



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначение: $\text{ord}_n a = k \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot n^k \\ a \cdot n^{k+1} \end{cases}$

Пусть $x_2 = \text{ord}_2 a$; $x_7 = \text{ord}_7 a$; $y_2 = \text{ord}_2 b$;
 $y_7 = \text{ord}_7 b$; $z_2 = \text{ord}_2 c$; $z_7 = \text{ord}_7 c$.

Из условий получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{39} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $2^{39} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $\text{НОД}(a; b) = (a; b)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow (a; b) = 1$ (1)

Если m - наибольшее число, на которое можно со-

кратить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$.

Т.к. $(a; b) \neq (x; y) = (x-y; y)$, то
 $(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-9ab) =$
 $= (a+b; -9ab)$.

Предположим, что существует простое p :
 $\Rightarrow \begin{cases} p|a \\ p|b \\ p|(a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p|a \\ p|b \end{cases} \Rightarrow (a; b) \geq p$, что про-

тиворозит (1), поэтому $(a+b; -9ab) \leq 9$ и
 равенство достигается, если выбрать значения
 простых чисел a и b таких, что $a+b \leq 9$ (на-
 пример $a=4; b=5$).

Ответ: при $m=9$.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

ООЗ:

Ваннотим обе части ур-я на

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0.$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0.$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$(1-9x) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (сравнив. ООЗ.)}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})^2 = 1$$

Найдя вершины параболы $x_0 = -$

$$D = 9-12 < 0 \Rightarrow \Rightarrow 3x^2+3x+1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6x^2-3x+3+a=1, \text{ где } a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$$

Найдя минимум $f(x) = 6x^2-3x+3$.

$$x_0 = \frac{1}{4}; y_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1.$$

и

$6x^2-3x+3+a > 1$, поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14;$$

$$\text{Замени } \begin{cases} u = x_2 - x_1 \\ v = y_2 - y_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \Rightarrow v : 2 \Rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ u = 7 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \quad (1)$$

Востроим параллелограмм $OPQR$ го прямоугольника APB,R ; $A_1(-13; 0)$, $B_1(16; 26)$.

Найдем в нем пар-во точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, удовлетворяющих системе (1) и выстачу ного пар-во пар точек, в которых хотя бы 1 содержится в 1 из тр-ков $\triangle PA_1O$ или $\triangle KB_1Q$. пар-во способов выбрать ~~абсолютно~~ точки в A_1PB_1R так, чтобы они их ординаты от- нисались на $2k$ равняется $\left\lfloor \frac{26}{2k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13}{k} \right\rfloor$ но, а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кол-во способов выбрать абсциссы, отсчита-
ными на 7-к равняется $29-30-(7-k, 1)=23k$.

По правилу произведения получаем, что всего та-
ким образом в A, B, R можно выбрать

$$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n} \right] (23+n)$$

кол-во способов выбрать ординаты рав-
няется $\frac{C_{27}^2}{2}$, а абсциссу $7 \cdot 14 - (1+2+\dots+13) =$

$$= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$$

Всего $\frac{7 C_{27}^2}{2}$ способов. При этом каждая
точка тр-ков была взята в какой-либо
паре. Всего их $13 \cdot 26$. При этом каждая точка
попадала в 28 пар, что получаем $14 \cdot 13 \cdot 26$
способов. Тогда всего таких точек в парам
имеем $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

$$\text{Ответ: } \frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

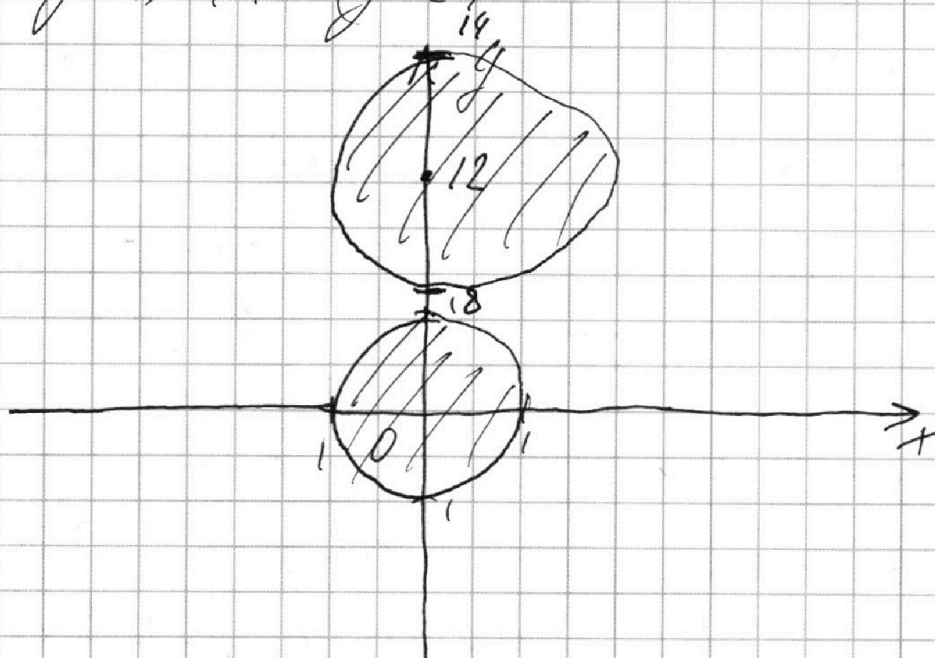
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Ур-е $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Ур-е $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ задает окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4.

