y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{5}{3}y$

Прош из уравн-я: $A = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

1.) $z = 3y \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{45}{74}$

2.) $z = -\frac{5}{3}y \Rightarrow A_2 = \frac{55}{42}$

$A_2 < A_1$, A_2 достигается при

$y = 3; z = -5; x = -2,4$

Ответ: $\frac{55}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть $AB = L$, скорости велосипедиста и мотоциклиста —
 v_8 и v_m , соответственно. (v [км/ч], $\frac{m}{c}$)

Запишем уравнение из условия:

$$\begin{aligned} 1.) & \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} + 1 &= \frac{L}{v_8} \\ v_8 \cdot \frac{L}{v_m} + 49 &= v_m \cdot \frac{L}{v_8} \end{aligned} \right. \\ 2.) & \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m + 7} + \frac{36}{v_8} &= \frac{L}{v_8 + 7} \\ \frac{L}{v_m + 7} + 0,8 &= \frac{L}{v_8 + 7} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$1.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} &= -1 \quad (1) \\ \frac{v_8 L}{v_m} - \frac{v_m L}{v_8} &= -49 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

(1) : (2)

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8}}{\frac{v_8}{v_m} - \frac{v_m}{v_8}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{v_8 - v_m}{v_m v_8}}{\frac{v_8^2 - v_m^2}{v_m v_8}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{v_8 - v_m}{(v_8 - v_m)(v_8 + v_m)} = \frac{1}{49}$$

$$v_8 + v_m = 49$$

$$v_m = 49 - v_8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

$$2.) \begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} = -1 & (1) \\ \frac{L}{v_{m+2}} - \frac{L}{v_{8+2}} = -0,6 & (3) \end{cases} \quad \text{разделим (1) на (3)}$$

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8}}{\frac{1}{v_{m+2}} - \frac{1}{v_{8+2}}} = \frac{-1}{-0,6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{v_8 - v_m}{v_8 v_m}}{\frac{v_8 - v_m}{(v_{8+2})(v_{m+2})}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(v_{8+2})(v_{m+2})}{v_8 v_m} = \frac{5}{3}$$

подставим $v_m = 49 - v_8$ из 1:

$$3(v_{8+2})(56 - v_8) = 5 v_8 (49 - v_8)$$

$$168 v_8 - 3 v_8^2 + 1176 - 21 v_8 = 245 v_8 - 5 v_8^2$$

$$2 v_8^2 - 98 v_8 + 1176 = 0$$

$$v_8^2 - 49 v_8 + 588 = 0$$

по т. Виета:

$$v_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad v_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

но $v_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ не подходит, так как $v_m = 49 - v_8 = 21 < 0$

а при $v_8 = 21$ $v_m = 28 > 0$

$$v_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение 2)

$$v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$(1): \frac{L}{28} - \frac{L}{21} = -1.$$

$$L \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{21} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{21 - 28}{28 \cdot 21} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{-7}{588} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{-7}{588} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{-7}{588} \right) = -1$$

$$L = \frac{588}{7} \text{ км}$$

$$L = 84,5 \text{ км.}$$

Ответ: 84,5 км.

$$L \left(\frac{3 - 4}{84} \right) = -1$$

$$L = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow a) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

b.) $x = \frac{3z + y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \mid \cdot xyz$

$8yz + xz = 15xy.$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = \frac{4y \pm \sqrt{196y^2}}{6} = \frac{4y \pm 14y}{6}$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{10}{6}y = -\frac{5}{3}y. \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5}{3}y \end{cases}$

Рассмотрим графы из условия 1: $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$\frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}.$

1.) $z = 3y$

$A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 5 \cdot 9y^2} = \frac{72 + 18}{1 + 27} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$

2.) $z = -\frac{5}{3}y.$

$A_2 = \frac{8 \cdot \frac{25}{9}y^2 - 10y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{\frac{110}{9}}{\frac{28}{3}} = \frac{110 \cdot 3}{84} = \frac{110}{28} = \frac{55}{14} \Rightarrow A_2 < A_1.$

