



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ ;  ~~$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$~~ ;  $c = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ . Если у них есть  
другие простые множители, то мы не связаны с  
условием и делаем произведение больше, что нам не нужно.  
Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 20 \\ \alpha_2 + \alpha_2 \geq 37 \\ \beta_1 + \alpha_2 \geq 17 \\ \beta_2 + \alpha_2 \geq 17 \end{cases}$$

Складываем:  $\Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2) \geq 51 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2) \geq 64 \end{cases}$ .  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 \geq 26 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 32 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пример:  ~~$\begin{cases} a = 2^9 \cdot 7^5 \\ b = 2^5 \cdot 7 \\ c = 2^{12} \cdot 7 \end{cases}$~~   $\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 = 26$ . Пример:  $\begin{cases} a = 2^9 \dots \\ b = 2^5 \dots \\ c = 2^{12} \dots \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 32 \\ \alpha_2 + \alpha_2 \geq 37 \end{cases} \cdot \beta_2 \geq 0 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 37 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 = 37. \text{ Пример: } \begin{cases} \alpha_2 = 10 \\ \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = 27 \end{cases}$$

Значит,  $(abc)_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$ .

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$  можно сократить на  $m$ , то и

$\frac{a^2-bab+b^2}{a+b}$  можно сократить, при этом  $m$  останется неизменным.

Знаменатель равен  $(a+b) \Rightarrow m \leq a+b$ . Пусть  $m = a+b$ .

$$\frac{a^2-bab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{bab}{a+b} = (a+b) - \frac{bab}{a+b} \Rightarrow bab : a+b. \text{ Пусть } bab = k(a+b)$$

$$bab = ak + kb \Rightarrow kb : a \text{ и } ak : b \text{ и несократима} \Rightarrow k : a \text{ и } k : b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k : ab \Rightarrow k \geq ab \Rightarrow bab \geq ab(a+b) \Rightarrow a+b \leq 8 \Rightarrow m=8. \text{ Пример: } \begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$$

Если  $m \neq a+b$ , то пусть  $m=d$ .  $a+b : d \Rightarrow bab : d$ . Пусть  $d > 8$ .

Тогда  $\text{НОД}(ab; d) > 1$ . Но  $\text{НОД}(a+b; d) > 1 \Rightarrow \text{НОД}(ab; (a+b)) > 1$ .

Противоречие. Значит,  $m=8$ .

Ответ:  $m=8$ .

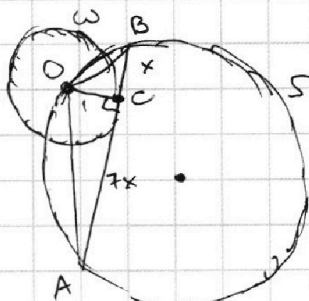
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



По мере слияния,

$$AB = 2.5 \cdot \sin \angle AOB = 10 (\sin \angle COB \cos \angle AOC + \sin \angle AOC \cos \angle COB) =$$

$$= 10 \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = 10 \cdot \frac{8x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}}$$

$$AB = 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1} \Rightarrow 100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$x^2 = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49} = \frac{4\sqrt{1369} - 50}{2 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 37 - 50}{2 \cdot 49} = 1. \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Octbet: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$
$$(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})^2 = 2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$$
$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)$$
$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 + 4x^3+4-28x+2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$
$$4x^3-21x+2 = 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

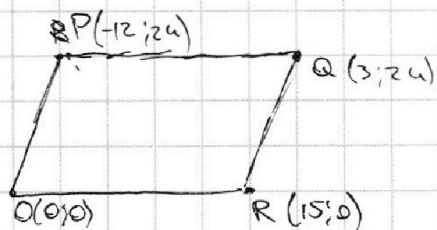
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ = OR$  и  $PQ \neq QR \Rightarrow$  не все равнозначны,  
так, как показано на рисунке.