Изобразим на рисунке точки, удовлетв. неравенству $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$.



Получили:

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax)^2 - 1 \leq 0; \end{cases}$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) \leq 0;$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \leq 0;$$

$$a^2 + 1 \leq 64b^2. \text{ Для любого } a \in \mathbb{R} \exists b. a^2 + 1 \leq 64b^2$$

(например $b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{64}}$)

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16abx + 24ax - 16 \leq 0;$$

$$x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 2b) + (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 16a^2(9 - 12b + 4b^2) - (a^2 + 1) \cdot (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0;$$

$$9 \cdot 16a^2 - 12 \cdot 16a^2b + 4 \cdot 16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 - 64b^2 - 12^2 + 16 \cdot 12b + 16 \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 64b^2 + 16 \cdot 12b + 16 \leq 0;$$
$$16a^2 \leq 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16;$$
$$a^2 \leq 4b^2 - 12b + 1$$

Т.к. решение должно быть ровно 2, то
прямая $ax + 15 - 8b = 0$ — осязая касательная
к данной окружности, т.е., каждый из
дискриминантов $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$ и $\frac{D_2}{4} = 16a^2 - 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16$
должен быть равен 0.

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \end{cases}$$
$$60b^2 + 12b - 2 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 39$$

$$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$$

$$a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}};$$
$$\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \left| \begin{array}{l} 9; 5 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right.$
 $\min(abc); x_2 = \text{ord}_2 a; x_7 = \text{ord}_7 a$
 $\text{ord}_n a = \frac{a}{n} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \text{ord}_2 b; y_7 = \text{ord}_7 b \\ z_2 = \text{ord}_2 c; z_7 = \text{ord}_7 c \end{cases}$
 $\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55$
 $\Rightarrow \begin{cases} y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_7 + y_7 \geq 39 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 66 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases}$
 $\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

2) $\frac{a}{b} - \text{норм} \Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$
 $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} - \text{норм} \Leftrightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = 1$
 $\Rightarrow \begin{cases} |a+b; a^2 - 7ab + b^2| = 1 \\ |a; b| = 1 \end{cases}$
 $a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$
 $(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = (a+b; (a+b)^2 - 9ab) = (a+b; -9ab)$
 $\Rightarrow \text{НОД}(a+b, -9ab) = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{1,71} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{1,71} > \frac{1}{2} \approx 0,5$$

$$\text{Отв: } \frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{3}{4} + 1 > 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Отв: } (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}]$$

$$\cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 - \frac{1}{1,71}$$

$$5) O(0; 0); P(-13; 26); Q(3; 10);$$

$$R(16; 0)$$

$$\text{Найти } A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2x + y = 14$$

$$\text{Уч: } y = 2k \quad \begin{cases} y = 2k \\ x = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 2k = 14$$

