



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

1) Пусть стержни вхожее 3 и 7 в шина a, b и c —

a_3, b_3, c_3 и a_7, b_7 и c_7 , соответственно. \Rightarrow

из условия:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 & (1) \\ a_7 + b_7 \geq 13 & (2) \\ b_3 + c_3 \geq 19 & (3) \\ b_7 + c_7 \geq 17 & (4) \\ a_3 + c_3 \geq 23 & (5) \\ a_7 + c_7 \geq 42 & (6) \end{cases}$$

Тогда $(abc)_{\min} \geq 3^{(a_3+b_3+c_3)} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)}$

2.) $((1) + (3) + (5)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_3 + b_3 + c_3) \geq 56$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

пример:

$$a_3 = 9$$

$$b_3 = 5$$

$$c_3 = 14$$

3.) $((2) + (4) + (6)) \mid : 2$

$$2 \cdot (a_7 + b_7 + c_7) \geq 72$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36$$

пример:

$$a_7 = 21$$

$$b_7 = 0$$

$$c_7 = 15$$

но $a_7 + c_7 \geq 42$, а $a_3, b_3, c_3, a_7, b_7, c_7 \geq 0$. \Rightarrow

$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 42$. пример: $a_7 = c_7 = 21, b_7 = 0$

4.) $(abc)_{\min} = 3^{(a_3+b_3+c_3)_{\min}} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)_{\min}} =$

$$= 3^{28} \cdot 7^{42} \quad (\text{достигается при } a = 3^9 \cdot 7^{21}$$

$$b = 3^5 \cdot 7^0$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{21}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.)

$$\begin{cases} \frac{L}{25m} - \frac{L}{258} = -1 \\ \frac{L}{25m+7} - \frac{L}{258+7} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{84}{28} = 3 - 4$$

$$\frac{21 \cdot 345}{27}$$

$$3,5 \cdot 21 + 49$$

$$27 \cdot 4,5$$

$$\frac{1}{25m} - \frac{1}{258} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{21}{3,5}$$

$$\frac{84}{55} - \frac{84}{38} = \frac{1}{258-2}$$

$$\frac{105}{63} = 3,5$$

$$2,4 - 3 = \frac{258 - 25m}{25m \cdot 258} = \frac{(25m+7)(258+7)}{25m \cdot 258} = \frac{5}{3}$$

$$(25m+7)(258+7)$$

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\frac{32}{27} \cdot \frac{4,5}{13,5} = \frac{108}{121,5}$$

$$\frac{735}{1225}$$

$$3 \cdot 21 + 49$$

$$4028$$

$$5 \cdot 25m \cdot 258 = 3 \cdot 25m \cdot 258 + 21 \cdot 25m + 21 \cdot 258 + 147$$

$$2 \cdot 25m \cdot 258 = 21 \cdot 25m + 21 \cdot 258 + 147$$

$$\frac{63}{112} = 27$$

$$\frac{84}{242} =$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 4,5 \\ \hline 315 \\ + 48 \\ \hline 1215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 21 \\ \hline 40 \\ + 73,5 \\ \hline 122,5 \end{array}$$

$$25m = 49 - 258$$

$$\frac{28}{3} = 7,4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\frac{a}{b} - \text{несократимая} \Rightarrow (a, b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} \text{ сократили на } m \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2 - 9ab + b^2 : m \end{matrix}$$

1) Пусть $a \equiv_{m} v_1$; $b \equiv_{m} v_2$ ($v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, иначе $(a, b) \neq 1$, т.к. $a+b : m$ и если, доо, $v_1=0$, то $v_2=0 \Rightarrow (a, b) \neq 0$..!!)

a) $a+b : m \Rightarrow v_1 + v_2 \equiv_{m} 0$

b) $a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow v_1^2 - 9v_1v_2 + v_2^2 \equiv_{m} 0$

$$(v_1 + v_2)^2 - 11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$-11v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$((v_1 + v_2)^2 : m \text{ по н.а.})$$

б.) $v_1 + v_2 \equiv_{m} 0 \quad | \cdot v_1 \quad (v_1 \neq 0)$

$$v_1^2 + v_1v_2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1v_2 \equiv_{m} -v_1^2 \Rightarrow 11v_1^2 \equiv_{m} 0$$

$$v_1 \neq 0 \Rightarrow 11 \equiv_{m} 0$$

$$11 = m$$



$$11 \geq m$$

2.) при $a=1, b=10$ гребь $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{11}{11}$

