



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 КЛАСС. Вариант 10



- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введен обозначение:  $\text{ord}_n \alpha = d \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha : n^d \\ \alpha \nmid n^{d+1} \end{cases}$

Пусть  $x_2 = \text{ord}_2 \alpha$ ;  $x_7 = \text{ord}_7 \alpha$ ;  $y_2 = \text{ord}_2 \beta$ ;  
 $y_7 = \text{ord}_7 \beta$ ;  $z_2 = \text{ord}_2 \gamma$ ;  $z_7 = \text{ord}_7 \gamma$ .

Из условия получаем 2 системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{array} \right. \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}.$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{34}$



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение задачи 100( $a; b$ ) = ( $a; b$ ).

Дробь  $\frac{9}{7}$  несократима  $\Rightarrow (a; b) = 1$  (1)

Если  $m$  - наибольшее число, на которое можно сократить дробь  $\frac{a+b}{a^2-7ab+6^2}$ , то  $(a+b; a^2-7ab+6^2) = m$ .

$$\begin{aligned} T.K. (a; b) \# (x; y) &= (x-y; y), \text{ т.о.} \\ (a+b; a^2-7ab+6^2) &= (a+b; (a+b)^2 - 9ab) = \\ &= (a+b; -9ab). \end{aligned}$$

Предположим, что существует простое  $p$ :  $\begin{cases} p | ab \\ p | (a+b) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p | a \\ p | b \\ p | (a+b) \end{cases} \Rightarrow p | a, p | b \Rightarrow (a; b) \geq p, \text{ что опровергает (1).}$$

Таким образом (1), поэтому  $(a+b; -9ab) \leq 9$  и равенство достигается, если найдутся такие непростые числа  $a$  и  $b$  таких, что  $a+b = 9$  (например  $a=4; b=5$ ).

Ответ: при  $m = 9$ .



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \quad 003.$$

Решаем односторонне ур-е на  
 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0: \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$ 

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \quad | \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$+ \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \quad | \quad \frac{\partial}{\partial x} = 3$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0 \quad | \quad \text{находим корни:}$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0 \quad | \quad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3},$$

$$x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup \left[ \frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty \right)$$

$$x = \frac{1}{9} \quad | \quad \text{запись к 003.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \quad | \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0.$$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \quad | \quad \text{проверка верности нер-ва}$

$\downarrow$

$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1 \quad | \quad \text{далее } x_0 = -$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1 \quad | \quad \partial = 9 - 12 < 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad | \quad x \in \mathbb{R}$$

$$6x^2 - 3x + 3 + a = 1, \text{ где } a = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Найдем минимум  $f(x) = 6x^2 - 3x + 3$ .

$$x_0 = \frac{1}{4}; g_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

21.

$6x^2 - 3x + 3 + a \geq 1$ , но это ур-е 12 не имеет решений.

Ответ:  $\emptyset$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14;$$

$$\text{Задача } \begin{cases} g_1 = x_2 - x_1 \\ v = g_2 - g_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \quad \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \Rightarrow v : 2 \Rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \end{cases} \quad (1)$$

Построим параллелограмм  $OPQR$  по правилу  
чертежника  $A, P, B, R$ ;  $A(-3; 0)$ ,  $B(16; 26)$ .

Найдем 6 пар координат точек  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  
удовлетворяющих системе (1) и выбрать из  
них 6 пар координат, в которых хотя бы 1  
содержится в 1 из гранич  $\Delta PAQ$  или  $\Delta RBQ$ ,  
или 6 способов выбрать ~~одинаковую~~ точку  
6  $A, P, B, R$  так, чтобы она ординаты от-  
личались на  $2k$  равнялись  $\left[\frac{26}{2k}\right] = \left[\frac{13}{k}\right] + 10$ , а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Как-то способы выбрать адъюнса, отмечалась на 7-х различается  $29 - 30 - (7 - 1) = 23$  шт.  
По правилу произведения получаем, что всего таких групп в А, РВ, Р можно выбрать  
 $\sum_{n=1}^{13} \left[ \frac{\binom{13}{2}}{n} \right] (23+n)$