Система, задающая точки  
параллелограмма:

$$\begin{cases} y \geq 0 & (OR) \\ y \leq 24 & (PQ) \\ y \geq -2x & (OP) \\ y \leq -2x + 30 & (QR) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \end{cases}$$

Предположим, что параллелограмм —

множеством точек  $y = -2x + b$ , где  $b \in [0; 30]$ , при этом  $y \in [0; 24]$ . Тогда, если  $A(x_1, y_1) \in l_1: y = -2x + b_1$ ,  $B(x_2, y_2) \in l_2: y = -2x + b_2$

$\Rightarrow 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \Rightarrow b_2 = b_1 + 12$ . Тогда с учетом  
координат  $\Rightarrow b_1 \in \mathbb{Z}; b_1 \in [0; 30]$ . Тогда решение уравнения  
 $b_2 - b_1 = 12$  равно  $30 - 12 + 1 = 19$ .  $OR \parallel PQ \parallel O_x \Rightarrow$  у каждой точки  
прямой 25 значений  $b$ . Значит, всего решений  $19 \cdot 25^2$ .

Ответ:  $19 \cdot 25^2 = 11875$

↑  
т.е. для  $b$  можно выбрать  
19 способов, а для каждой  
на этих прямых —  $25^2$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

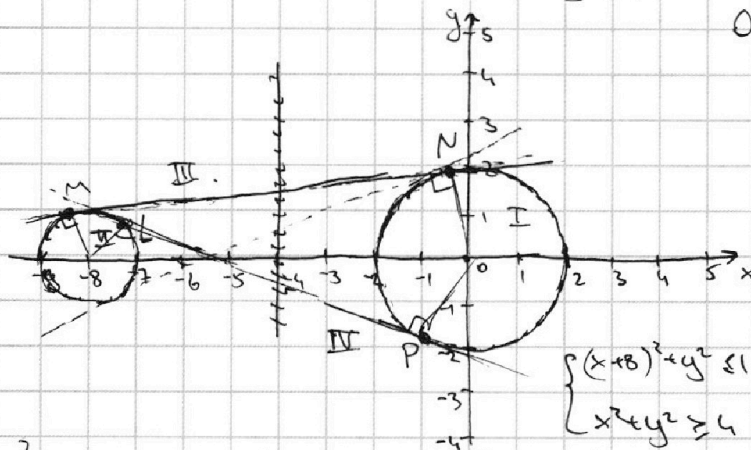
$(x+8)^2 + y^2 = 1$  — окружность с центром  $O_1(-8; 0)$  и радиусом 1.  
 $x^2 + y^2 = 4$  — окружность с центром  $O_2(0; 0)$  и радиусом 2.

Окружности не пересекаются

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \text{ задаёт}$$

всю внутренность круга I (включая его границу), а

задаёт круг II (включая границу).



Значит, уравнение неравенства

$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$  задаёт две ранее упомянутых круга.

$ax - y + 10b = 0$  — прямая. Решения  $2 \Rightarrow$  эта прямая — общая касательная двух окружностей.  $A(-8; 0)$ ,  $B(0; 0)$ ,  $M$  и  $N$  — точки касания прямой  $II$  с  $I$  и  $II$  окружностями соответственно.  $O$  — пересечение прямой  $III$  и  $ax$  на  $x$ ,  $O(2; 0)$ . Тогда  $\frac{2}{2} = \frac{2-8}{1} \Rightarrow z = 2z - 16 \Rightarrow z = 16$ . Значит,  $-16a + 10b = 0$ .

$$a = \frac{1}{\sqrt{8^2 - 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} \Rightarrow b = \frac{-16}{30\sqrt{7}} = \frac{-8}{15\sqrt{7}} \Rightarrow \text{II: } y = \frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot 10 \cdot \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

Аналогично находится вторая внешняя касательная:

$y = -\frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot 10 \cdot \frac{8}{15\sqrt{7}}$ . Раскажем прямую  $IV$ . Пусть она пересекает  $y=0$  в  $Q$ .  $\Rightarrow (Q(q; 0)) \Rightarrow \frac{-q}{2} = \frac{8+q}{1} \Rightarrow 0 = 3q + 16$

$$q = -\frac{16}{3} \Rightarrow ax \Rightarrow 10b = \frac{16}{3}a, a = \frac{-2}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2^2}} = \frac{-2 \cdot 3}{\sqrt{220}} = \frac{-3}{\sqrt{55}} \Rightarrow b = \frac{16 \cdot (-3)}{\sqrt{55} \cdot 3 \cdot 10} =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{55}}. \text{ Аналогично для второй внутренней касательной, } a = \frac{3}{\sqrt{55}}; b = \frac{8}{5\sqrt{35}}.$$

