МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначение: $ord_n a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \vdots n^{\alpha} \\ a \not\vdots n^{\alpha+1} \end{cases}$

Пусть $x_2 = ord_2 a$; $x_7 = ord_7 a$; $y_2 = ord_2 b$; $y_7 = ord_7 b$; $z_2 = ord_2 c$; $z_7 = ord_7 c$.

Из условия получаем 2 системы:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geqslant 15 \\ y_2 + z_2 \geqslant 17 \\ x_2 + z_2 \geqslant 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2 + y_2 + z_2) \geqslant 55 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geqslant 28$$

(т.к. $x_2 + y_2 + z_2 \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} x_7 + y_7 \geqslant 11 \\ y_7 + z_7 \geqslant 18 \\ x_7 + z_7 \geqslant 39 \end{cases} \Rightarrow 2(x_7 + y_7 + z_7) \geqslant 68 \Rightarrow x_7 + y_7 + z_7 \geqslant 34$$

$$\begin{cases} x_7 + y_7 + z_7 \geqslant 34 \\ x_2 + y_2 + z_2 \geqslant 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geqslant 2^{28} \cdot 7^{34}.$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим НОД$(a;b)=(a;b)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow (a;b)=1$ (1)

Если m – наибольшее число, на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$, то $(a+b;\ a^2-7ab+b^2)=$
$=m$.

Т.к. ~~$(a;b)$~~ $(x;y)=(x-y;y)$, то
$(a+b;\ a^2-7ab+b^2)=(a+b;\ (a+b)^2-9ab)=$
$=(a+b;\ -9ab)$.

Предположим, что существует простое p: $\begin{cases} p \mid ab \\ p \mid (a+b) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \mid a \\ p \mid b \end{array}\right. \\ p \mid (a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \mid a \\ p \mid b \end{cases} \Rightarrow (a;b) \geq p$, что противоречит (1), поэтому $(a+b;-9ab)\leq 9$ и равенство достигается, если выбрать 2 взаимнопростых числа a и b таких, что $a+b \,\vdots\, 9$ (например $a=4$; $b=5$).

Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

ООЗ:

$\begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$

Домножим обе части ур-я на $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}>0$:

$3x^2-6x+2-3x^2-3x-1=(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})$

$(1-9x)=(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})$

$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \text{ (удовлетв. ООЗ.)} \\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \quad (2) \end{array}\right.$

$3x^2-6x+2\geq 0$

найдем нули ф.:

$\frac{D}{4}=3$

$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$,

$x\in(-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}]\cup$
$\cup[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty)$

$3x^2+3x+1\geq 0.$

Найдем вершину параболы $x_0=-$

$D=9-12<0\Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2+3x+1\geq 0 \ \forall x\in R$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$\Downarrow$

$(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})^2=1$

$6x^2-3x+3+a=1$, где $a=2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1}$

Найдем минимум $f(x)=6x^2-3x+3$.

$x_0=\frac{1}{4}$; $y_0=\min f(x)=f(x_0)=\frac{6}{16}-\frac{3}{4}+3=3-\frac{3}{8}>$
$>1.$ $\Downarrow$

$6x^2-3x+3+a>1$, поэтому ур-е (2) не имеет решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14;$

Замена $\begin{cases}u=x_2-x_1\\ v=y_2-y_1\end{cases}$

$2u+v=14;\ \begin{cases}2u\,\vdots\,2\\ 2u+v\,\vdots\,2\end{cases}\Rightarrow v\,\vdots\,2\Rightarrow v=2k;\ k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}v=2k\\ 2u+2k=14;\end{cases}$

$\begin{cases}v=2k\\ u=7-k\end{cases}$

$\begin{cases}y_2-y_1=2k\\ x_2-x_1=7-k\end{cases},\ k\in\mathbb{Z},\ k\le 13 \qquad (1)$

Достроим параллелограмм $OPQR$ до прямоугольника A_1PB_1R; $A_1(-13;0)$, $B_1(16;26)$.

Найдем в нем кол-во точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, удовлетворяющих системе (1) и вычтем из него кол-во пар точек, в которых хотя бы 1 содержится в 1 из тр-ков $\triangle PA_1O$ или $\triangle RB_1Q$.