Как-то способы выбрать органическое равенство  $\frac{\binom{27}{2}}{2}$ , а адъюнсу  $7 \cdot 16 - (1+2+\dots+13) =$   
 $= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$

Всего  $\frac{7 \binom{27}{2}}{2}$  способов. При этом каждая группа ТР-ков должна брать в какой-либо паре. Всего их  $13 \cdot 26$ . Причем каждая группа получает 14·13·26 способов. Тогда всего таких групп 6 параллельных

$$\frac{7 \binom{27}{2}}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$$

$$\text{Ответ: } \frac{7 \binom{27}{2}}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

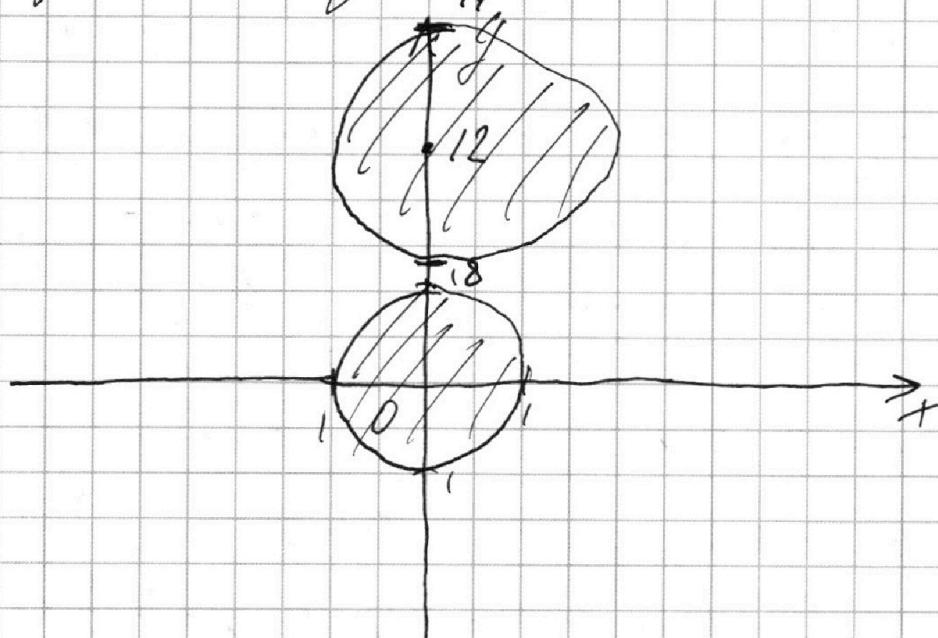
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + g - 86 = 0 \\ (x^2 + g^2 - 1)(x^2 + (g-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Ур - с  $x^2 + g^2 - 1 = 0$  задает окружность с  
центром  $(0; 0)$  и радиусом 1. Ур  $x^2 + (g-12)^2 - 16 = 0$   
задает окружность с центром  $(0; 12)$  и ради-  
усом 4.

Изобразим мн-бо точек, удовлтв. неравенству  
 $(x^2 + g^2 - 1)(x^2 + (g-12)^2 - 16) \leq 0$ .



Получаем:

$$\begin{cases} ax + g - 86 = 0 \\ x^2 + g^2 \leq 1 \\ x^2 + (g-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 9x + 5 - 86 = 0 \Rightarrow g = 86 - 9x \\ x^2 + g^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (86 - 9x)^2 - 1 \leq 0; \\ x^2 + 696^2 - 169x6 + 81x^2 - 1 \leq 0 \\ (a^2 + 1)x^2 - 169x6 + 696^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{0}{g} = 696^2 - \\ - (a^2 + 1)(696^2) \leq 0; \\ 69a^26^2 - 69a^26^2 + a^2 - 696^2 + 1 \leq 0; \\ a^2 + 1 \leq 696^2. \text{ При любом } a \in \mathbb{R} \exists b. a^4 \leq 696^2 \\ (\text{найдем}) b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{69}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 9x + g - 86 = 0 \Rightarrow g = 86 - 9x \\ x^2 + (g - 12)^2 / 16 \leq 0 \\ x^2 + (86 - 9x - 12)^2 / 16 \leq 0 \\ x^2 + 696^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 126 - 1696x + 24ax - \\ - 16 \leq 0; \\ x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 26) + (696^2 + 12^2 - 16 \cdot 126 - \\ - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{0}{g} = 16a^2x^2(9 - 126 + 96^2) - (a^2 + 1) \cdot \\ \cdot (696^2 + 12^2 - 16 \cdot 126 - 16); \\ 9 \cdot 16a^2x^2 - 12 \cdot 16 \cdot 9a^26 + 4 \cdot 16a^26^2 - 64a^26^2 \\ - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^26 + 16a^2 - 696^2 - 12^2 + 16 \cdot 12 \cdot 6 + 16 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 646^2 + 16 \cdot 126 + 16 \leq 0;$$

$$16a^2 \leq 646^2 - 16 \cdot 126 - 16;$$

$$a^2 \leq 46^2 - 126 + 1$$

т.к. решений должно быть ровно 2, то  
решение  $a^2 = 15 - 86 = 0$  - общая касательная  
к данным окружностям, т.е., касательная из  
дискриминантов  $\frac{\partial_1}{4} = a^2 + 1 - 646^2$  и  $\frac{\partial_2}{4} = 16a^2 - 46^2$   
~~- 16 \cdot 126 - 16~~  
~~+ 126 + 1~~ - должно быть равно 0.

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + 1 = 646^2 \\ a^2 = 46^2 + 126 + 1 \end{array} \right.$$

$$606^2 + 126 - 2 = 0;$$

$$306^2 + 66 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{a} = 39$$

$$6_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\left[ \begin{array}{l} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ b = a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{array} \right]$$

Ответ:  $\pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$ ,  
 $\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \text{ abc} : 2^5 7^{11} ; 6c : 2^{17} 7^{18} ; ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad | \begin{array}{l} 9 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array}$$

$$\min(\text{abc}) \quad ; \quad x_2 = \text{ord}_2 a; x_7 = \text{ord}_7 a$$

$$\text{ord}_n a = \left\{ \begin{array}{l} \text{if } a \neq 0 \\ n^{\infty} \end{array} \right. \quad g_2 = \text{ord}_2 b; g_7 = \text{ord}_7 b$$

$$\Leftrightarrow a : n^{\infty} \quad z_2 = \text{ord}_2 c; z_7 = \text{ord}_7 c \quad | \begin{array}{l} 140 - 91 = \\ - 99 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + g_2 \geq 15 \\ x_7 + g_7 \geq 11 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + g_2 \geq 15 \\ g_2 + z_2 \geq 12 \end{array} \Rightarrow 2(x_1 + g_1 + z_1) \geq 55 \right. \quad | \begin{array}{l} 9 \\ 90 \end{array}$$

$$g_2 + z_2 \geq 17 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + 2g_2 \geq x_2 + g_2 + z_2 + \cancel{x_2 + z_2} \quad | \begin{array}{l} 68 \\ 16 - 7 \cdot 20 + 85 = \\ - 91 = 140 \end{array}$$

$$g_2 + z_2 \geq 18 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2 + z_2 \geq 18 \\ x_7 + g_7 \geq 19 \Rightarrow 2(x_7 + g_7 + z_7) \geq 68 \end{array} \right. \quad | \begin{array}{l} 557 \\ 2 \cdot 41 \end{array}$$

$$x_2 + z_2 \geq 23 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + z_2 \geq 23 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{array} \right. \quad | \begin{array}{l} 557 \\ 2 \cdot 41 = 82 \end{array}$$

$$x_7 + z_7 \geq 39 \quad | \begin{array}{l} 557 \\ 2 \cdot 41 = 82 \end{array}$$

$$\Rightarrow \min(\text{abc}) = 2^{28} \cdot 7^{39} = 4746139 \quad | \begin{array}{l} 28 \\ 39 \end{array}$$

