



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения: $\text{ord}_n a = k \Leftrightarrow \begin{cases} a : n^k \\ a \not: n^{k+1} \end{cases}$
Пусть $x_2 = \text{ord}_2 a$; $x_7 = \text{ord}_7 a$; $y_2 = \text{ord}_2 b$;
 $y_7 = \text{ord}_7 b$; $z_2 = \text{ord}_2 c$; $z_7 = \text{ord}_7 c$.

Из условий получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \quad (\text{т.к. } x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \quad \geq 34$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 + z_7 \geq 34 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $\text{НОД}(a; b) = (a; b)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Leftrightarrow (a; b) = 1$ (1)

Если m - наибольшее число, на которое можно со-

кратить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$.

Т.к. $(a; b) \neq (x; y) = (x-y; y)$, то $(a+b; a^2-7ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-9ab) = (a+b; -9ab)$.

Предположим, что существует простое p : $\left. \begin{array}{l} p|ab \\ p|(a+b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p|a \\ p|b \end{array} \right. \Rightarrow (a; b) \geq p$, что про-

тиворечит (1), поэтому $(a+b; -9ab) \leq 9$ и равенство достигается, если выбрать значения натуральных числа a и b таких, что $a+b \leq 9$ (на-
пример $a=4; b=5$).

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

003:

Далее мы обе части ур-я на

$$\left\{ \begin{aligned} 3x^2-6x+2 > 0 \\ 3x^2+3x+1 > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 0.$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

$$3x^2+3x+1 > 0$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 > 0$$

найдем корни ф.:

$$\frac{D}{4} = 3$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$(1-9x) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$$

$$x \in [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (проверяем 003.)}$$

$$3x^2+3x+1 > 0.$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

Найдём вершины параболы $x_0 = -$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$D = 9-12 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2+3x+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} \right)^2 = 1$$

$$6x^2-3x+3+a=1, \text{ где } a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$$

Найдём минимум $f(x) = 6x^2-3x+3$.

$$x_0 = \frac{1}{4}; y_0 = \min f(x) = f(x_0) = \frac{6}{16} - \frac{3}{4} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1.$$

т.е.

$6x^2-3x+3+a > 1$, поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + g_2 - g_1 = 14;$$

$$\text{Замени } \begin{cases} u = x_2 - x_1 \\ v = g_2 - g_1 \end{cases}$$

$$2u + v = 14; \begin{cases} 2u : 2 \\ 2u + v : 2 \end{cases} \Rightarrow v : 2 \Rightarrow v = 2k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ 2u + 2k = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2k \\ u = 7 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 - g_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 13 \quad (1)$$

Востроим параллелограмм $OPQR$ по правилу
уравновешивания A, B, R ; $A_1(-13; 0)$, $B_1(16; 26)$.

Найдем в нем пар-во точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,
удовлетворяющих системе (1) и вытекающей
из него пар-во пар точек, в которых хотя бы 1
содержится в 1 из тр-ков $\triangle PA_1O$ или $\triangle RB_1Q$.
Каждое из них выбрать отдельно точки
в A_1, B_1, R так, чтобы они их ординаты от-
личались на $2k$ равнялась $\begin{bmatrix} 26 \\ 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ k \end{bmatrix} + k$, а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Каждый способ выбрать абсциссы, отстоя-
ющую на $7-k$ равняется $29-30-(7-k,1)=23k$.~~

~~По проблеме произведения получаем, что всего та-
ким образом в A, B, R можно выбрать~~

$$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n} \right] (23+n)$$

Каждый способ выбрать ординаты рав-
няется $\frac{C_{27}^2}{2}$, а абсциссу $7 \cdot 14 - (1+2+\dots+13) =$

$$= 7 \cdot 14 - \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 7$$

Всего $\frac{7 C_{27}^2}{2}$ способов. При этом каждая
точка TP -ков будет брать в какой-либо
паре, всего их $13 \cdot 26$, причем каждая точка
попадет в парах в 28 парам, всего получаем $14 \cdot 13 \cdot 26$
способов. Тогда всего таких точек в парам
парам $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

Ответ: $\frac{7 C_{27}^2}{2} - 14 \cdot 13 \cdot 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