Кол-во способов выбрать ~~абсциссу~~ точки в A_1PB_1R так, ~~чтобы~~ ~~они~~ их ординаты отличались на $2k$ равняется $\left[\frac{26}{2k}\right]=\left[\frac{13}{k}\right]$, ~~но~~, а

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Кол-во способов выбрать абсциссы, отличающиеся на 7-k равняется~~ $\cancel{\cancel{29}\ 30-(7-k_1)=23+k_1}$. ~~По правилу произведения получаем, что всего таких точек в Δ, ПВ, Л можно выбрать~~

$$\cancel{\sum_{n=1}^{13}\left[\frac{13}{n}\right](23+n)}$$

Кол-во способов выбрать ординаты равняется $\frac{C_{27}^2}{2}$, а абсциссу $7\cdot 14-(1+2+\ldots+13)=$

$$=7\cdot 14-\frac{1+13}{2}\cdot 13=7$$

Всего $\frac{7C_{27}^2}{2}$ способов. При этом каждая точка пр-ков была взята в какой-либо паре. Всего их $13\cdot 26$, причем каждая точка поучаствовала в 28 парах. Итого получаем $14\cdot 13\cdot 26$ способов. Тогда всех таких точек в параллелограмме $\frac{7C_{27}^2}{2}-14\cdot 13\cdot 26$

Ответ: $\frac{7C_{27}^2}{2}-14\cdot 13\cdot 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

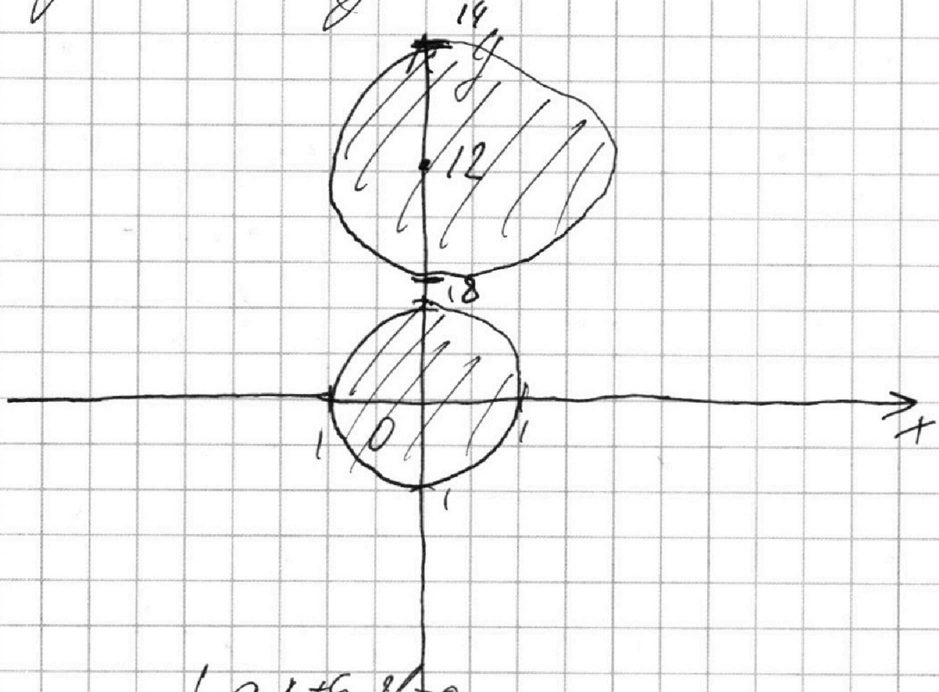
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Ур-е $x^2+y^2-1=0$ задает окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 1. Ур-е $x^2+(y-12)^2-16=0$ задает окружность с центром $(0;12)$ и радиусом 4.

Изобразим мн-во точек, удовлетв. неравенству $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$.



Получаем: $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{array}\right. \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax \\ x^2+y^2-1\le 0 \end{cases}$$

$x^2+(8b-ax)^2-1\le 0;$

$x^2+64b^2-16axb+a^2x^2\cancel{x}-1\le 0$

$(a^2+1)x^2-16axb+(64b^2-1)\le 0 \Rightarrow \frac{D}{4}=64a^2b^2-$

$-(a^2+1)(64b^2-1)\le 0;$

$\cancel{64a^2b^2}-\cancel{64a^2b^2}+a^2-64b^2+1\le 0;$

$a^2+1\le 64b^2$. ~~При любом $a\in R$ $\exists b$: $a^2+1\le 64b^2$~~

~~(например $b=\sqrt{\frac{a^2+1}{64}}$)~~

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0 \end{cases}$$

$x^2+(8b-ax-12)^2-16\le 0$

$x^2+64b^2+a^2x^2+12^2-16\cdot 12b-16abx+24ax-$

$-16\le 0;$

$x^2(a^2+1)+8ax(3-2b)+(64b^2+12^2-16\cdot 12b-$

$-16)\le 0 \Rightarrow \frac{D}{4}=16a^2\cancel{x^2}(9-12b+4b^2)-(a^2+1)\cdot$

$\cdot(64b^2+12^2-16\cdot 12b-16)\le 0;$

$9\cdot 16a^2\cancel{x^2}-\cancel{12\cdot 16a^2b}+\cancel{4\cdot 16a^2b^2}-\cancel{64a^2b^2}-$