---


$$2) \frac{9}{6} - \text{исход} \Leftrightarrow HOO(a; 6) = 1$$

$$\frac{a+6}{a^2 - 7ab + b^2} - \text{максимальн. квадр.} \Rightarrow HOO(a+b, a^2 - 7ab + b^2)$$

$$= m ; | / (a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a; b) = 1 \\ (a^2 - 7ab + b^2; a+b) = m \end{array} \right. \quad | \begin{array}{l} HOO(a; b) = HOO(a-b; b) \\ (a; b) = 1 \text{ если } m = 1 \end{array}$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab \quad | \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 9 \end{array}$$

$$(a+b \cdot a^2 - 7ab + b^2) = ((a+b)^2 - 9ab) = (a+b \cdot -9ab) \quad | \begin{array}{l} a^2 - 7ab + b^2 = 0 \\ a+b = 0 \end{array}$$

$$\text{если } (a+b; -9ab) > 1, \exists p | a+b \quad | \begin{array}{l} a^2 - 7ab + b^2 = 0 \\ a+b = p \end{array} \Rightarrow HOO(a; b) = p$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots}) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q=3 \\ \frac{Q}{2}x_1 = \frac{3+3\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q=3 \\ Q=-3 \end{array} \right.$$

$$\left[ x = \frac{1}{9} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{array} \right] \quad | 003:$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} &> \frac{1}{9} & \sqrt{3}/1/\frac{3}{0,5} \\ -\frac{1}{1,71} &< \frac{1}{3} & = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = X_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{1,71} &> \frac{1}{2} & = \frac{3-6+6}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \\ && = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 = \end{aligned}$$

$$003: \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + 1 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 003: (-003; \frac{3-3}{3}) \\ &= 1 - \frac{3}{4} + 1 = \sqrt{[\frac{3+3}{3}; 100]} \end{aligned}$$

$$5) O(0; 0); P(-13; 26); Q(3; 10); R(16; 0)$$

наш - 60 A(x<sub>i</sub>; g<sub>i</sub>); B(x<sub>i</sub>; g<sub>i</sub>) ∈ Z<sup>2</sup> (также: 1/1,71)

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (g_2 - g_1) = 14$$

$$2x + g = 14$$

$$2/2: g = 2k \quad \left\{ \begin{array}{l} g = 2k \\ x = 7 - k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{array} \right.$$

$$2x + 2k = 14$$

$$x = 7 - k$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 1 &= 1 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 1 &= 1 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \end{aligned}$$



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{Задача } g \rightarrow 26 \text{ см.}$$

$\Rightarrow g \text{ такой же что } \frac{26}{2} - 1 = 12$

$$26 \cdot 17$$

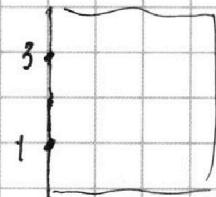
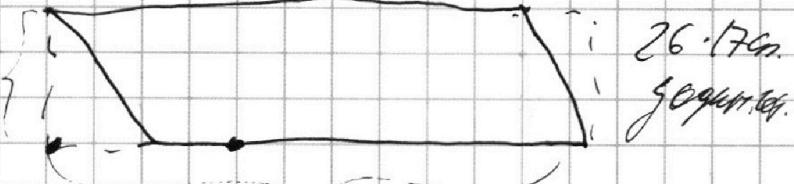
$$26$$

$$26 \cdot 17 \text{ см.}$$

задача

$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

по условию:



$$6) \quad \begin{cases} 9x + g - 86 = 0 \\ (x^2 + g^2 - 1)(x^2 + g - 12) \leq 0 \end{cases}$$

a:  $\exists 6$ : построить 2 реш.

