



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Заметим, что  $ab^2c$  кратно  $2^{51} \cdot 7^{27}$ , при этом  $ac = 2^{20} \cdot 7^{57}$ ,  
а  $a^2b^2c^2 = (abc)^2$  кратно  $2^{51} \cdot 7^{64}$ .

Пусть  
 $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m$ ;  $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k$ ;  $ac = 2^{20} \cdot 7^{57} \cdot n$ ;  $m, k, n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $ab^2c = 2^{51} \cdot 7^{27} \cdot mn$ . При этом минимальное значение

$mn = 7^{10} \cdot 2$ . Если  $mn < 7^{10}$ ,  $ac > ab^2c$ , однако  $b \in \mathbb{N}$ . Если

$mn \geq 2$  то  $b \geq 2^{11}$  и  $\geq 2^{12} \Rightarrow b$  - не натурально.

При  $mn = 7^{10} \cdot 2$ ,  $k = 1$   $(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk = 2^{52} \cdot 7^{74}$ .

Отсюда  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$  - минимальное значение.

Оно возможно при  $a = 2^8 \cdot 7^{10}$ ;  $b = 2^{12} \cdot 7^{27}$ ;  $c = 2^6$ .

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Дробь  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$  можно представить в виде  $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2+3ab}$   
или  $\frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$  ①

Если дробь ① сократить, то сократима и обратная ей  
дробь  $\frac{(a+b)^2-3ab}{a+b}$  ②, которую можно представить в виде

$a+b - \frac{3ab}{a+b}$ , при этом числитель и знаменатель дроби  $\frac{3ab}{a+b}$

тоже можно сократить на  $m$ , иначе либо  $a+b$  не кратно

$m$ , тогда числитель дроби ② нельзя сократить на  $m$  либо

$3ab$  не кратно  $m$ , тогда знаменатель не кратен  $m$ , либо

оба не кратны  $m$ , тогда числитель дроби ② тоже не кратен  $m$ .

Рассмотрим наибольшее возможное значение  $m = \text{НОД}(3ab; a+b)$

П.к.  $\frac{a}{b}$  несократима,  $\text{НОД}(a; b) = 1$ , значит,  $\text{НОД}(a+b; a) = 1$  и  $\text{НОД}$

$(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; ab) = 1$ . Таким образом, максимальное

$m$  достигается, если  $a+b : 3$ , и оно равно 3.

Ответ: 3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

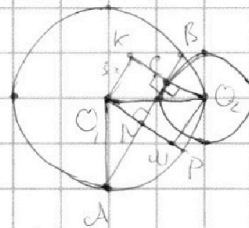
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. Проведём серединный перпендикуляр  $O_1N$   
к  $AB$  равной  $O_1P$  ( $O_1N \parallel O_2C$ , т.к.  $O_2C$  -  
касательная)  
Продлим  $O_2C$  за  $C$  и проведём к



$O_2C$  перпендикуляр  $MP$  т.  $O_1$ . Проведём  $O_2M \perp O_1P$ .

Пусть  $BC = x$ , тогда  $AC = 2x$ ;  $AB = 8x$ ;  $AN = 4x \Rightarrow CN = KN - BC = 3x$ .

$O_1KCN$  - прямоугольник;  $O_1K = 3x$

$O_2MNC$  - прямоугольник;  $O_2C = MN = R(\omega) = 1$ .

Из прямоугольного треугольника  $AO_1N$   $O_1N = \sqrt{AO_1^2 - AN^2}$ .

$= \sqrt{R(8x)^2 - (4x)^2} = \sqrt{25 - 16x^2}$ ;  $O_2M = O_1K = 3x$ , т.к.  $O_1KO_2P$  - прямоуголь-

ник ( $\angle KCN = \angle O_1NC = 90^\circ$ , т.к.  $CO_2$  - касательная;  $O_1P$  - сев. перпендикуляр

к  $AB$ ;  $\angle O_1KC = 90^\circ \Rightarrow \angle KO_2M = 90^\circ$ ;  $\angle O_2MO_1 = 90^\circ$ ).