$-12^2a^2+\cancel{16\cdot 12a^2b}+16a^2-64b^2-12^2+16\cdot 12b+16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$= (9\cdot 16 - 12^2 + 16)a^2 - 64b^2 + 16\cdot 12b + 16 \le 0;$

$16a^2 \le 64b^2 - 16\cdot 12b - 16;$

$a^2 \le 4b^2 - 12b + 1$

Т.к. решений должно быть ровно 2, то прямая $ax + y - 8b = 0$ – общая касательная к данным окружностям, т.е. каждый из дискриминантов $\frac{D_1}{4} = a^2 + 1 - 64b^2$ и $\frac{D_2}{4}$ $\cancel{= a^2 - 4b^2}$ $16a^2 - 64b^2 - 16\cdot 12b - 16$ ~~+12b−1~~ должен быть равен 0

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 \cancel{+} - 12b + 1 \end{cases}$$

$60b^2 + 12b - 2 = 0;$

$30b^2 + 6b - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 39$

$b_{1/2} = -3 \pm \sqrt{39}.$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 + 1 = (3 + \sqrt{39})^2 \\ a^2 + 1 = (3 - \sqrt{39})^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{47 + 6\sqrt{39}} \\ \cancel{b =} a = \pm\sqrt{47 - 6\sqrt{39}} \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\sqrt{47 + 6\sqrt{39}}$; $\pm\sqrt{47 - 6\sqrt{39}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $ab \vdots 2^{15}7^{11}$; $bc \vdots 2^{17}7^{18}$; $ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

$\min(abc)$; $x_2 = ord_2 a$; $x_7 = ord_7 a$

$ord_n a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \vdots n^\alpha \\ a \not\vdots n^{\alpha+1} \end{cases}$ $\quad y_2 = ord_2 b$; $y_7 = ord_7 b$

$z_2 = ord_2 c$; $z_7 = ord_7 c$

$$\begin{cases} x_2+y_2 \geq 15 \\ x_7+y_7 \geq 11 \\ y_2+z_2 \geq 17 \\ y_7+z_7 \geq 18 \\ x_2+z_2 \geq 23 \\ x_7+z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2+y_2 \geq 15 \\ y_2+z_2 \geq 17 \\ x_2+z_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(x_2+y_2+z_2) \geq 55$$

$\cancel{2x_2+2y_2}$ ~~$2(x_2+y_2+z_2+$~~

$$\begin{cases} y_7+z_7 \geq 18 \\ x_7+y_7 \geq 11 \\ x_7+z_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow 2(x_7+y_7+z_7) \geq 68$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2+y_2+z_2 \geq \left[\frac{55}{2}\right] + 1 \\ x_7+y_7+z_7 \geq 34 \end{cases}$$

$9+6\sqrt{39}+39 = 4+6\sqrt{39}$

$\Rightarrow \min(abc) = 2^{28}\cdot 7^{34}$.

$a;\ b$

$9;\ 5$
4
5
9

$140-41 = 99$

$\frac{9}{99}$

68

$16-7\cdot 20+25 = 41-140$

$\cancel{27}$ 28

---

2) $\frac{a}{b}$ – несокр $\Leftrightarrow$ НОД$(a;b)=1$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ – можно сокр. на m (max) $\Rightarrow$ НОД$(a+b; a^2-7ab+b^2) = m$; $\begin{cases} (a+b;\ a^2-7ab+b^2) = m \\ (a;b)=1 \end{cases}$

НОД$(a;b)$ = НОД$(a-b;b)$

$(a;b)=1$ | Если $\boxed{m=9}$

$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$(a+b; a^2-7ab+b^2) = ((a+b); (a+b)^2 - 9ab) = (a+b; -9ab) =$

Если $(a+b; -9ab) \neq 1, 9$, то $\exists p$ $|ab$ и $p|a+b \Rightarrow$ $\begin{cases} p|a \\ p|b \end{cases}$ $p|a+b \Rightarrow$ НОД$(a;b)=p$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4) $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \mid \cdot \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\cancel{3x^2}-6x+2-\cancel{3x^2}-3x-1=(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})$

$(1-9x)=(1-9x)(\sqrt{\ldots})$

$(1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x}\cancel{+1}-1)=0$

$D=3$

$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$D=-3$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \;\; \geq 1 \end{array}\right.$

ООЗ:

$\begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$

$1-\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{9}$ $\quad 1{,}71 \mid 3 \quad 0{,}5$

$1-\frac{1}{1{,}71}$ $\quad \frac{1{,}71}{3}$

$1-\frac{1}{1{,}71}>1-\frac{1}{2}=0{,}5>\frac{1}{9}$

$\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1= \quad x_0=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$

$=\frac{3-6+4}{4} \quad y_0=3\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1=$

$=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4} \quad =\frac{3}{4}+\frac{6}{4}+1=$

$=\frac{9}{4}+1>1$

$\frac{3}{4}-\frac{6}{4}+1=$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

Отв: $\frac{1}{9}$.