2 МН-601: 12\wedge

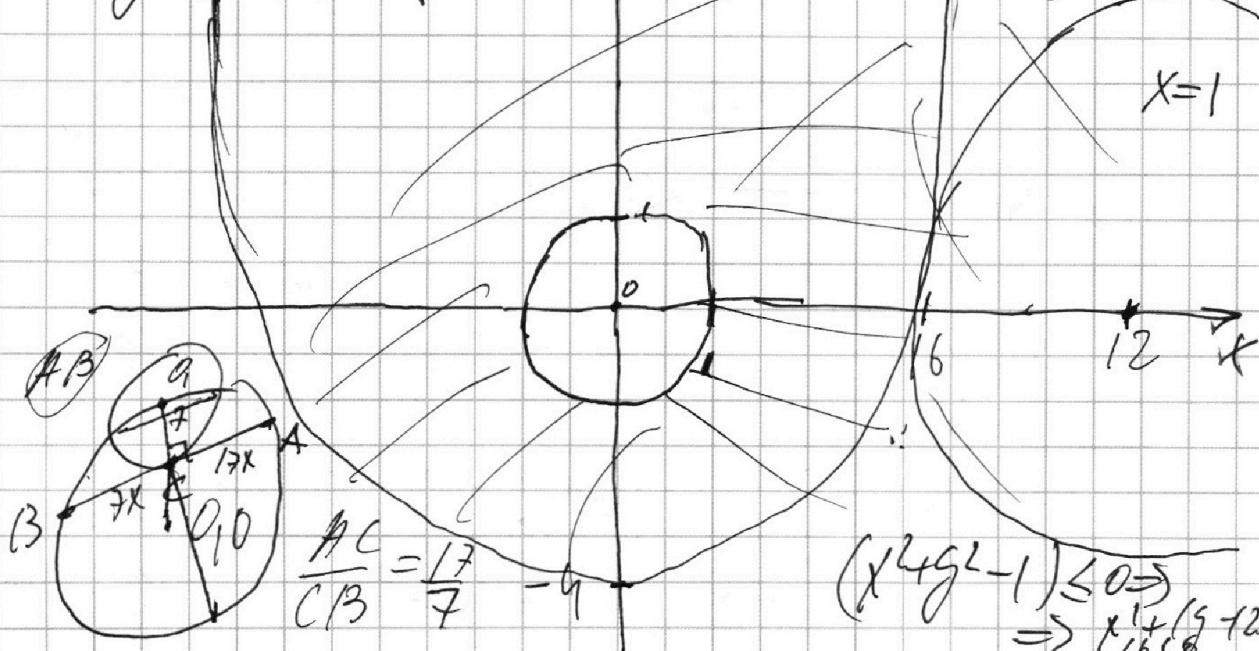
2 уп-с - 2 окр.