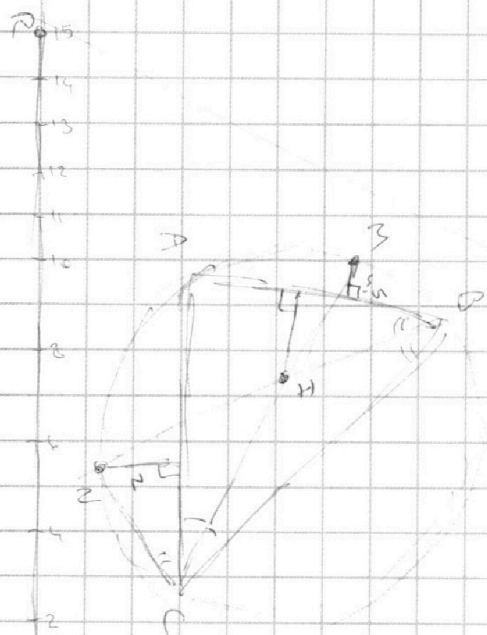
$$\text{Ответ: } (a, b) \in \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}; -\frac{8}{15\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{8}{15\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{8}{5\sqrt{35}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{55}}; \frac{8}{5\sqrt{35}}\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$y_2^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 25 \\ \hline 625 \\ 2500 \\ \hline 3125 \end{array}$$

$$b' = b_c + 112$$

$$T = 2 \times 2 = 4$$

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \\
 - (4x^4 - 4x^3) \\
 \hline
 -2x^3 - 2x^2 + x + 3 \\
 - (-2x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 -4x^2 + x + 3 \\
 - (-4x^2 + 4x) \\
 \hline
 -3x + 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 7x + 1)$$



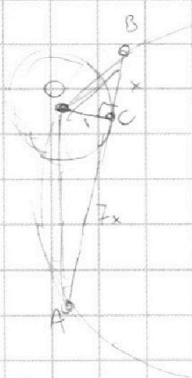
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



$$AB = 10 \cdot \sin \angle AOB = 10 (\sin \angle COB \cos \angle AOC + \sin \angle AOC \cos \angle COB) =$$

$$= 10 \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{9x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$10 = \sqrt{1+4x^2} \cdot \sqrt{49x^2+1}$$

$$100 \leq 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49} = \frac{4\sqrt{369} - 50}{2 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 37 - 50}{2 \cdot 49}$$

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
|---|---|

88

$$\begin{array}{r} 386 \\ + 49 \\ \hline 435 \\ 584 \\ \hline 1019 \end{array}$$

$$21904 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

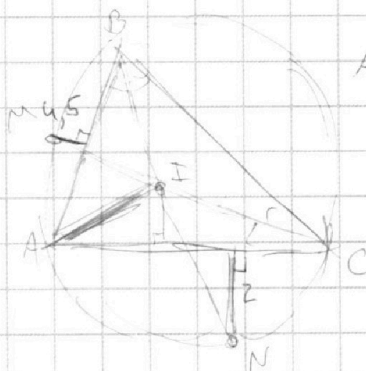
[illegible]

$$AB + AC = BC$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 35 \\ + 35 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \hline (225) \end{array}$$

|     |    |
|-----|----|
| 76  | 98 |
| 148 |    |



$$AT = (AB + AC - BC) \cos \alpha$$

$$\cancel{\frac{AC}{\cancel{AC} \cdot p}} \cdot \lg p = \frac{q}{AC} \quad ; \quad \lg x = \frac{q}{AB}$$

$$32x^2 + 32x + 16 + 4 \cdot 98x^4 + 4 \cdot 98x^3 + 2 \cdot 98 - 8 \cdot 28x^3 - 8 \cdot 28x^2 - 4 \cdot 28 =$$