ООЗ: $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

$1-\frac{\sqrt{3}}{3}<1-\frac{1}{1{,}71}$

$1 \mid 1{,}71$

$1-\frac{8}{9}$

$1+$

$\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1=$

$=\frac{3}{4}-\frac{6}{4}+1=\frac{3}{4}$

5) $O(0;0)$; $P(-13;26)$; $Q(3;10)$; $R(16;0)$

Кол-во $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)\in\mathbb{Z}^2$ (каран.)

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2\underbrace{(x_2-x_1)}_{x}+\underbrace{(y_2-y_1)}_{y}=14$

$2x+y=14$

Ул: $y=2k$ $\quad \begin{cases} y=2k \\ x=7-k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}. \quad \begin{cases} y_2-y_1=2k \\ x_2-x_1=7-k \end{cases}$

$2x+2k=14$

$x=7-k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

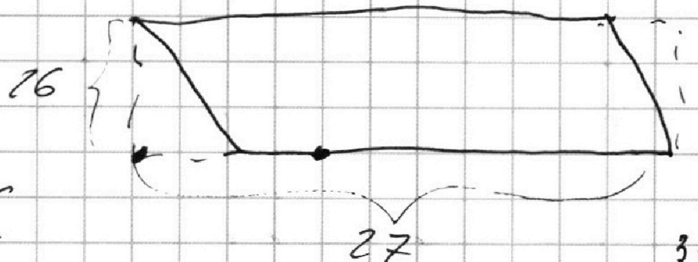
МФТИ

$\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$,

Задача. $y \to 26$ сп.

y такой же чей $\to \frac{26}{2} - 1 = 12$

$26 \cdot 17$



$26 \cdot 17$ сп. в один. чей

$x_2 - x_1 = 7 - k$

По горизонт.:

б) $\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ \underbrace{(x^2 + y^2 - 1)}_{\omega}\underbrace{(x^2 + (y-12)^2 - 16)}_{} \leq 0 \end{cases}$

$a: \exists b$: ровно 2 реш.

Ω мн-во $\Omega \setminus \omega$

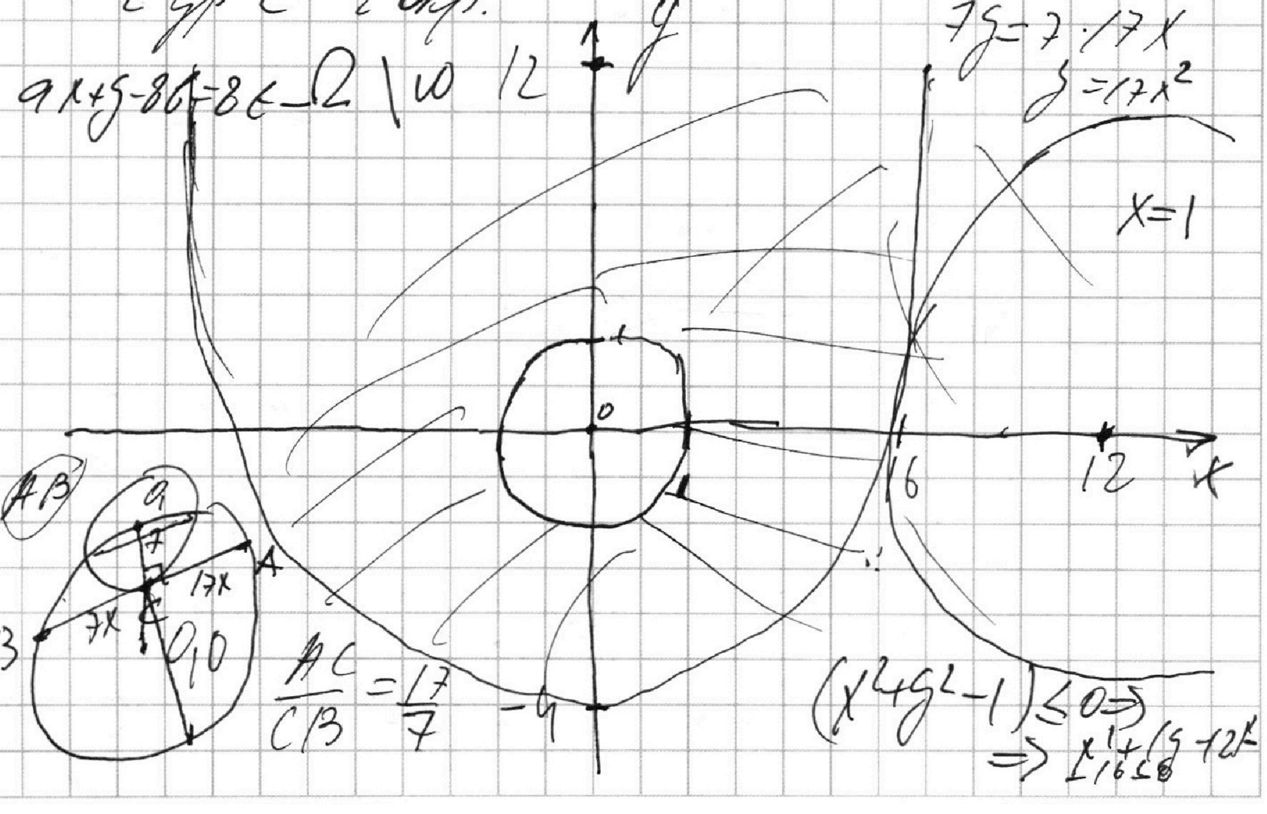
2 ур-е – 2 окр.