$$9x + g - 86 = 0 \quad | \wedge 12$$

$$7g - 2 \cdot 17x$$

$$g = 17x^2$$

$$x=1$$

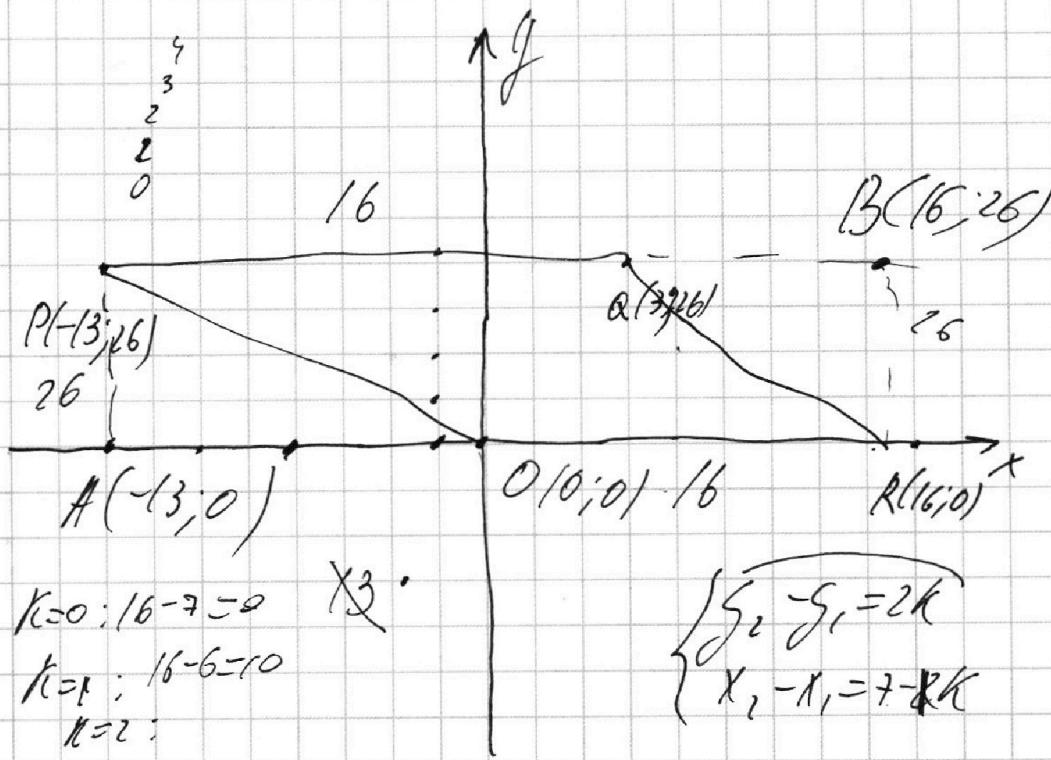




- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k=0; 16-7=9 \quad x_2 = 9$$

$$k=1; 16-6=10$$

$$d=1 \quad k=2:$$

$$g_1 = 9 \quad g_2 - g_1 = 2k, \quad 0 \leq g_i \leq 26 \Rightarrow g_2 \equiv g_1 \pmod{1}$$

$$\text{Был APBR: } 25 \cdot 13 + 15 \cdot 13 = 1415 - \text{байдрот}$$

$(g_2, g_1)$ . Пусть мы выбрали пару  $(g_2, g_1)$ :

$$g_2 - g_1 = 2k; \quad \text{Найдем под-бо } (x_2, y_2); \quad x_2 - x_1 = 7-k$$

$$|x_2 - x_1| = 7 - \frac{g_2 - g_1}{2} \leq 29$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_2 - x_1| = |7 - k| \leq 29 \\ |g_2 - g_1| = |2k| \leq 26 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |7 - k| \leq 29 \\ |k| \leq 13 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 - 6 \\ k \leq 0 - 6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 - 6 \\ k \leq 0 - 6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 7 - k \\ g_2 - g_1 = 2k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 16 - 7 = g_2 - g_1 = k = 0 - 16 + g_1 \\ 7 - 13 = g_2 - g_1 = k = 1 - 13 + g_1 \end{array} \quad \sum_{i=1}^n |6 - 7 - k| = |a_i - 22|$$

$$g_{1+} = \frac{g_1 + g_2}{2} n =$$

$$\begin{array}{l} d = -(12 - 14) \\ g_{1+} = \frac{g_1 + g_2}{2} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