сократили на 11 $\Rightarrow m_{\max} = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3

$$\text{Пусть } \begin{cases} 3x^2 + 5x + 1 = A \\ 5 - 6x = B \end{cases} \quad (A+B = 3x^2 - 5x + 6)$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

||)

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad (\text{возведем в квадраты по правилу ур. а})$$

(A и A+B > 0)

$$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$$

$$(2A+B-B^2) = 2\sqrt{(A+B)A}$$

$$4A^2 + 2AB - 2AB^2 - 2AB - 2AB^2 + B^2 - B^3 - B^3 + B^4 = 4A^2 + 4AB \quad (\text{обе стороны возведем в кв-ю})$$

$$B^4 - 2B^3 + B^2 - 4AB = 0$$

$$B^2(B^2 - 2B + 1 - 4A) = 0$$

||)

1.) $B^2 = 0 \Rightarrow B = 0$

$$5 - 6x = 0$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$B = 0; A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

||)

уг. уса.

2.) $B^2 - 2B + 1 - 4A = 0$

$$(5 - 6x)^2 - 2(5 - 6x) + 1 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$36x^2 + 25 - 60x - 10 + 12x + 1 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(B-1)^2 - 4A = 0$$

$$36x^2 - 48x + 16 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3 (продолжение)

$$\begin{aligned} X &= \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 126}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 288}}{24} \\ &= \frac{26 \pm \sqrt{676 - 288}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{388}}{24} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \end{aligned}$$

a.) $x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$

$$12 > x > 11$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0.$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 =$$

$$= x(3x-5) + 6 > 0,$$

$$\text{т.к. } x \text{ и } 3x-5 > 0.$$

⇓
yg. yes.

b.) $x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$

$$\frac{2}{6} > x > \frac{1}{6}$$

⇓

$$A > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$A+B = 3x^2 - 5x + 6 = x(3x-5) + 6 > 0$$

$$\text{т.к. } x(3x-5) > -\frac{6}{3}, 5$$

(постановка пределов
по логике)
 $\frac{2}{6} \left(\frac{3}{6} - 5 \right)$

⇓

yg. yes.

Ответ: $x = \frac{5}{6}, x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

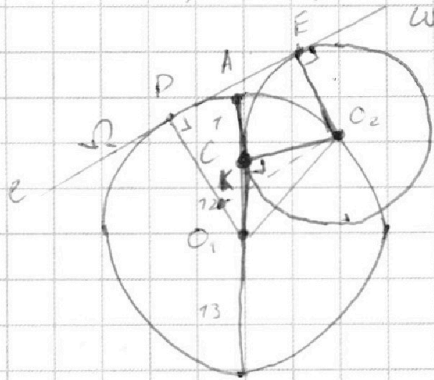
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$AB = AC + BC = 26 \Rightarrow R_1 = 13.$$

$$O_1B = 13; AC = 1; CO_1 = 12$$



O_1 и O_2 - центры ок-тей

Ω и ω . R_1 и R_2 - их радиусы.

$$1.) \omega \cap \Omega = C \Rightarrow O_2C \perp AC.$$

Заменим т. П-радиус ΔCO_2O_1 :

$$R_1^2 = 12^2 + R_2^2$$

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 - 12^2} = 5.$$

2.) пусть касательная - l

$$l \cap \Omega = D$$

$$l \cap \omega = E, O_1D \perp l, O_2E \perp l.$$

$$3.) \angle O_1DO_2 = \angle O_1O_2D, \text{ так как } O_1O_2 \parallel l$$

$$O_1D = R_1.$$

$$O_1D \parallel O_2E \Rightarrow \angle DO_2E = \alpha$$

$$4.) a.) \cos \alpha = \frac{5}{13}, \text{ где } \Delta O_2ED$$

$$b.) DO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \alpha$$

3.) отметим на O_1D точку K , что $DK = O_2E = 5$.

$\Rightarrow O_1K = 13 - 5 = 8$. $O_2K \parallel DE$, так как KO_2ED - прямоугольник. $\Rightarrow DE = O_2K$, $O_2K = \sqrt{13^2 - 8^2} =$

$$= \sqrt{105}.$$

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$1.) 5x - y = 3z$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow a.) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$b.) x = \frac{3z + y}{5}$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot xyz$$

$$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$$

$$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z_1 = 3y$$

$$z_2 = -\frac{5}{3}y$$

Дробь из уравнения: $A = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

$$1.) z = 3y \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{45}{74}$$

$$2.) z = -\frac{5}{3}y \Rightarrow A_2 = \frac{55}{42}$$

$A_2 < A_1$, A_2 достигается при

$$y = 3; z = -5; x = -2,4$$

Ответ: $\frac{55}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть $AB = L$, скорости велосипедиста и мотоциклиста —
 v_8 и v_m , соответственно. (v [км/ч], t [ч.])