$ax + y - 8b = 8 \in \Omega \setminus \omega$

$7y = 7 \cdot 17x$

$y = 17x^2$

$x = 1$



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

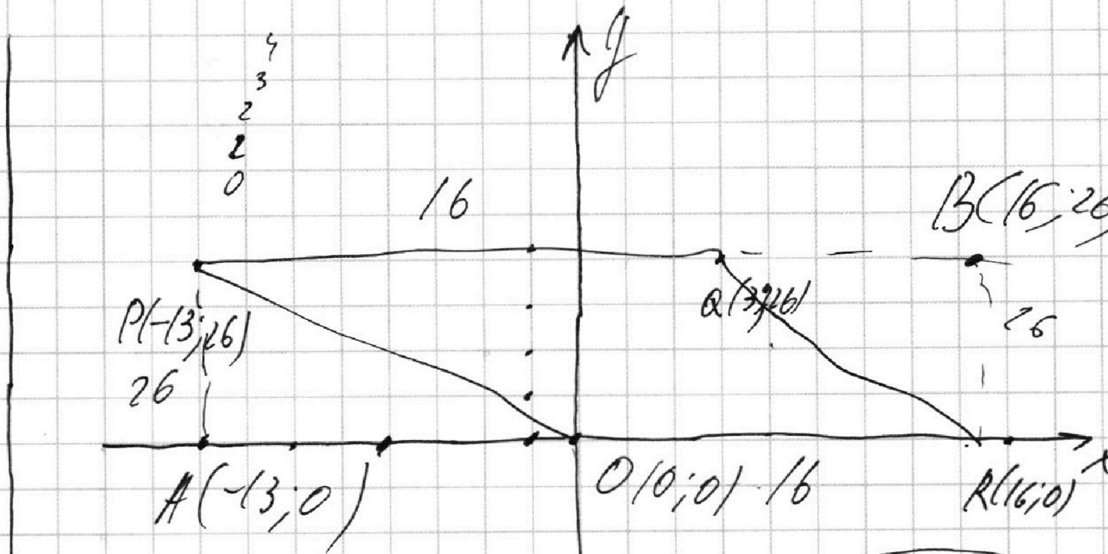
$(x^2 + y^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\times 3$

$k=0: 16-7=9$

$k=1: 16-6=10$

$k=2:$

$$\begin{cases} y_2-y_1=2k \\ x_2-x_1=7-k \end{cases}$$

$d=1$

$a_1=9$

$a_{?}=$ $y_2-y_1=2k$, $0\le y_i\le 26 \Rightarrow y_2\equiv y_1 \pmod 2$

, нат , нат вс. , нат. ч.

Для $APBR$: $25\cdot 13+15\cdot 13=1415$ – выбрать $(y_2;y_1)$. Пусть мы выбрали пару $(y_2;y_1)$:

$y_2-y_1=2k$; Найдем кол-во $(x_2;x_1)$: $x_2-x_1=7-k$

$|x_2-x_1|=7-\frac{y_2-y_1}{2}\le 29$

$$\begin{cases} |x_2-x_1|=|7-k|\le 29 \\ |y_2-y_1|=|2k|\le 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |7-k|\le 29 \\ |k|\le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k\ge 0 - \text{все} \\ k\le 0 - \text{все} \end{cases}$$

Всего 26 таких k

$$\begin{cases} x_2-x_1=7-k \\ y_2-y_1=2k \end{cases}$$

$16-7=9$; $9+13=21$; $7-13=$

$k=0$ – $16+9$

$k=1$

$\sum_{k=-13} 16-7-k=$ ($a_1=22$

$d=-1$ $n=27$

$S_{27}=\frac{a_1+a_{27}}{2}n=$

S_{27} a

$a_{27}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a^2+1)x^2+8ax(3-2b)+(64b^2+12^2-2\cdot8\cdot12b)\le0$ $\quad 160-144=16$

