МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. Заметим, что ab^2c кратно $2^{31}\cdot 7^{27}$, при этом $ac = 2^{20}\cdot 7^{57}$,

а $a^2b^2c^2 = (abc)^2$ кратно $2^{51}\cdot 7^{64}$.

Пусть

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot m$; $bc = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot k$; $ac = 2^{20}\cdot 7^{57}\cdot n$; $m, k, n \in \mathbb{N}$.

Тогда $ab^2c = 2^{31}\cdot 7^{27}\cdot mn$. При этом минимальное значение

$mn - 7^{10}\cdot 2$. Если $mn < 7^{10}$, $ac > ab^2c$, однако $b \in \mathbb{N}$. Если

$mn \vdots 2$, то $b^2 \vdots 2^{11}$ и $\vdots 2^{12} \Rightarrow b$ - не натурально.

При $mn = 7^{10}\cdot 2$, $k = 1$ $(abc)^2 = 2^{51}\cdot 7^{64}\cdot mnk = 2^{52}\cdot 7^{74}$.

Отсюда $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$ - минимальное значение

Оно возможно при $a = 2^8\cdot 7^{10}$; $c = 2^{12}\cdot 7^{27}$; $b = 2^6$.

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2. Дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно представить в виде $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab}$ или $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ ①

Если дробь ① сократима то сократима и обратная ей дробь $\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$ ②, которую можно представить в виде $a+b-\frac{8ab}{a+b}$, при этом числитель и знаменатель дроби $\frac{8ab}{a+b}$ тоже можно сократить на m, иначе либо a+b не кратно m, тогда числитель дроби ② нельзя сократить на m, либо 8ab не кратно m, тогда знаменатель не кратен m, либо оба не кратны m, тогда числитель дроби ① тоже не кратен m.

Рассмотрим наибольшее возможное значение $m = НОД(8ab; a+b)$.

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, $НОД(a,b)=1$, значит, $НОД(a+b; a)=1$ и $НОД(a+b; b)=1 \Rightarrow НОД(a+b, ab)=1$. Таким образом, максимальное m достигается, если $a+b \vdots 8$, и оно равно 8.

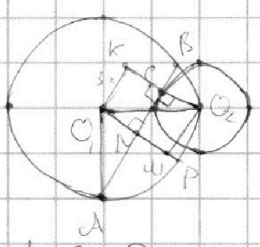
Ответ. 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



3. Проведём серединный перпендикуляр O_1N к AB ~~равный O_1~~. ($O_1N \parallel O_2C$, т.к. O_2C — касательная).
Продлим O_2C за т. C и ~~проведём~~ проведём к O_2C перпендикуляр из т. O_1. Проведём $O_2M \perp O_1P$.

Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$; $AB = 8x$; $AN = 4x \Rightarrow CN = BN - BC = 3x$.

O_1KCN — прямоугольник; $O_1K = 3x$.

O_2MNC — прямоугольник; $O_2C = MN = R(\omega) = 1$.

Из прямоугольного треугольника AO_1N $O_1N = \sqrt{AO_1^2 - AN^2} = \sqrt{R(\Omega)^2 - (4x)^2} = \sqrt{25-16x^2}$; $O_2M = O_1K = 3x$, т.к. O_1KO_2P — прямоугольник ($\angle KCN = \angle O_1NC = 90^\circ$, т.к. CO_2 — касательная; O_1P — сер. перпендикуляр к AB; $\angle O_1KC = 90^\circ \Rightarrow \angle KO_1M = 90^\circ$; $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$).

Из прямоуг. $\triangle O_1O_2M$: $O_1O_2 = 5$, $O_1M = \sqrt{25-16x^2} + 1$, $O_2M = 3x$:

$(\sqrt{25-16x^2}+1)^2 + 9x^2 = 25$; $\quad 25-16x^2+1+2\sqrt{25-16x^2}+9x^2-25=0$

$2\sqrt{25-16x^2} = 7x^2 - 1$

$\sqrt{25-16x^2} = \frac{7x^2-1}{2}$; $\quad 16x^2 \le 25$; $x^2 \le \frac{25}{16}$; $0 < x \le \frac{5}{4}$

$25-16x^2 = \frac{49x^4-14x^2+1}{4}$

$100-64x^2 = 49x^4-14x^2+1$

$49x^4+50x^2-99=0$; $x^2=t$; $t \ge 0$

~~$D = 2500+4\cdot 99\cdot 49 = 2500+16204 = 18704$~~

$D = 625+99\cdot 49 = 5476 = 74^2$

$t_1 = \frac{-25+74}{49} = 1 \Rightarrow x^2 = 1$;

$x = 1$, т.к. $x > 0$.