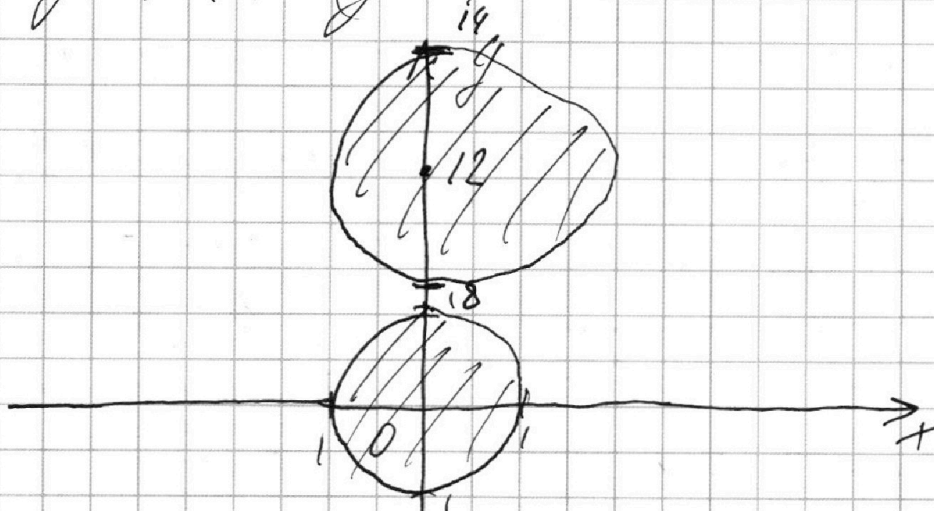
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Упр-е $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Упр-е $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ задает окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4.

Изобразим левую часть, удовлетв. неравенству $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$:



Получаем:

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax)^2 - 1 \leq 0; \\ x^2 + 64b^2 - 16axb + a^2x^2 - 1 \leq 0 \\ (a^2 + 1)x^2 - 16axb + 64b^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 64a^2b^2 - (a^2 + 1)(64b^2 - 1) \leq 0; \end{cases}$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 + a^2 - 64b^2 + 1 \leq 0;$$

$$a^2 + 1 \leq 64b^2. \text{ Для любого } a \in \mathbb{R} \exists b. a^2 + 1 \leq 64b^2 \\ (\text{например } b = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{64}})$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Rightarrow y = 8b - ax \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16abx + 24ax - 16 \leq 0; \\ x^2(a^2 + 1) + 8ax(3 - 2b) + (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 16a^2(9 - 12b + 4b^2) - (a^2 + 1) \cdot (64b^2 + 12^2 - 16 \cdot 12b - 16) \leq 0; \\ 9 \cdot 16a^2 - 12 \cdot 16a^2b + 4 \cdot 16a^2b^2 - 64a^2b^2 - 12^2a^2 + 16 \cdot 12a^2b + 16a^2 - 64b^2 - 12^2 + 16 \cdot 12b - 16 \leq 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= (9 \cdot 16 - 12^2 + 16) a^2 - 64b^2 + 16 \cdot 12b + 1650;$$

$$16a^2 \leq 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16;$$

$$a^2 \leq 4b^2 - 12b + 1$$

Т.к. решение должно быть ровно 2, то
прямая $ax + 15 - 8b = 0$ — общая касательная

к данным окружностям, т.е., каждый из
дискриминантов $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$ и $\frac{D_2}{4} = 16a^2 - 64b^2 - 16 \cdot 12b - 16$
 ~~$+ 12b$~~ должен быть равен 0.

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 1 \end{cases}$$

$$60b^2 + 12b - 2 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0;$$

$$30b^2 + 6b - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 39$$

$$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ b = a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ b = a = \pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{cases}$$

Ответ: $\pm \sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$;
 $\pm \sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}; bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ $\left\{ \begin{array}{l} 9; 5 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right.$

$\min(abc); x_2 = \text{ord}_2 a; x_7 = \text{ord}_7 a$

$\text{ord}_n a = \frac{a}{n} \Rightarrow \begin{cases} a: n^x \\ a: n^{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \text{ord}_2 b; y_7 = \text{ord}_7 b \\ z_2 = \text{ord}_2 c; z_7 = \text{ord}_7 c \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ x_7 + y_7 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 15 \\ y_2 + z_2 \geq 17 \\ x_2 + z_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 55$