$4(9-12b+4b^2)$

$\frac{D}{4}=16a^2(3-2b)^2-(a^2+1)(64b^2+12^2-2\cdot8\cdot12b)=$

$=\cancel{16\cdot9a^2-16\cdot12\cdot a^2b+16\cdot4a^2b^2}-\cancel{16\cdot4a^2b^2}-$
$-12^2a^2+\cancel{16\cdot12a^2b}-64b^2-12^2-2\cdot8\cdot12b=$

$=16\cdot9a^2-12^2a^2-64b^2-12^2-2\cdot8\cdot12b\le0$

$(16\cdot9-12^2)a^2-64b^2-12^2-16\cdot12b\le0$

$64b^2+16\cdot12b+12^2\ge(16\cdot9-12^2)a^2$

$\exists a\Rightarrow(16\cdot9-12^2)a^2$

$ax+y-8b=0$ $\quad y=8b-ax$

$(x^2+(y-12)^2-16)\le0$

$a:\exists b$
$16a^2\le64b^2$
$1+a^2\le4b^2+1$
$a^2\le\min($

$x^2+(8b-ax-12)^2-16=x^2+64b^2+a^2x^2+12^2-$
$-16bax-16\cdot12b+24ax-16=$
$=(a^2+1)x^2+8ax(3-2b)+(12^2+64b^2-16\cdot12b-16)\le0$

$(9-12b+4b^2)$

$\frac{D}{4}\le0$

$\frac{D}{4}=16a^2(3-2b)^2-(a^2+1)(12^2+64b^2-16\cdot12b-16)=$
$=36a^2\cancel{-4\cdot12a^2b}+16b^2a^2-12^2a^2-64b^2a^2+$
$+\cancel{16\cdot12a^2b}+16a^2=16\cdot9a^2\cancel{-16\cdot12a^2b}\cancel{+16\cdot4a^2b^2}-$
$-12^2a^2\cancel{-64a^2b^2}\cancel{+16\cdot12ba^2}+16a^2-12^2-64b^2$
$+16\cdot12b+16=(16\cdot9-12^2)a^2+16a^2-64b^2+16\le0$

$(10\cdot16-12^2)a^2\le64b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a^2+1)x^2+2x(a-8ab)+(64b^2-16b-15)\le 0$