Достижение при:

$y = 3; z = -5; x = -2, 4.$

Ответ: $\frac{55}{14}$



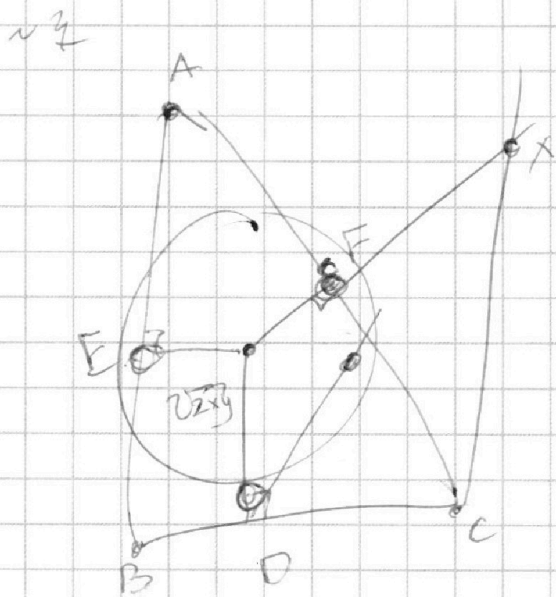
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & 8y \cdot y^2 = 15xy \\
 & 8y \cdot 3 \cdot (-5) + 12 \cdot 4 \cdot 5 = 15xy \\
 & -40y + 120 = 15xy \\
 & 8yz + xz = 15xy \\
 & 8yz + xz = 3(3z+y)y \\
 & 8yz + \frac{(3z+y)z}{5} = 3(3z+y)y \\
 & 40yz + 3z^2 + yz = 45zy + 15y^2 \\
 & 41yz + 3z^2 = 45zy + 15y^2 \\
 & 0 = 4zy + 15y^2 - 3z^2 \\
 & 3z^2 + y^2 = 4zy + 16y^2 \\
 & 8z^2 + 6yz = 4z^2 + 3yz \\
 & 4z^2 + 4yz = 16y^2
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$8yz + xz = 15yx$$

$$z = \frac{15yx}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45yx}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45yx$$

$$40xy + 25x^2 - 8y^2 - yx = 45yx$$

$$25x^2 - 8y^2 = 6yx$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$x = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$40yz = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - zy$$

$$3z^2 = 4yz + 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz = 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$4y = \sqrt{16y^2 + 180y^2}$$

$$z = \frac{4y \pm 14y}{6}$$

$$z = \frac{18y}{6} = 3y$$

$$z^2 = \frac{200}{9} - \frac{10}{9} = \frac{190}{9}$$

$$\frac{12}{5} = -24$$

$$55 = 1 \frac{13}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



112 12 13 14 15 16 17
 Ал-геб. Умно. легко попытка попытка попытка легко ~~не знаю~~
 реш. ТУ ТУ Алг Геом Алг Физ Геом

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 36x^2 + 2560x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{y_{\text{нес}}^2} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$56x - 2\sqrt{y_{\text{нес}}^2} = 30x^2 + 18$$

$$28x - \sqrt{y_{\text{нес}}^2} = 15x^2 + 9$$

$$y_{\text{нес}} = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$

$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6 =$$

$$= 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

всего баллов

$$4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 5 + 6$$

$$100 - 30 + 1889$$

$$252$$

$$122$$

$$1 - 99 + 121 = \left(\frac{1}{2} - 0\right)7 = \frac{7}{2} - 0 = \frac{7}{2}$$

$$1 - 30 + 100$$

$$20 + 12 = 32$$

$$122$$

$$39$$

$$23$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 1

$$a_3 + b_3 \geq 14$$

$$c_3 + b_3 \geq 19$$

$$c_3 + a_3 \geq 23$$

$$\begin{array}{r} 94,5 \\ 13,5 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 14 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$c_7 + b_7 \geq 13$$

$$b_7 + c_7 \geq 14$$

$$a_7 + c_7 \geq 42$$

28

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ 94,5 \\ \hline 98 \end{array}$$