$$= x^5 + 7^5 - 42 \cdot 49x^3 + x^2(21^2 - 4 \cdot 49) - 4 \cdot 28x + 4$$

$$(4 \cdot 98 - 7^4)x^4 + x^3(25 \cdot 98 - 8 \cdot 28) + x^2(32 \cdot 8 \cdot 28 - 21^2 - 4 \cdot 49) + x(32 + 4 \cdot 21) + 12 + 196 - 56$$

|   |   |
|---|---|
| 1 | 0 |
|---|---|

~~$$72 - 5 \cdot 6 + 3$$
$$50 - 25 + 3 =$$~~

$$y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x$$

CG

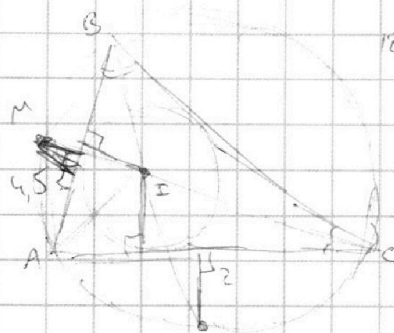
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 2\beta \vee 180 - (2 + x) = 180 - \frac{180 - 2\beta}{2} = 90 + \beta$$

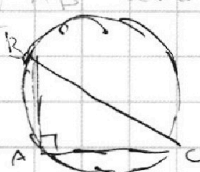
$$\frac{AI}{\sin x} = \frac{AC}{\sin(2 - 2\beta)}$$

$$\frac{AI}{\sin x} = \frac{AC}{\sin(90 + \beta)}$$

$$\frac{AI}{AC} = \frac{4}{AC} = \tan \beta$$

$$\frac{9}{AB} = \tan x$$

$$\frac{4}{AC} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$



$$\frac{BC}{\sin 90^\circ} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin AOB} = 10$$

$$2x_1 - 2x_2 + y_2 - y_1 = 12$$

$$OR: y=0$$

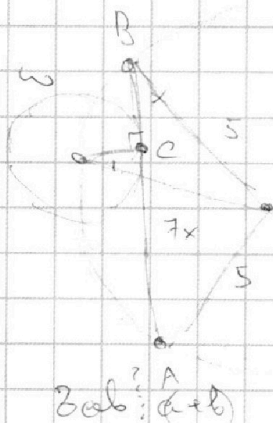
$$PQ: y=24$$

$$OP: y=-2x$$

$$QR: y=-2x+30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in [0; 24] \\ y \in [-2x; -2x+30] \end{cases}$$

$$y = 24 \Rightarrow 24$$



$$\frac{a^2 - bab + b^2}{a^2 - bab + b^2} \text{ можно сравнить } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - bab + b^2}{a+b} \text{ можно сравнить}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} = \frac{8ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b}$$

$$\frac{1}{x} = \tan x = \frac{\sin \cos}{\cos \cos}$$

$$8ab = k(a+b)$$

$$8ab = ab + kb \Rightarrow kb : kb : a \Rightarrow k : a$$

$$ak : b \Rightarrow k : b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{\min} = ab$$

$$8ab \geq ab(a+b)$$

$$a+b \leq 8$$

$$\sin \angle AOB = \sin \cos \cos \angle AOC + \sin \angle AOC \cos \cos = 8 \times \cos \cos \cos \angle AOC$$

$$10 \cdot 2 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 34 + 17 = 51$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{51 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} =$$

$$= \frac{51 \pm 1}{4} = 4 \text{ и } \frac{3}{2}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$ax - y + 10b = 0 \text{ — прямая}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

либо все прямые  
находятся  
снаружи  
малого  
и/или большого  
кругов

либо  
находятся  
снаружи  
малого  
и/или большого  
кругов

$$y = ax + 10b$$

Решение гласит, если прямая касается  
обоих окружностей.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [1; +\infty)$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 49x^2 - 28x + 4 - 2x^2 - 2x - 1 = 47x^2 - 30x + 3$$

$$(2 - 7x)^2 = 49x^2 - 28x + 4$$

$$4(47x^2 - 30x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 7^4 x^4 + 21^2 x^2 + 4 - 2 \cdot 21 \cdot 49x^3 + 2 \cdot 2 \cdot 49x^2 - 4 \cdot 21x$$