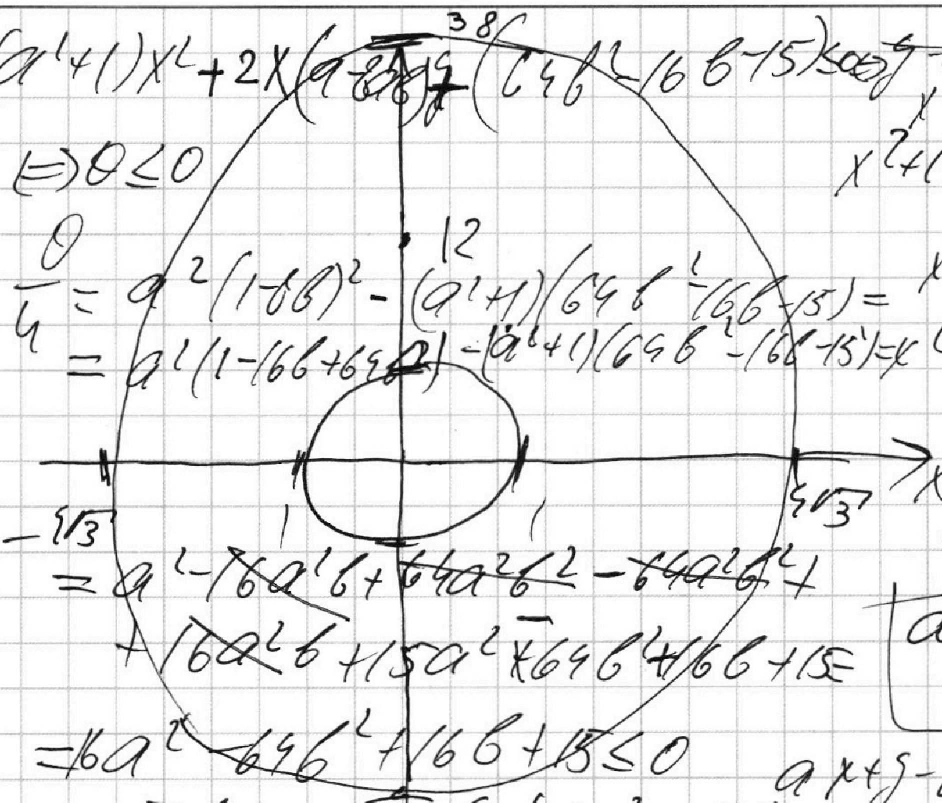
$\Leftrightarrow D\le 0$

$x^2+12^2-16^2=0$

$\frac{D}{4}=a^2(1-8b)^2-(a^2+1)(64b^2-16b-15)=$

$=a^2(1-16b+64b^2)-(a^2+1)(64b^2-16b-15)$

$x^2+12^2=16^2$



$x=4\sqrt{3}$

$64b^2-16b-15$

$\le 16a^2$

$=a^2-\cancel{16a^2b}+\cancel{64a^2b^2}-\cancel{64a^2b^2}+$

$+\cancel{16a^2b}+15a^2-64b^2+16b+15$

$\boxed{a:\exists b}$

$=16a^2-64b^2+16b+15\le 0$

$ax+y-8b=0$ $16a^2\ge y_0$ — верш. параб. $64b^2-16b-15$

$a:\exists b: 16a^2\le 64b^2-16b-15$

$\begin{cases}16a^2\le 64b^2-16b-15\\ a^2\ge 64b^2-1\end{cases}$

$y=8b-ax$

$a\ge 0$, $b=0$

$ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax$

$b_0=\frac{16}{2\cdot 64}=\frac{1}{8}$

$x^2+y^2-1\ge 0 \Rightarrow x^2+(8b-ax)^2\ge 1$

$y_0=64\cdot\frac{1}{64}-16\cdot\frac{1}{8}-15=-15-2=-17$

$x^2+64b^2-16abx+a^2x^2\ge 1$

$16a^2\ge -17$

$(a^2+1)x^2-16abx+64b^2-1\ge 0$ имеет реш. $\Rightarrow D\ge 0$

$\frac{D}{4}=64a^2b^2-(a^2+1)(64b^2-1)=64a^2b^2-64a^2b^2+$

$+a^2-64b^2+1=a^2-64b^2+1\ge 0$

$\boxed{a^2\ge 64b^2-1}$ $\exists b=0$

$x^2+(8b-ax-1$

$y=8b-ax$

$x^2+(8b-ax-1)^2-16\le 0$

$x^2+(y-12)^2-16\le 0$

$x^2+64b^2+a^2x^2+1-16b-$

$-16abx+2ax-16\le 0$

$(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = 3x^2-6x+2+2\sqrt{\quad}+$

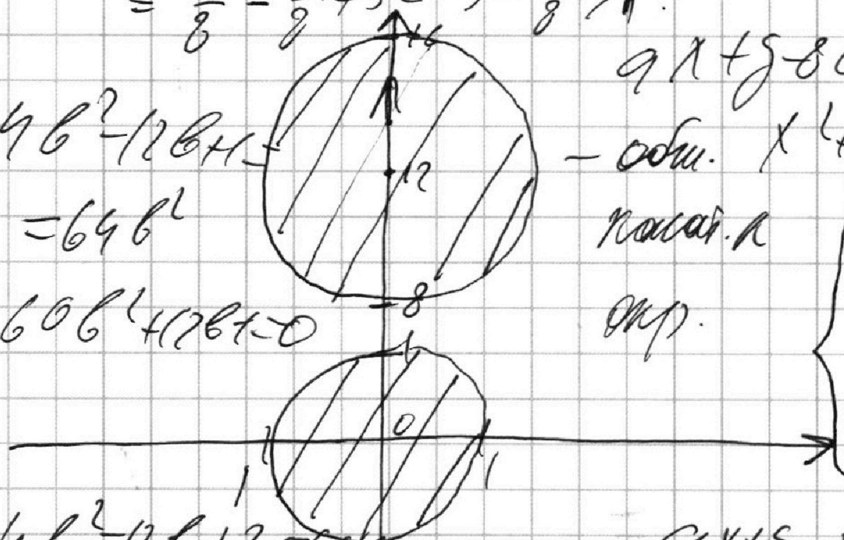
$+\ 3x^2+3x+1 = 6x^2-3x+3+2\sqrt{\ldots}$

$6x^2-3x+3=0;\ \cancel{D}=9-$ $\qquad 160-144=16$

$x_0=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{D}{4}=39 \quad a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{39}}{8}$

$2a+6x^2-3x+3 > 6\cdot\frac{1}{16}-\frac{3}{\cancel{16}4}+3=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}+3=$

$=\frac{3}{8}-\frac{6}{8}+3=3-\frac{3}{8}>1.$ $\qquad \boxed{a:\ \exists b}$



$ax+y-8b$ — общ. $x^2+y^2-1\geq0$

касат. к окр.