Запишем уравнение из условия:

$$1.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} + 1 &= \frac{L}{v_8} \end{aligned} \right.$$

$$2.) \left\{ \begin{aligned} v_8 \cdot \frac{L}{v_m} + 49 &= v_m \cdot \frac{L}{v_8} \end{aligned} \right.$$

$$3.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m + 7} + \frac{36}{v_8} &= \frac{L}{v_8 + 7} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{L}{v_m + 7} + 0,8 = \frac{L}{v_8 + 7}$$

$$1.) \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_8} &= -1 & (1) \\ \frac{v_8 L}{v_m} - \frac{v_m L}{v_8} &= -49 & (2) \end{aligned} \right.$$

(1) · (2)

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_8}}{\frac{v_8}{v_m} - \frac{v_m}{v_8}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{\frac{v_8 - v_m}{v_m v_8}}{v_8^2 - v_m^2} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{v_8 - v_m}{(v_8 - v_m)(v_8 + v_m)} = \frac{1}{49}$$

$$v_8 + v_m = 49$$

$$v_m = 49 - v_8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение)

$$2.) \begin{cases} \frac{L}{\sigma_m} - \frac{L}{\sigma_8} = -1 & (1) \\ \frac{L}{\sigma_{m+2}} - \frac{L}{\sigma_{8+2}} = -0,6 & (3) \end{cases} \quad \text{разделим (1) на (3)}$$

$$\frac{\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma_8}}{\frac{1}{\sigma_{m+2}} - \frac{1}{\sigma_{8+2}}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{\sigma_8 - \sigma_m}{\sigma_8 \sigma_m}}{\frac{\sigma_8 - \sigma_m}{(\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2})}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2})}{\sigma_8 \sigma_m} = \frac{5}{3}$$

подставим $\sigma_m = 49 - \sigma_8$ из п.1.

$$3 (\sigma_{8+2}) (\sigma_{m+2}) = 5 \sigma_8 (49 - \sigma_8)$$

$$168 \sigma_8 - 3 \sigma_8^2 + 1176 - 21 \sigma_8 = 245 \sigma_8 - 5 \sigma_8^2$$

$$2 \sigma_8^2 - 98 \sigma_8 + 1176 = 0$$

$$\sigma_8^2 - 49 \sigma_8 + 588 = 0$$

по т. Виета:

$$\sigma_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad \sigma_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

но $\sigma_8 = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ не подходит, т.к. скорость $\sigma_8 > \sigma_m$

$$\sigma_m = \sigma_8, \quad \text{а при } \sigma_8 = 21 \quad \sigma_m = 21 < 28$$

$$\sigma_8 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение 2)

$$v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$(1): \quad \frac{L}{28} - \frac{L}{21} = -1.$$

$$L \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{21} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{21 - 28}{27 \cdot 21} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{3 - 4}{7 \cdot 3} \right) = -1$$

$$L \left(\frac{-1}{7 \cdot 3} \right) = -1$$

$$L = \frac{7 \cdot 3}{2} \text{ км}$$

$$L = 94,5 \text{ км.}$$

Ответ: 94,5 км.

$$L \left(\frac{3 - 4}{84} \right) = -1$$

$$L = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow a) 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

b.) $x = \frac{3z + y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \mid \cdot xyz$

$8yz + xz = 15xy.$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z + y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = \frac{4yz \pm \sqrt{196y^2}}{6} = \frac{4yz \pm 14y}{6}$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{10}{6}y = -\frac{5}{3}y. \Rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5}{3}y \end{cases}$

Рассмотрим грады из условия А: $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$\frac{8yz + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

1.) $z = 3y$

$A_1 = \frac{8 \cdot 3y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{72 + 18}{1 + 27} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$

Достигаем при:

$y = 3; z = -5; x = -2,4.$

2.) $z = -\frac{5}{3}y.$

$A_2 = \frac{8 \cdot 25 \cdot \frac{y^2}{9} - 10y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{110}{9} = \frac{28}{3}$
 $= \frac{110 \cdot 8}{3 \cdot 28} = \frac{110 \cdot \frac{53}{42}}{84} \Rightarrow A_2 < A_1.$