$$\begin{aligned}
 & (a^4+1)x^4 + 8ax(3-26) + (646^4 \cdot 112 - 28 \cdot 116) \leq 0 \quad \frac{-16}{144} \\
 & \text{Divide by } 16: \frac{1}{16}(a^4+1)x^4 + 8ax(3-26) - (a^4+1)(646^4 \cdot 112 - 28 \cdot 116) = 0 \\
 & = 16a^4x^4 - 16 \cdot 12 \cdot a^4x^2 + 16 \cdot 9a^4x^2 - 16 \cdot 646^4 \cdot 112 - \\
 & - 12^2 a^4 x^4 + 16 \cdot 12 a^4 x^2 + 646^2 - 12^2 - 28 \cdot 126 = 0 \\
 & = 16 \cdot 9a^4 - 12^2 a^4 - 646^2 - 12^2 - 28 \cdot 126 \leq 0 \\
 & (16 \cdot 9 - 12^2)a^4 - 646^2 - 12^2 - 16 \cdot 126 \leq 0 \\
 & 646^2 + 16 \cdot 126 + 12^2 \geq (16 \cdot 9 - 12^2)a^4 \\
 & \exists a \Rightarrow (16 \cdot 9 - 12^2)a^4 \quad \left| \begin{array}{l} a: 76 \\ 16a^2 \leq 646^2 \\ 16a^2 \leq 96^2 \\ a^2 \leq \min \end{array} \right. \\
 & ax + g - 86 = 0 \quad g = 86 - ax \\
 & (x^4 + g - 12)^2 - 16 \leq 0 \\
 & x^4 + (86 - ax - 12)^2 - 16 = x^4 + 646^2 + a^2 x^2 + 12^2 - \\
 & = 166ax - 16 \cdot 126 + 29ax - 16 = \\
 & = (a^4+1)x^4 + 8ax(3-26) + (12^2 + 646^2 \cdot 112 - 16) \leq 0 \\
 & \text{Divide by } 16: \frac{1}{16}(a^4+1)x^4 + 8ax(3-26) - (a^4+1)(12^2 + 646^2 \cdot 112 - 16) = 0 \\
 & = 36a^4 - 4 \cdot 12 a^4 x^2 + 166^2 a^2 - 12^2 a^4 + 646^2 a^4 + \\
 & + 16 \cdot 12 a^4 x^2 + 16 a^2 = 16 \cdot 9 a^4 - 16 \cdot 12 a^4 x^2 + 16 \cdot 646^2 - \\
 & - 12^2 a^4 - 646^2 x^2 + 16 \cdot 126 a^2 + 16 a^2 + 12^2 - 646^2 \\
 & + 16 \cdot 126 + 16 = (16 \cdot 9 - 12^2)a^4 + 16 a^2 - 646^2 \leq 0 \\
 & (16 \cdot 9 - 12^2)a^4 \leq 646^2
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$(a^2+1)x^2 + 2x(a^2+1) - 16 \leq 0$~~  38

$\Leftrightarrow 0 \leq 0$

$\frac{\partial}{\partial a} = a^2(1-66)^2 - (a^2+1)(646^2 - 166^2 - 15) = a^2 + 2^2 - 16^2$

$= a^2(1-166+696) - (a^2+1)(646^2 - 166^2 - 15) = a^2 - 86$

$= a^2(-16a^2 + 64a^2 - 64a^2 + 16a^2 + 15a^2 + 646^2 - 166^2 - 15)$

$= 16a^2(696^2 + 166^2 + 15) \quad a: \exists 6$

$a: \exists 6 : 16a^2(696^2 + 166^2 + 15) \geq 0 \quad a x + 9 - 86 = 0 \quad 16a^2 \geq 0$

$646^2 - 166^2 \quad a x + 9 - 86 = 0 \quad a x = 86 - 9 \quad a = 0 \quad \text{neg.}$

$b_0 = \frac{16}{2 \cdot 6} = \frac{8}{3} \quad x^2 + (86 - ax)^2 \geq 0 \quad 646^2 - 166^2$

$x^2 + 696^2 - 1696x + a^2 x^2 \geq 0 \quad x = 15$

$(a^2+1)x^2 + 2x(a^2+1) - 16 \leq 0 \quad a^2 > -17$

$\frac{\partial}{\partial a} = 64a^2 - (a^2+1)(646^2) = 64a^2 - 64a^2 - 16a^2 + 1 \geq 0$

$+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0$

$a^2 > 646^2 - 1 \quad a^2 - 646^2 + 1 = 0 \quad x^2 + (86 - ax)^2 \geq 0$

$ax \quad y = 86 - ax \quad x^2 + (86 - ax)^2 \geq 0$

$-16a^2x + 2ax - 16 \leq 0 \quad x^2 + (86 - ax)^2 - 16 \leq 0$

$x^2 + 646^2 + a^2 x^2 + 1 - 16 \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{7}$$

$$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{7}$$

$$6x^2 - 3x + 3 = 0; D = 9$$

$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad D = 9 \quad a_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$2a + 6x^2 - 3x + 3 > 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{8} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1. \quad [a: 36]$$