$4b^2-12b+1=$
$=64b^2$

$60b^2+12b+1=0$

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1\leq0 \\ x^2+(y-12)^2-16\leq0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$4b^2-12b+2=64b^2-1$ $\qquad ax+y-8b=0\Rightarrow y=8b-ax$

$60b^2+12b-\cancel{2x}=0$ $\qquad (8b-ax)^2+x^2-1=$

$=a^2x^2-16axb+64b^2+x^2-1=(a^2+1)x^2-$

$-16axb+64b^2-1\leq0 \Leftrightarrow \frac{D}{4}\leq0$

$64a^2b^2-(a^2+1)(64b^2-1)=\cancel{64a^2b^2}-64b^2+$

$+a^2-64b^2+1=a^2-64b^2+1\geq0,\ \forall a\in R\ \exists b=0.$

$x^2+(8b-ax-12)^2-16=x^2+64b^2+a^2x^2+144-$

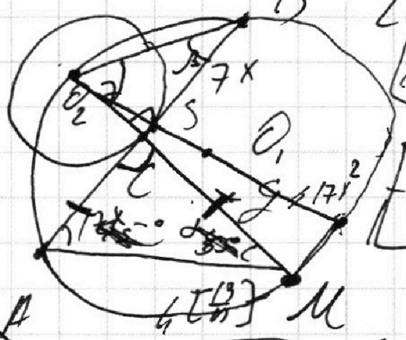
$-2\cdot8\cdot12b-16abx+24ax=(a^2+1)x^2+8ax(3-2b)+64b^2+12^2-16\cdot12b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$29 \cdot 26 \cdot (13 \cdot 29 - 1)$

$tg\,\alpha = \frac{1}{x}$

$k = 1; 6$

$O_2T = 13 \quad 0; 1; 2; \ldots; 23$

$O_2S + ST = 13$

$\left[\frac{23}{k_1}\right]$

$k = k_1 : 29 - k_1 = 23 + k_1$

$\left[\frac{26}{2k_1}\right] - y$

$0 - k_1$ сл. $- x$

$0; 1; \ldots; 29 - k_1$

$ST \cdot TO_2 = O_2C \cdot O_1 M$

$\sum_{n=0}^{13} \left[\frac{26}{2n}\right] (10 - n) - 6 \cdot \square$

$(7 - k)(13 - z) z = 7(7 + 17x^2)$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 7$

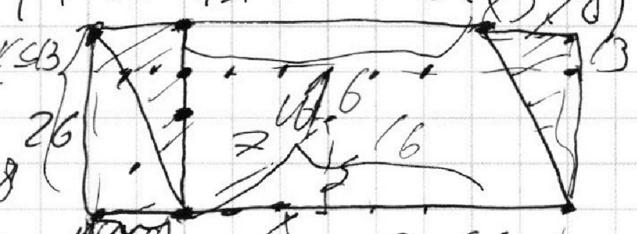
$x^2 + y = 99$

$\sum_{n=1}^{13} \left[\frac{13}{n}\right] (29 - n)$

$(y_1; y_2) : 26 \cdot 12$

$7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$

$P(-13; 16)$ 13×26 $\quad 29 \cdot 25$ $\quad Q(3; 13)$



$O(0; 0) \quad R(16; 0)$

5) $\begin{cases} y_2 - y_1 = 2k \\ x_2 - x_1 = 7 - k \end{cases}$

$x^2 = 99 - 2k$

$7 \cdot 14 - 7 \cdot 13 = 7$

$a_1 = 7$, $a_{14} = -6$, $d = -1$

$29 \cdot 26 \cdot 13$ – выбр. y в $\square$

$\sum \left[\frac{29}{2n}\right]$

$\sum \left[\frac{29}{2n}\right]$

$x_2 - x_1 = 6 \quad 13 \cdot 26 \cdot 13 \quad \frac{1 + 13}{2} \cdot 13 = 29 \cdot 13 - 29 \cdot 13 \quad \frac{C_{26}^2}{2}$

$7 \cdot 14 - (7 + 7 + 0 \ldots + 1 + 1 + 1 + 13)$

$29 \cdot 26 \cdot 13 - 13^2 \cdot 26 = 13(2 \cdot 13 \cdot 26(29 + 13) = 13 \cdot 26 \cdot 16 -$

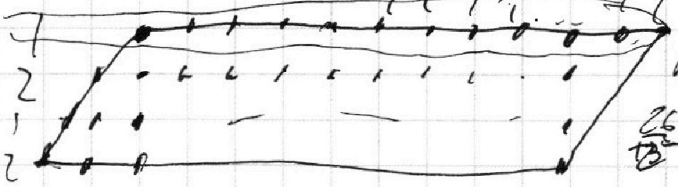
– выбр. y_1, y_2 в $\square$

$k = 0 : y_1 = y_2 \Rightarrow 16 - 7 = 9$

Отс. пол: $x_2 - x_1 = k$

$26 \cdot 29 -$

$7 - k$



$k = 1 : y_2 - y_1$

$\frac{26}{13} - 13$