$$x = 7 - k$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 +$$

$$y_2 - y_1 = 2k$$

$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

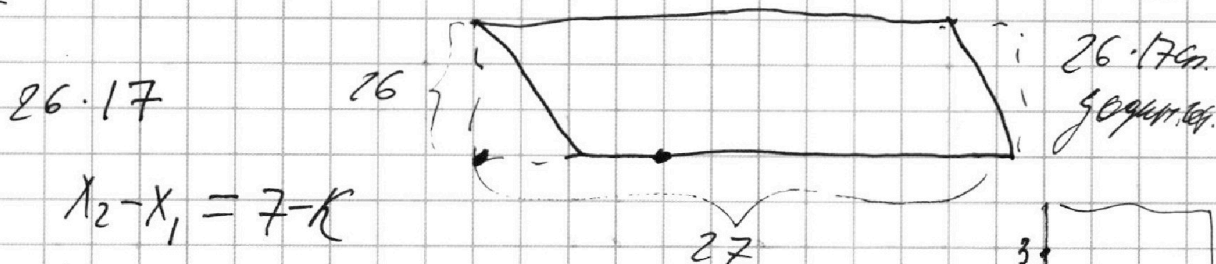
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2K \\ x_2 - x_1 = 7 - K \end{cases} \quad K \in \mathbb{Z}; \quad \begin{array}{l} \text{Zurück: } g \rightarrow 26 \text{ Ch.} \\ g \text{ Takai nie vor} \rightarrow \frac{26}{2} - 1 = 12 \end{array}$$



$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

No comparison:

$$6) \begin{cases} 9x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12) - 16 \leq 0 \end{cases}$$

a: 36: ^uровно 2 пер.

2 гр-с - 2 окр.

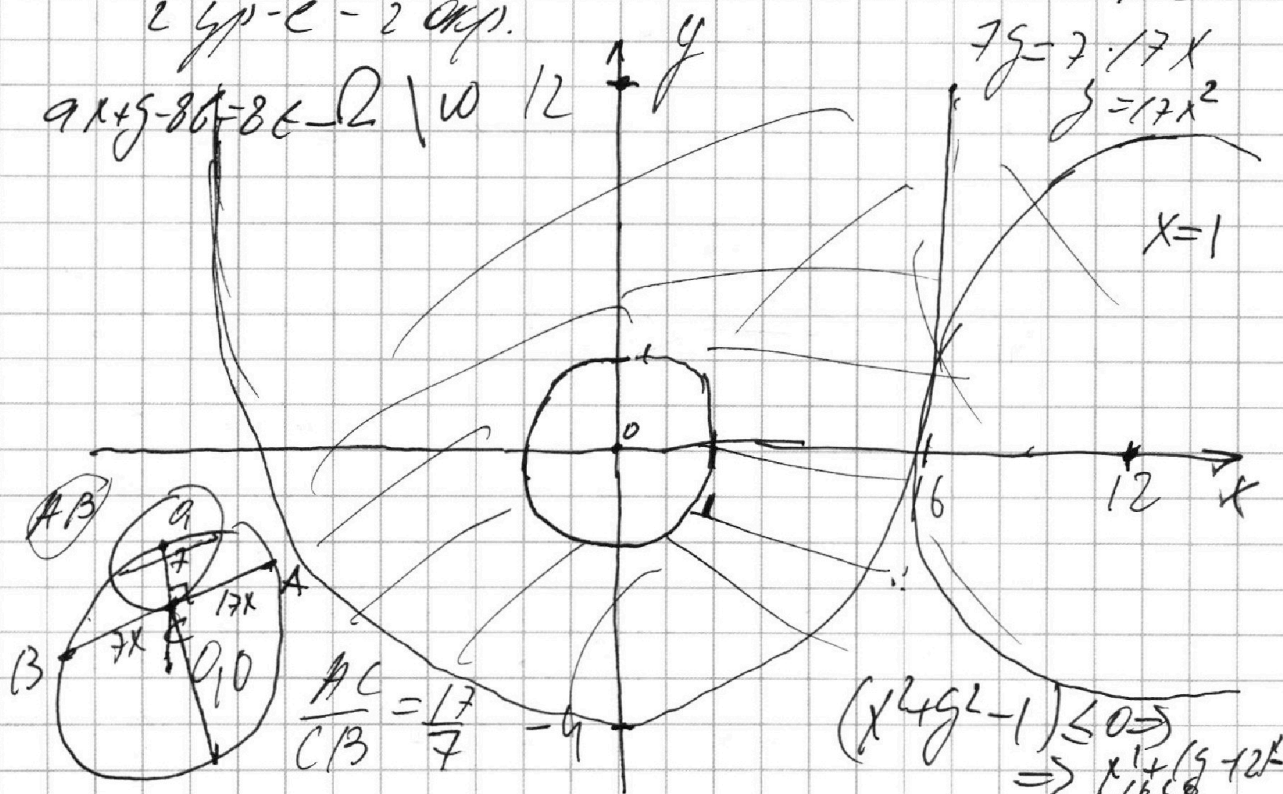
$$9x + 5 - 86 = 86 - 2 \quad | \cdot 12$$