$AB = 8x = 8$. Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4\. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 49x^2-28x+4;$

$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 49x^2-28x+4;$

$25x-45x^2=2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$

$4\cdot(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 25x^2(5\cancel{x}-9x)^2$

$4\cdot(4x^4-10x^3+6x^2+4x^3-10x^2+6x+2x^2-5x+3) = 25x^2(81x^2-90x+25)$

$4\cdot(4x^4-6x^3-2x^2+x+3) = 25x^2(81x^2-90x+25)$

$2025x^4-2250x^3+625x^2 = 16x^4-24x^3-8x^2+4x+12;$

$2009x^4-2226x^3+633x^2-4x-12=0$

ОДЗ:

$2x^2+2x+1>0 \ \forall x$

$2x^2-5x+3\ge 0$

$D=25-24=1$

$x_1=\frac{5+1}{4}=1{,}5;\ x_2=1;$

$x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. $\begin{cases} 100b^2-160ab+64a^2-25b^2=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (10b-8a)^2-(5b)^2=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (5b-8a)(15b-8a)=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ 1. $\begin{cases} 5b=8a \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ \frac{25}{64}b^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ 25\cdot\frac{63}{64}b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ b=\frac{\pm 8}{5\sqrt{63}}=\frac{\pm 8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b=\frac{5}{8}\cdot\frac{\pm 8}{5\cdot 3\sqrt{7}}=\frac{\pm\sqrt{7}}{21} \\ b=\pm\frac{8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ \frac{225}{64}b^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ 25\left(1-\frac{9}{64}\right)b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ 25\cdot\frac{55}{64}b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ b=\pm\frac{8}{5\sqrt{55}} \end{cases}$

$a=\frac{15}{8}b=\frac{15}{8}\cdot\pm\frac{8}{5\sqrt{55}}=\pm\frac{3}{\sqrt{55}}=\pm\frac{3\sqrt{55}}{275}$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{21}$; $-\frac{\sqrt{7}}{21}$; $\frac{3\sqrt{55}}{275}$; $-\frac{3\sqrt{55}}{275}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=ax+10b \\ (x^2+16x+64+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \; ① \end{cases}$

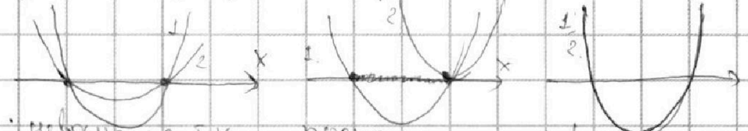
Подставим значение y в неравенство ①:

$$(x^2+16x+64+(ax+10b)^2-1)(x^2+(ax+10b)^2-4)\le 0$$

$$(x^2+16x+64+a^2x^2+20axb+100b^2-1)(x^2+a^2x^2+20axb+100b^2-4)\le 0$$

$$(x^2(a^2+1)+4x(5ab+4)+100b^2+63)(x^2(a^2+1)+20axb+100b^2-4)\le 0$$

Полученные 2 квадратных трёхчлена должны иметь в сумме только 2 корня (если корней больше, то значений x при котором произведение равно 0 больше, если при этом какие-то совпадают, то графики трёхчленов имеют один из видов:



невозможно, т.к. старшие к. одинаковы

подходит вся закраш. область

невозможно т.к. выражения неодинаковы.

Два значения x, а значит, и 2 решения системы возможно лишь тогда когда оба квадратных трёхчлена имеют по 1 корню, т.е. $D_1=D_2=0$, где D_1 и D_2 — дискриминанты кв. трёхчленов.