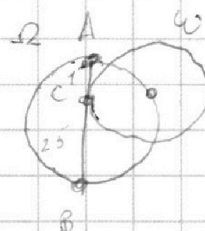
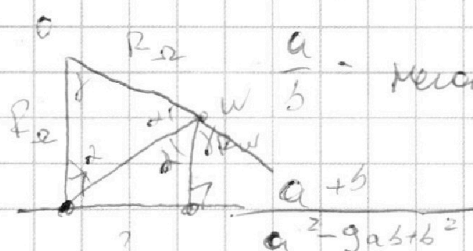
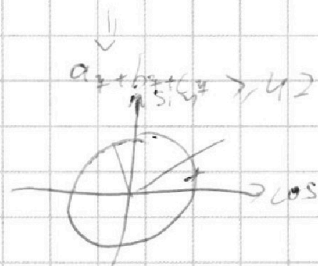
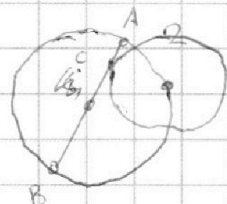
$$\begin{array}{r} 21 \\ 105 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36 < 42$$

a_3
 b_3
 c_3



$$a \equiv r_1$$

$$b \equiv r_2$$

$$\Rightarrow m/b$$

$$m/a$$

$$r_1^2 - 9r_1r_2 + r_2^2 \equiv m$$

$$(r_1 + r_2)^2 - 11r_1r_2 \equiv m$$

$$-11r_1r_2 \equiv m$$

$$11r_2^2 \equiv m$$

$$11r_1^2 \equiv m$$

$$r_1 + r_2 \equiv 0$$

$$r_1r_2 + r_2^2 \equiv 0$$

$$r_1r_2 + r_2^2 \equiv -r_2^2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 22 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper:

Given: $3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

Dividing by $3x^2 - 56x + 18$:

$$\frac{3x^3 - 4x^2 + 7x - 2}{3x^2 - 56x + 18} = x + \frac{28x^2 - 56x + 18}{3x^2 - 56x + 18}$$

Further simplification:

$$= x + \frac{(15x^2 - 28x + 9)(15x^2 - 28x + 9)}{(15x^2 - 28x + 9)(15x^2 - 28x + 9)}$$

Final result:

$$= x + \frac{15x^2 - 28x + 9}{15x^2 - 28x + 9}$$

Verification:

$$(x + 1)(3x^2 + 5x + 6) = 3x^3 + 8x^2 + 11x + 6$$

Another path:

$$225x^4 - 840x^3 + 1054x^2 - 504x + 81 = (5 - 6x)(5 - 6x) = 25 - 60x + 36x^2$$

Final answer:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{24}}{24}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 5

$$1.5x - y = 3z$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

3-5.

$$3-20 = \frac{1}{4} \cdot 8yz + xz = 15xy$$

$$383 = 4 \cdot 9z \cdot z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$5-5x - y =$$

$$\frac{45xy}{8y+x}$$

$$= \frac{13 - \sqrt{92}}{4} (5x - y) (8y + x) = 45xy$$

1/4

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

5/8

$$3x^2 - 5x \quad 5x^2 - 8y^2 = 6xy$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$= \frac{3x(5x+y) - z^2}{25x^2 - 6y^2}$$

$$\sqrt{A + 3x - 2.5} = \frac{1}{1.5}$$

$$3x^2 - 2x + 3.5 = 1$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -64 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -64 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$2A+B-B^2 = 2\sqrt{(A+B)A}$$

$$= 4(A+B)$$

$$(2A+B-B^2)(2A+B-B^2) = 4(A+B)$$

$$(2A+B-B^2)$$