Ответ: $\frac{55}{42}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

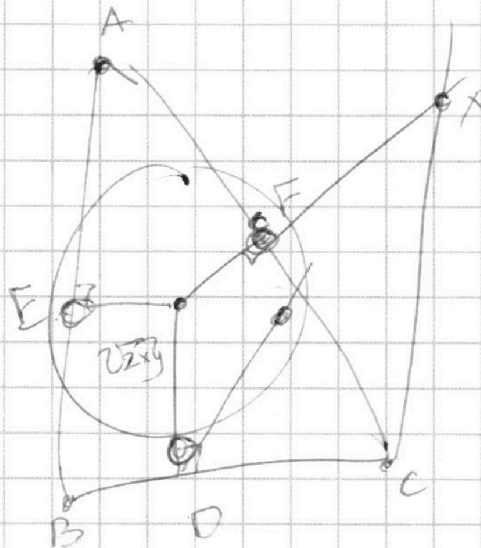
6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8y \cdot y^2 = 15xy$$

$$8 \cdot 3 \cdot (-5) = 15 \cdot 4 \cdot 5$$

$$-120 = 300$$

$$x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8yz + xz = 3(3z+y)y$$

$$8yz + \frac{(3z+y)z}{5} = 3(3z+y)y$$

$$40yz + 3z^2 + yz = 45zy + 15y^2$$

$$41yz + 3z^2 = 45zy + 15y^2$$

$$0 = 4zy + 15y^2 - 3z^2$$

$$3z^2 + y^2 = 4zy + 16y^2$$

$$\frac{8z^2 + 6yz}{46y^2 + 4zy} = \frac{4z^2 + 3yz}{8y^2 + 2zy}$$

$$y = \frac{8 \cdot 5}{3(3 + \frac{1}{3})}$$

$$\frac{-4y}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 5}{3(15 + \frac{5}{3})}$$

$$\frac{8y \cdot (-\frac{5}{3}y)}{15y + \frac{5}{3}y}$$

$$25x^2 = 9z^2 + 6yz + y^2$$

$$x = \frac{3z+y}{5}$$

$$\frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{120}{10} = \frac{120}{10}$$

$$\frac{120}{10} = \frac{120}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



24

$$8yz + xz = 15yx$$

$$z = \frac{15yx}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45yx}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45yx$$

$$40xy + 25x^2 - 8y^2 - yx = 45yx$$

$$25x^2 - 8y^2 = 6yx$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$x = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$40yz = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - zy$$

$$3z^2 = 4yz + 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz = 15y^2$$

$$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$4y = \sqrt{16y^2 + 180y^2}$$

$$4y = 14y$$

$$z = \frac{14y}{6}$$

$$z = \frac{7y}{3}$$

$$z^2 = \frac{49y^2}{9}$$

$$\frac{200}{9} - 10 = \frac{100}{9}$$

$$\frac{12}{5} = -24$$

$$2z^2 + 6yz$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$\frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



112

12

13

14

15

16

17

ал-геб. легко

полная

полная

полная

легко

не знаю

Решил ТУ

ТУ

АлГ

Геом

АлГ

Физ

Геом

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

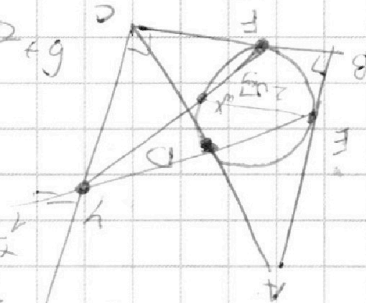
$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{y_{max}} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$56x - 2\sqrt{y_{max}} = 30x^2 + 18$$

$$28x - \sqrt{y_{max}} = 15x^2 + 9$$

$$y_{max} = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$



$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$20 + 12 = 32$$

все равно 4+4+5+4+4+5=26

$$100 - 30 + 1889 = 2159$$

$$252 - 240 = 12$$

$$122 - 99 = 23$$

$$\frac{1}{1-25} = 1 - 99 + 121 = (\frac{1}{1-5})^2 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$1 - 30 + 100 = 71$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 1

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 14 \\ c_3 + b_3 \geq 19 \\ c_3 + a_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 90,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 57 \\ 13,5 \\ 10,5 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 74 \\ \hline 19 \\ 5,5 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 13 \\ b_7 + c_7 \geq 14 \\ a_7 + c_7 \geq 42 \end{cases}$$