$D_1=16(5ab+4)^2-4(a^2+1)(100b^2+63)=0 \quad |:4$ $\qquad D_2=400a^2b^2-4\cdot(a^2+1)(100b^2-4)=0 \quad |:16$

$\begin{cases} 4(5ab+4)^2-(a^2+1)(100b^2+63)=0 \\ 25a^2b^2-(a^2+1)(25b^2-1)=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \cancel{20}4(25a^2b^2+40ab+16)-(a^2+1)(100b^2+63)=0 \\ 25a^2b^2-25a^2b^2-25b^2+a^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-100b^2-63a^2-63=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 100b^2-160ab+63a^2-1=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 75b^2-160ab+64a^2=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

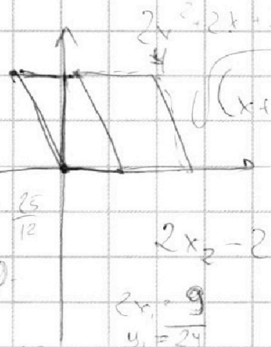
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

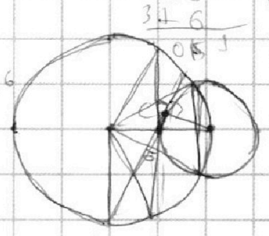
МФТИ



$\sqrt{(x+1)^2 + x^2}$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$\sqrt{25 - 16x^2 + 1} + 3x^2 = 5$

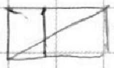


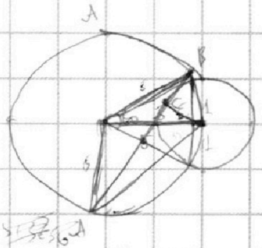
$a = 2^8 \cdot 7^{10}$

$b = 2^6$

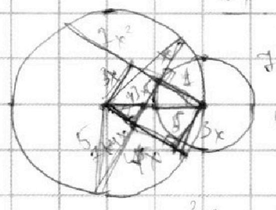
$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$4x^2 - 5x + 3 + 2x + 1$





$4x^2 - 3x + 4 = 49x^2 - 28x + 4$



$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

1. $ab : 2^{14} 7^{10}$

$bc : 2^{17} 7^{17}$ $abc - ?$

$ac : 2^{20} 7^{37}$

$b = 2^6$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$b = m \cdot 2^x \cdot 7^y$

$a : 2^{14-x} 7^{10-y}$

$c : 2^{17-x} 7^{17-y}$

$2x + y \geq 12$

$x \in [-12; 3]$

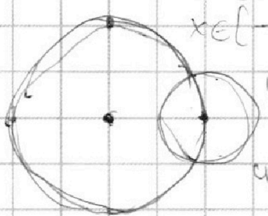
$6 \cdot 24 = 30$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$b^2 = 2^{12}$, $b = 2^6$

$bc = 2^6 \cdot 2^{11} \cdot 7^{17}$

$ab = 2^8 \cdot 7^{10}$



$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 25x^2(5 - 9x)^2$

$4(4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3) = 25x^2(25 - 90x + 81x^2)$

$b = 1??$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

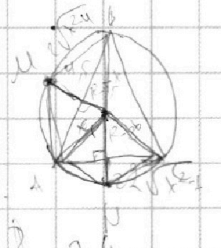
$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$b = 1?$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$c : 2^{11} \cdot 7^{12}$

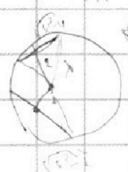
$a : 2^8 \cdot 7^{10}$



$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n$

$49x^2 - 28x + 4$



$4851 + 625 = 5476$

$5476 : 2 \quad 74$

$74 \cdot 74 = 5476$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot m$, $ac = 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot n$, $bc = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot k$

$(abc)^2 = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot mnk = 2^{34}\cdot 2^{17}\cdot 7^{27}\cdot 7^{37}\cdot mnk$

$= 2^{51}\cdot 7^{64}\cdot mnk$

$(abc)^2 = 2^{51}\cdot 7^{64}$, abc

$mnk_{min} = 2$

$(abc)^2 = 2^{52}\cdot 7^{64} \Rightarrow abc = 2^{26}\cdot 7^{32}$

$2^{14}\cdot 7^{10}$ $a = 2^{14-x}\cdot 7^{10-x}$, $c = 2^{17-x}\cdot 7^{12-x}$, $b = 2^x\cdot 7^x$

$abc = 2$

НОД$(a, b) = 1, 6$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$8ab : (a+b)$