$\begin{cases} y_7 + z_7 \geq 18 \\ x_7 + y_7 \geq 39 \\ x_7 + z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geq 66$

$\begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 \geq \lceil \frac{55}{2} \rceil = 28 \\ x_7 + y_7 + z_7 \geq \lceil \frac{66}{2} \rceil = 33 \end{cases}$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39} = 4746139$

2) $\frac{a}{b}$ -нормал $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ - нормал $\Leftrightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$= m; \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$\text{НОД}(a, b) = 1$

$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b-a, b)$

$\text{НОД}(a, b) = 1 \mid \text{Если } m=9$

$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$(a+b \mid a^2 - 7ab + b^2) = (a+b \mid (a+b)^2 - 9ab) = (a+b \mid -9ab)$

Если $(a+b \mid -9ab) \Rightarrow \exists p \mid a+b \mid 9ab \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{\dots})$$

$$(1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} > \frac{1}{9}$$

$$\text{Отв: } \frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{6}{9} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ООЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 > 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3 - 6 + 4}{4} = \frac{1}{4} \quad x_0 = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{3}{4} + 1 > 1$$

$$\text{ООЗ: } (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}]$$

$$\cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5) O(0; 0); P(-13; 26); Q(3; 10);$$

$$R(16; 0)$$

код-во $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \in \mathbb{C}^2$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$2x + y = 14$$

$$\forall k. y = 2k \quad \begin{cases} y = 2k \\ x = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x + 2k = 14 \\ x = 7 - k \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3 - 6 + 4}{4} = \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{6}{9} + \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{8}{9}$$

$$1 +$$

$$y_2 - y_1 = 2k$$

$$x_2 - x_1 = 7 - k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

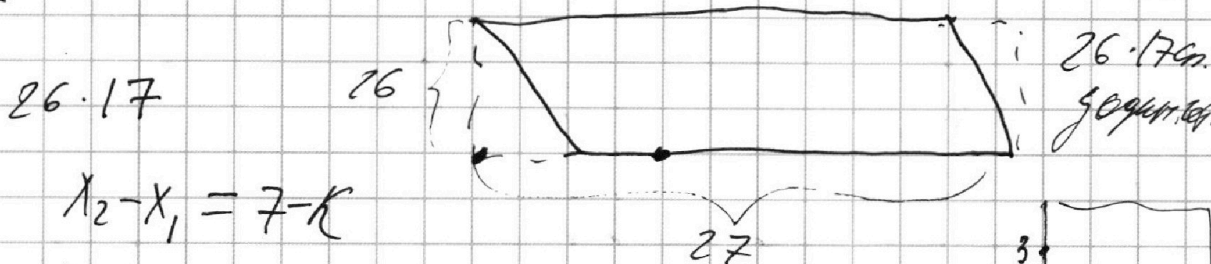
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{Значение } y \rightarrow 26 \text{ см.}$$

y такой же мер. $\rightarrow \frac{26}{2} - 1 = 12$



Но невыполнимо:

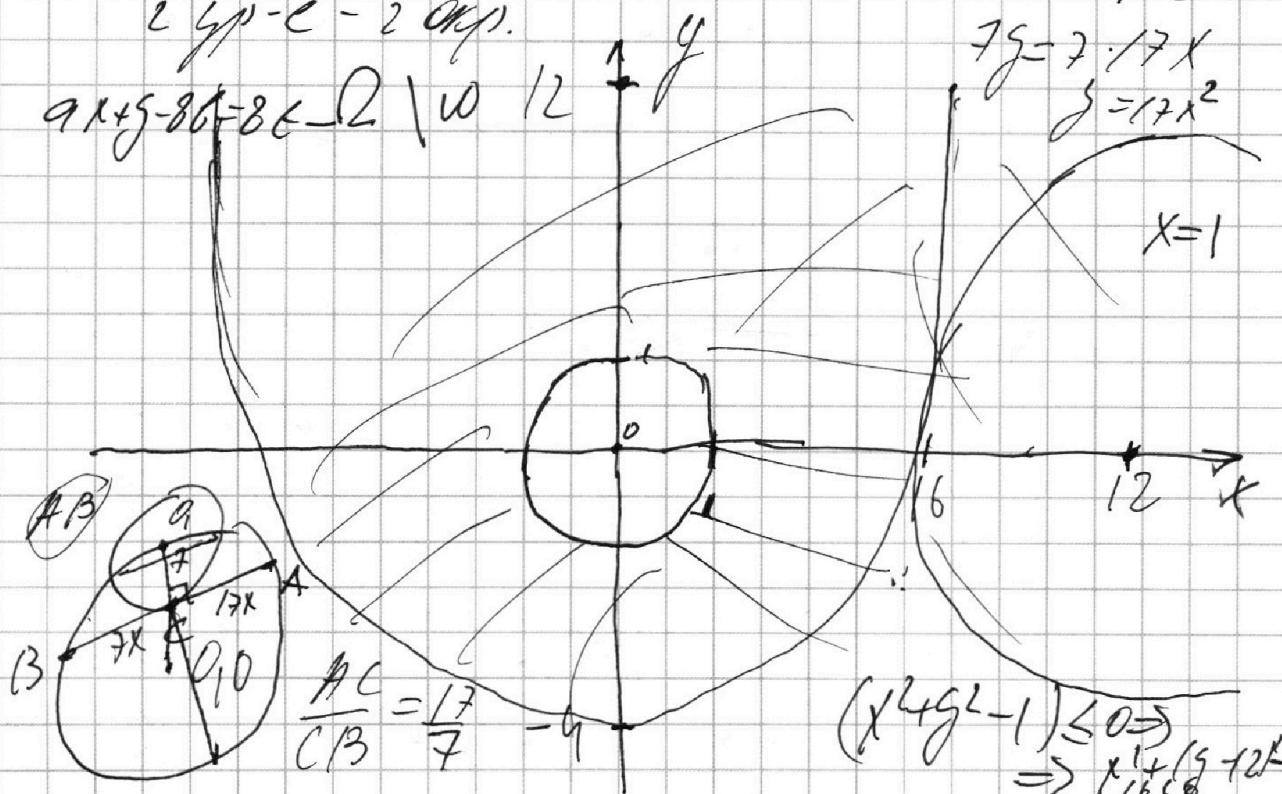
$$6) \begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$a: \exists 6$: ровно 2 реш.
2 вып-е - 2 окр.

Ω MM-б.т.; $\Omega \setminus \omega$

$$\begin{cases} 7y = 7 \cdot 17x \\ y = 17x^2 \end{cases}$$

$x=1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (64b^2+12^2-20\cdot 12b) \leq 0 \quad \frac{160}{144} \quad \frac{16}{16}$$

$$\Delta_{ax} \leq 0 = 16a^2(3-2b)^2 - (a^2+1)(64b^2+12^2-20\cdot 12b) =$$

$$= 16\cancel{9}a^2 - 16\cancel{12}a^2b + 16\cdot 4a^2b^2 - 16\cancel{4}a^2b^2 - 12^2a^2 + 16\cdot 12a^2b - 64b^2 - 12^2 - 20\cdot 12b =$$

$$= 16\cdot 9a^2 - 12^2a^2 - 64b^2 - 12^2 - 20\cdot 12b \leq 0$$

$$(16\cdot 9 - 12^2)a^2 - 64b^2 - 12^2 - 16\cdot 12b \leq 0$$

$$64b^2 + 16\cdot 12b + 12^2 \geq (16\cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$\exists a \Rightarrow (16\cdot 9 - 12^2)a^2$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$y = 8b - ax$$

$$(x^2 + y - 12)^2 - 16 \leq 0$$

$$a: \exists b$$

$$16a^2 \leq 64b^2$$

$$1 + a^2 \leq 4b^2 \quad a \leq \min$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 64b^2 + a^2x^2 + 12^2 -$$

$$= 166ax - 16\cdot 12b + 24ax - 16 =$$

$$= (a^2+1)x^2 + 8ax(3-2b) + (12^2 + 64b^2 - 16\cdot 12b - 16) \leq 0$$

$$\Delta_{ax} \leq 0 = 16a^2(3-2b)^2 - (a^2+1)(12^2 + 64b^2 - 16\cdot 12b - 16) =$$