$$\Omega \text{ M-601: } \Omega \backslash \omega$$

$$7g = 7 \cdot 17x$$

$$g = 17x^2$$

$x=1$



$$(x^2 + y^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (64b^2+12^2-20 \cdot 12b) \leq 0$$

$$\Delta_x = 64a^2(3-2b)^2 - (a^2+1)(64b^2+12^2-20 \cdot 12b) =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 - 16 \cdot 4b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b =$$

$$= 16 \cdot 9a^2 - 12^2a^2 - 64b^2 - 12^2 - 20 \cdot 12b \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 - 64b^2 - 12^2 - 16 \cdot 12b \leq 0$$

$$64b^2 + 16 \cdot 12b + 12^2 \geq (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$\Rightarrow (16 \cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$a: \exists$$

$$16a^2 \leq 64b^2$$

$$1+a^2 \leq 4b^2$$

$$a \leq \min$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 -$$

$$= 166ax - 16 \cdot 12b + 29ax - 16 =$$

$$= (a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (12^2+64b^2-16 \cdot 12b-16) \leq 0$$

$$\Delta_x = 64a^2(3-2b)^2 - (a^2+1)(12^2+64b^2-16 \cdot 12b-16) =$$

$$= 36a^2 - 4 \cdot 12a^2b + 16b^2a^2 - 12^2a^2 - 64b^2a^2 +$$

$$+ 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 = 16 \cdot 9a^2 - 16 \cdot 12a^2b + 16 \cdot 4a^2b^2 -$$

$$- 12^2a^2 - 64a^2b^2 + 16 \cdot 12b + 16a^2 - 12^2 - 64b^2 + 16$$

$$+ 16 \cdot 12b + 16 = (16 \cdot 9 - 12^2)a^2 + 16a^2 - 64b^2 \leq 0$$

$$(16 \cdot 9 - 12^2)a^2 \leq 64b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a^2+1)x^2 + 2x(9-8a) + (64b^2 - 16b - 15) \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq 0$
 $\frac{0}{4} = \frac{9^2(1-8b)^2 - (a^2+1)(64b^2 - 16b - 15)}{4} = x^2 + 0^2 - 16^2$
 $= \frac{9^2(1-16b+64b^2) - (a^2+1)(64b^2 - 16b - 15)}{4} = x^2 - 16^2$
 $= a^2 - 16a^2b + 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + 16a^2b + 15a^2 - 64b^2 + 16b + 15$
 $= 16a^2b^2 - 64b^2 + 16b + 15 \leq 0$
 $a : \exists 6 : 16a^2b^2 - 64b^2 + 16b + 15 \leq 0$
 $64b^2 - 16b + 15 \leq 0 \Rightarrow y = 8b - ax$
 $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (8b - ax)^2 \geq 1$
 $64b^2 - 16b + 15 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 \geq 1$
 $(a^2+1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 \geq 0$
 $\frac{0}{4} = \frac{64a^2b^2 - (a^2+1)(64b^2 - 1)}{4} = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \geq 0$
 $a^2 \geq 64b^2 - 1$
 $ax \quad y = 8b - ax$
 $(24b - 12)^2 - 16 \leq 0$
 $-16abx + 2ax - 16 \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \geq 3x^2-6x+2 + \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$+ 3x^2+3x+1 = 6x^2-3x+3 + 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$6x^2-3x+3=0; \Delta=9-72=-63 < 0$$

$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{160-144}{4} = 16$$

$$\frac{0}{4} = 0 \quad \Delta_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{8}$$

$$2a + 6x^2 - 3x + 3 \geq 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{8} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1$$

$$[a; \infty)$$

$$4b^2 - 12b + 1 = 64b^2$$

$$60b^2 + 12b + 1 = 0$$

$$4b^2 - 12b + 2 = 64b^2$$

$$60b^2 + 12b + 2 = 0$$

$$ax + y - 8b = 0$$

общ. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 12b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax$$

$$(8b - ax)^2 + x^2 = 1$$

$$= ax^2 + 16axb + 64b^2 + x^2 - 1 = (a^2 + 1)x^2 - 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 + 64b^2 - a^2 + 1 = 64b^2 - a^2 + 1$$

$$+ a^2 - 64b^2 + 1 = a^2 - 64b^2 + 1 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \exists b = 0$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12b^2 - 2 \cdot 8b \cdot 12b - 1696x + 24ax = (a^2 + 1)x^2 + 8ax(3 - 2a)$$