$$46^2 - 12 \cdot 4x - 8 \\ = 646^2$$

$$606^2 + (28x - 0) - 8 \\ - 646^2 + 12 \cdot 2x = 0$$

$$46^2 - 12 \cdot 2x = 646^2$$

$$9x + 86 \\ - \text{одн. } x^4 + 9x^2 - 170$$

$$\text{нашл.} \quad \begin{cases} 9x + 86 = 0 \\ x^4 + 9x^2 - 170 = 0 \end{cases}$$

$$\text{окр.} \quad \begin{cases} 9x + 86 = 0 \\ x^4 + 9x^2 - 170 = 0 \end{cases}$$

$$9x + 86 = 0 \Rightarrow x = -\frac{86}{9}$$

$$(86 - 9x)^4 + x^4 - 1 =$$

$$= 9x^4 + 16ax^6 + 646^2 + x^2 - 1 = (a^4/x^2 -$$

$$- 16ax^6 + 646^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^4x^2 - (a^4/x^2) / 646^2 = 646^2 - 646^2 = 646^2$$

$$+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0, \text{ т.к. } \exists b = 0.$$

$$x^4(86 - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 646^2 + a^4x^4 - 16$$

$$- 2 \cdot 646^2 - 16ax^2 + 29ax = (a^4/16x^2 + 12) + 8ax(3 - 2a)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$29.26^\circ \quad \text{angle } BMS = \frac{1}{X}$$

$$\frac{29.26}{72.16 \cdot (13.26+1)} \quad | \quad k=k_1: 29.26 = 23.15$$

$$k=1.6 \quad | \quad \left[ \frac{26}{2k_1} \right] - g.$$

$$O_2 T = 13 \quad O_1, 1, 2, \dots, 23 \quad | \quad k=1.6$$

$$O_2 S + ST = 13 \quad k=k_1: 10 - k_1 \text{ cm.} - x$$

$$0, 1, \dots, 29-k_1 \quad | \quad k=0$$

$$S + ST \cdot T \theta_0 = O_2 C \cdot O_1 A \quad | \quad -29 + 22k$$

$$(7-k)(13-2)z = 7(7+17x^c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{26}{2n} \right] (10-k) \quad 6 \square$$

$$\sqrt{x_2^2} = 29k \quad | \quad (j_1, j_2): (26 \cdot 12) \quad 7, 8, 9, 10,$$

$$= 7 \quad | \quad 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

$$x^2 \approx 99 \quad | \quad Q(13; 16) \quad 29 \cdot 25 \quad Q(13; 18)$$

$$5) \quad S_2 - S_1 = 2k \quad | \quad 26 \quad 26 \quad 16 \quad 16$$

$$x^2 = 99 - k \quad | \quad X_2 - X_1 = 7 - k \quad | \quad R(16; 0)$$

$$7 \cdot 14 - 7 \cdot 13 = + \quad | \quad O(0; 0)$$

$$7 \cdot 9 = 63 \quad | \quad d = -1 \quad | \quad 29 \quad | \quad \sum \left[ \frac{29}{2n} \right] \quad C_{26}$$

$$a_n = \frac{29 \cdot 26}{6 \cdot d} \cdot 13 - 66 \text{ cdf. } g \quad 6 \square$$

$$X_2 - X_1 = 6 \quad | \quad 13 \cdot 26 - 13 \cdot 26 \quad | \quad \frac{1+3}{2} \cdot 13 - 29 \cdot 13 \quad | \quad \frac{C_{26}}{2}$$

$$7 \cdot 14 - \cancel{(7+10+11+12+13)} \quad | \quad 29 \cdot 26 \cdot 13 - 13 \cdot 26 = 13(213 \cdot 26 / 29 + 3) = 13 \cdot 26 \cdot 16 -$$

$$- 66 \text{ cdf. } g \quad 6 \square$$

$$K=0: g_i = g \Rightarrow \Rightarrow 16 - 7 = 97$$

Ogr. mat:  $X_2 - X_1 = k$

$K=1: g \neq g_1 = 26 - 13$