$$= 36a^2 - 4\cdot 12a^2b + 16b^2a^2 - 12^2a^2 - 64b^2a^2 +$$

$$+ 16\cdot 12a^2b + 16a^2 = 16\cdot 9a^2 - 16\cdot 12a^2b + 16\cdot 4a^2b^2 -$$

$$- 12^2a^2 - 64a^2b^2 + 16\cdot 12ba^2 + 16a^2 - 12^2 - 64b^2 + 16$$

$$+ 16\cdot 12b + 16 = (16\cdot 9 - 12^2)a^2 + 16a^2 - 64b^2 \leq 0$$

$$(16\cdot 9 - 12^2)a^2 \leq 64b^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a^2+1)x^2 + 2x(988) + (646^2 - 166 \cdot 15) \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq 0$
 $\frac{0}{4} = a^2(188)^2 - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 + 12^2 - 16^2 = 0$
 $= a^2(1 - 166 + 646^2) - (a^2+1)(646^2 - 166 \cdot 15) = x^2 = 48$
 $x = 4\sqrt{3} \leq 646^2 - 166 \cdot 15$
 $\leq x \cdot 16a^2$
 $a: \exists 6$
 $= 6a^2 \cdot 646^2 + 166 + 15 \leq 0$
 $a: \exists 6 \cdot 16a^2 \leq 646^2 - 166 \cdot 15 = 16ax$
 $646^2 - 166ax + 9 - 88 = 0 \Rightarrow y = 86 - ax$
 $x^2 + 9^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + (86 - ax)^2 \geq 1$
 $60 = 2 \cdot 646 \cdot 8$
 $x^2 + 646^2 - 1696ax + a^2x^2 \geq 1$
 $16a^2 \geq 1$
 $(a^2+1)x^2 - 1696ax + 646^2 - 1 \geq 0$
 $\frac{0}{4} = 64a^2b^2 - (a^2+1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 64a^2b^2 +$
 $+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 1 \geq 0$
 $a^2 \geq 646^2 - 1$
 $ax \quad y = 86 - ax$
 $(245 - 12)^2 - 16 \leq 0$
 $-1696ax + a^2x^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + (86 - ax - 1)^2 - 16 \leq 0$
 $x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 1 = 166$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2 + \sqrt{\dots}$$

$$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots}$$

$$6x^2 - 3x + 3 = 0; \Delta = 9 - 160 = -149 < 0$$

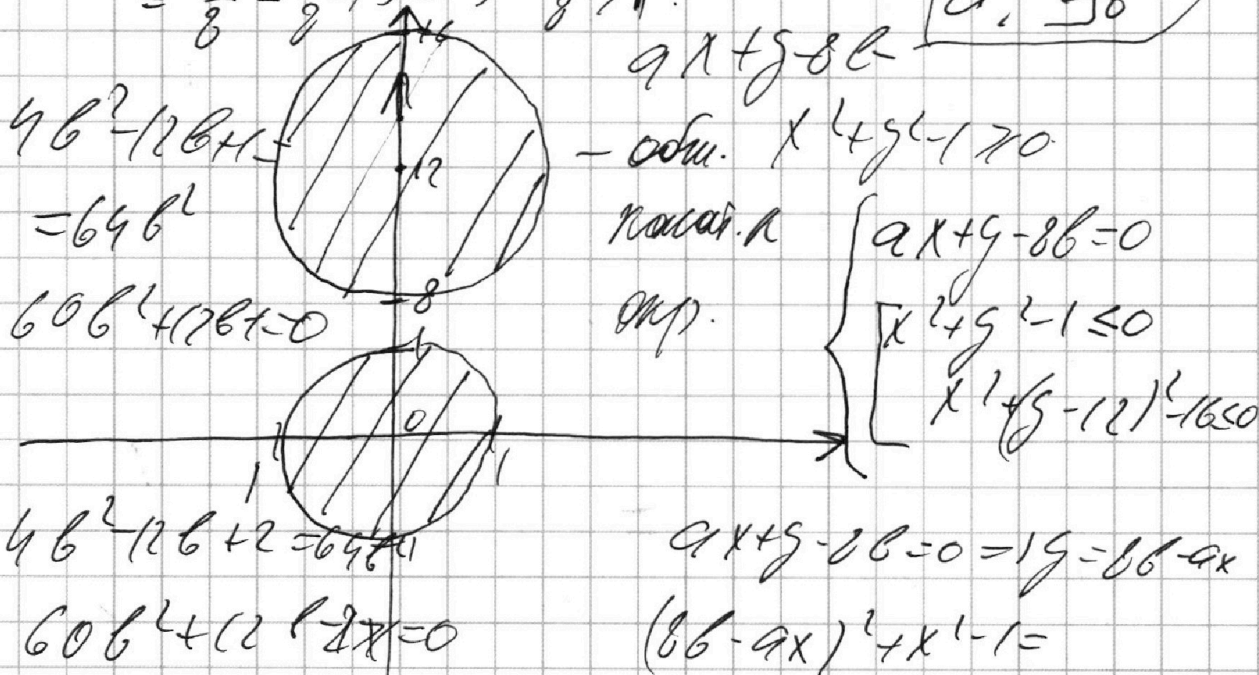
$$x_0 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$D = 39 \quad b_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{2}$$