$a+b = 16$ $(a+b)^2 - 8ab : a+b$

$a + b - \frac{8ab}{a+b}$

сократима

$a+b : 8ab$

$\frac{16}{16^2 - 8ab}$

$a+b : a$ т.к. таким образом $a+b : 8$

$a+b : b$

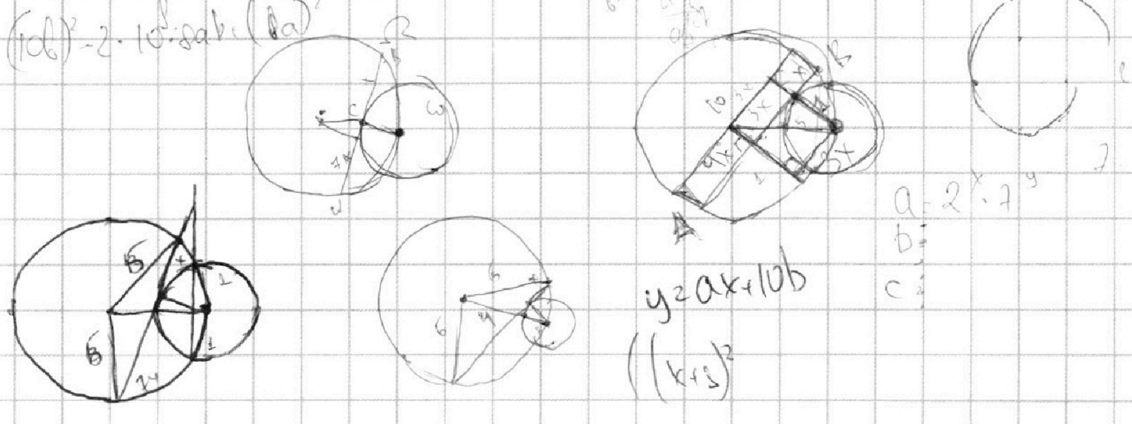
$\frac{16}{256 - 8}$ $(a+b)^2 - 8ab$ $\frac{16}{256 - 8ab}$

$8ab$ $a+b$ $a+b : ab$

$\frac{a+b}{ab}$ некий НОД на к-й можно сократить

$100b^2 + 160ab + 64a^2$

$(10b)^2 - 2\cdot 10\cdot 8ab + (8a)^2$



$a = 2^x\cdot 7^y$

$y = ax + 10b$

$((x+3)^2$

$x^2 + 16x + 64 - 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ $2x^2-5x+3=0$

$\sqrt{(x-1,5)(x-1)}$ $(-\infty;+1] \cup [1,5;+\infty)$ $D=25-4\cdot 6=1$

$\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ \frac{25}{64}b^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{6}{4}=1,5$ $x_2=1$

$2x^2+2x+1>0\ \forall x$

$b=\frac{8}{5}\sqrt{7}$ $a=\frac{1}{3\sqrt{7}}\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$

$\boxed{\frac{63}{64}b^2=\frac{1}{25}}$

$y=ax+10b$

$\left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0$

$b=\pm\frac{8}{15\sqrt{7}}$

$\left((x+8)^2+(ax+10b)^2-1\right)\left(x^2+(ax+10b)^2-4\right)\le 0$

$\begin{cases} (8a-5b)(8a-15b)=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$\left(x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2-1\right)\left(x^2+a^2x^2+20abx+100b^2-4\right)\le 0$

$\left(x^2(a^2+1)+4x(4+5ab)+100b^2+63\right)\left(x^2(a^2+1)+20abx+100b^2-4\right)\le 0$

$D_1=16(4+5ab)^2-4(a^2+1)(100b^2+63)$ $D_2=400a^2b^2-4\cdot(a^2+1)(100b^2-4)$

подходит только 2 числа

$160ab-100b^2-63a^2+1=0$

$a^2-25b^2+1=0$

$\begin{cases} 16(16+40ab+25a^2b^2)-4(100a^2b^2+100b^2+63a^2+63) \\ 16\cdot 25a^2b^2-16\cdot(a^2+1)(25b^2-1)=0 \mid :16 \end{cases}$

$a^2+63a^2+100b^2-25b^2-160ab=0$

$64a^2+75b^2-160ab=0$

$\begin{cases} 4\cdot(16+40ab+25a^2b^2)-100a^2b^2-100b^2-63a^2-63=0 \\ 25a^2b^2-(25a^2b^2+25b^2-a^2-1)=0 \end{cases}$

$(8a)^2-4\cdot 5\cdot 8ab+100b^2-25b^2=0$

$\begin{cases} 64-160ab+100a^2b^2-100a^2b^2-100b^2-63a^2-63=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$(8a-10b)^2-(5b)^2=0$

$(8a-5b)(8a-15b)=0$