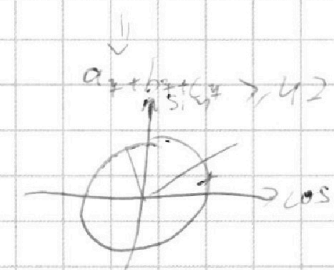
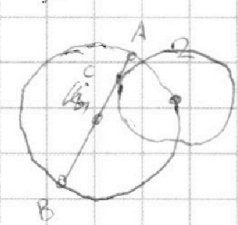
$$\begin{array}{r} 28 \\ 3,5 \\ 9,5 \quad | \quad 27 \\ \hline 8,5 \\ 10,5 \\ \hline 4,5 \end{array}$$

$A = P_w \cos \alpha$

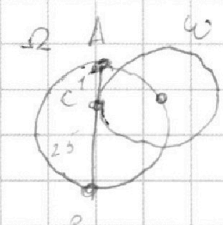
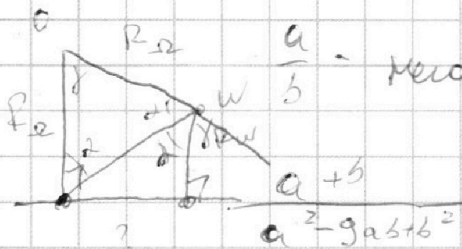
$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 28$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 36 < 42$$

a_3
 b_3
 c_3



N 2

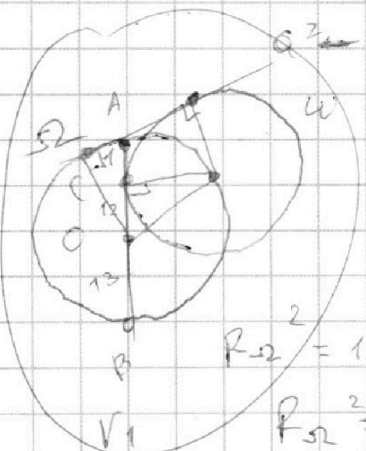


$a \equiv r_1$
 $b \equiv r_2$

N 4 $a+b:m$

$$a^2 - gab + b^2 = m$$

$\Rightarrow m/b$
 m/a



$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = m$$

$r_1 + r_2 = 0$

$$(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 = m$$

$r_1r_2 + r_2^2 = 0$

$$r_{\Omega}^2 = 144 + R_w^2$$

$11r_2^2 = m$

$11r_1^2 = m$

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{r_1 b r_1 r_2 = -r_2^2}{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem involves solving a cubic equation:

$$2x^3 - 4x^2 + 7x - 20 = 0$$

The student uses the Rational Root Theorem, testing possible roots $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$. They find that $x = 5$ is a root. They then perform polynomial division to reduce the cubic to a quadratic:

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 20) : (x - 5) = 2x^2 + 6x + 18$$

The quadratic equation $2x^2 + 6x + 18 = 0$ is solved using the discriminant method:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 36 - 144 = -108 < 0$$

Since the discriminant is negative, there are no real roots for the quadratic part. The only real root of the original equation is $x = 5$.

Other parts of the work show various algebraic manipulations, including factoring and solving quadratic equations like $15x^2 - 28x + 9 = 0$ and $3x^2 + 5x + 6 = 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 5

$$1.5x - y = 3z$$

$$2.) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

3-5.

$$3 \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \cdot 8yz + xz = 15xy$$

$$383 = 4 \cdot 9z \cdot z \Rightarrow z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\frac{13 - \sqrt{92}}{4}$$

$$5 - 5x - y = \frac{45xy}{8y+x}$$

$$(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

1/4

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

$$3x^2 - 5x \quad 5x^2 - 8y^2 = 6xy$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$= \frac{3x(5x+y) - z^2}{25x^2 - 6y^2}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -64 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -64 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$3x^2 - 2x + 95 = A$$

$$\sqrt{A - 3x + 2.5} = \dots$$

$$\sqrt{A + 5 - 6x} - \sqrt{A - 5 - 6x} = A$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B$$

$$5 - 6x = B$$

$$\frac{383}{28} \cdot \frac{4}{9z}$$

$$= 4A^2 + 2AB - 2AB^2 + 2AB + B^2 - B^3 - 2AB^2 - B^3 + B^3$$

$$\begin{aligned} A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} &= B^2 \\ 2A+B - B^2 &= 2\sqrt{A^2+AB} \\ &= 4(A^2+AB) \end{aligned}$$

$$(2A+B-B^2)$$