$$2a + 6x^2 - 3x + 3 > 6 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + 3 = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + 3 =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{6}{16} + 3 = 3 - \frac{3}{8} > 1$$

$a \in [36]$



$$46^2 - 126x + 2 = 646^2$$

$$606^2 + 126x = 0$$

$$46^2 - 126 + 2 = 646^2$$

$$606^2 + 126x = 0$$

$$= ax^2 + 16ax + 646^2 + x^2 - 1 = (a^2 + 1)x^2 - 16ax + 646^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$$

$$64a^2b^2 - (a^2 + 1)(646^2 - 1) = 64a^2b^2 - 646^2 + 1$$

$$+ a^2 - 646^2 + 1 = a^2 - 646^2 + 170, \forall a \in \mathbb{R} \exists b = 0$$

$$x^2 + (86 - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + 646^2 + a^2x^2 + 12^2 - 2 \cdot 86 \cdot 12 - 1696x + 24ax = \frac{(a^2 + 1)x^2}{646^2 + 12^2 - 1696} + 8ax(3 - 2a)$$

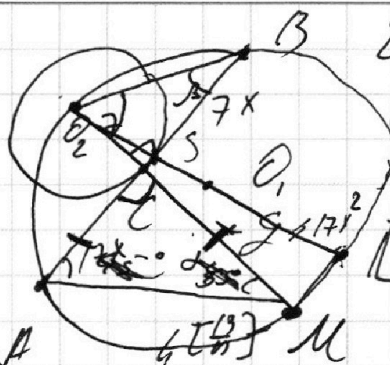
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



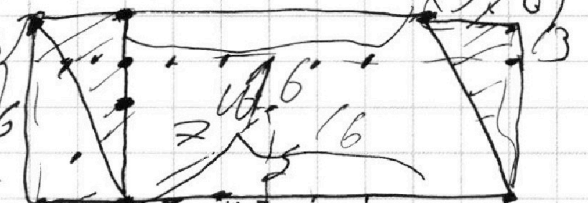
$29 \cdot 26 \cdot \text{Eqd} = \frac{1}{x}$
 $29 \cdot 26 \cdot (1320 + 1)$
 $k=1:6$
 $O_1 T = 13, O_1 i, 2, \dots, 23$
 $O_2 S + ST = 13, k=1:10, 11, \dots, 29, k_1$
 $S_2 ST \cdot T O_2 = O_2 C \cdot O_1 A$
 $k=0: \dots$

$\sum_{n=0} \left[\frac{26}{2n} \right] (10-k) = 6 \square$

$(7-k)(13-2)z = 7(7+17x^2)$

$\sqrt{x^2 + 5^2} = 29k$
 $= 7$
 $x^2 + 25 = 99$
 $x = 8$

$(y_i, z_i): (26 \cdot 12) \dots$
 $P(13; 16), 13 \times 26$
 $Q(3; 7), 13$



5) $y_2 - y_1 = 2k$
 $x_2 - x_1 = 7 - k$
 $7 \cdot 14 - 7 \cdot 13 = 7$

$a_n = 29 \cdot 26 \cdot 13 - \text{выбр. } y_6 \square$
 $d = -1$
 $x_2 - x_1 = 6$
 $13 \cdot 26 \cdot 13 \cdot 26 = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29+3)) = 13 \cdot 26 \cdot 16$
 $- \text{выбр } y_{16} \square$