Из прямоугол.  $\triangle O_1O_2M$ :  $O_1O_2 = 5$ ;  $O_2M = \sqrt{25 - 16x^2} + 1$ ;  $O_1M = 3x$ .

$$(\sqrt{25 - 16x^2} + 1)^2 + 9x^2 = 25; \quad 25 - 16x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} + 9x^2 - 25 = 0$$

$$2\sqrt{25 - 16x^2} = 1 - x^2 - 1$$

$$\sqrt{25 - 16x^2} = \frac{1 - x^2}{2}$$

$$25 - 16x^2 = \frac{49x^4 - 14x^2 + 1}{4}$$

$$100 - 64x^2 - 49x^4 + 14x^2 + 1 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0; \quad x^2 = t; \quad t \geq 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 = 2500 + 16204 = 18704$$

$$D = 6 \cdot 25 + 99 \cdot 49 = 5476 = 74^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-25 \pm 74}{49} = 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x = 1, \text{ т.к. } x > 0$$

$AB = 8x = 8$ . Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

ОДЗ:

$$2x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = 1.5; \quad x_2 = 1$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1.5; +\infty)$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$25x - 45x^2 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 25x^2(3x - 9x)^2$$

$$4 \cdot (4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$

$$4 \cdot (4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$

$$2025x^4 - 2250x^3 + 625x^2 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} 100b^2 - 160ab + 64a^2 - 25b^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (10b - 8a)^2 - (5b)^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5b - 8a)(15b - 8a) = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad 1. \begin{cases} 5b = 8a \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ \frac{25}{64}b^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ 25 \cdot \frac{63}{64}b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b \\ b = \frac{+8}{\pm 5\sqrt{63}} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{8}b = \frac{5}{8} \cdot \frac{+8}{\pm 5\sqrt{7}} = \frac{+1}{\pm \sqrt{7}} \\ b = \frac{\pm 8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ \frac{225}{64}b^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ 25(1 - \frac{9}{64})b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ 25 \cdot \frac{55}{64}b^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{15}{8}b \\ b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}} \end{cases}$$

$$a = \frac{15}{8}b = \frac{15}{8} \cdot \frac{\pm 8}{5\sqrt{55}} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21} \right); \left( \frac{3\sqrt{55}}{275}; -\frac{3\sqrt{55}}{275} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**ЛМФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ax + 10b \\ (x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \text{①} \end{cases}$$

Подставим значение  $y$  в неравенство ①:

$$(x^2 + 16x + 64 + (ax + 10b)^2 - 1)(x^2 + (ax + 10b)^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 1)(x^2 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 4) = 0$$

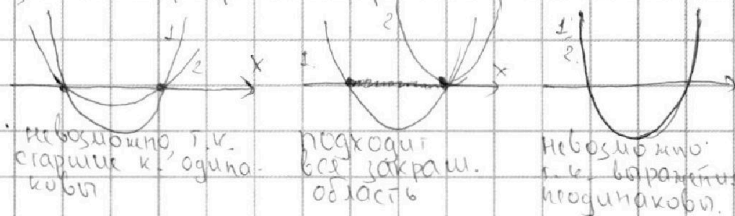
$$(x^2(a^2+1) + 4x(5ab+4) + 100b^2+63)(x^2(a^2+1) + 20axb + 100b^2 - 4) = 0$$

Полученные 2 квадратных трёхчлена должны иметь 6 сумми

только 2 корня (если корней больше, то значений  $x$  при котором произведение равно 0 больше, если при этом

какие-то совпадают, то графики трёхчленов имеют

один из видов:



Два значения  $x$ ,  
а значит, и 2 реш

ния системы возможно лишь тогда, когда оба квадратных трёхчлена имеют по 1 корню, т.е.  $D_1 = D_2 = 0$ , где  $D_1$  и  $D_2$  - дискриминанты кв. трёхчленов:

$$D_1 = 16(5ab+4)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+63) = 0; \quad D_2 = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0$$

$$\begin{cases} 4(5ab+4)^2 - (a^2+1)(100b^2+63) = 0 \\ 25a^2b^2 - (a^2+1)(25b^2-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 204(25a^2b^2+90ab+16) - (a^2+1)(100b^2+63) = 0 \\ 25a^2b^2 - 25a^2b^2 - 25b^2 + a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100b^2 - 160ab + 63a^2 - 1 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 75b^2 - 160ab + 64a^2 = 0 \\ a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$



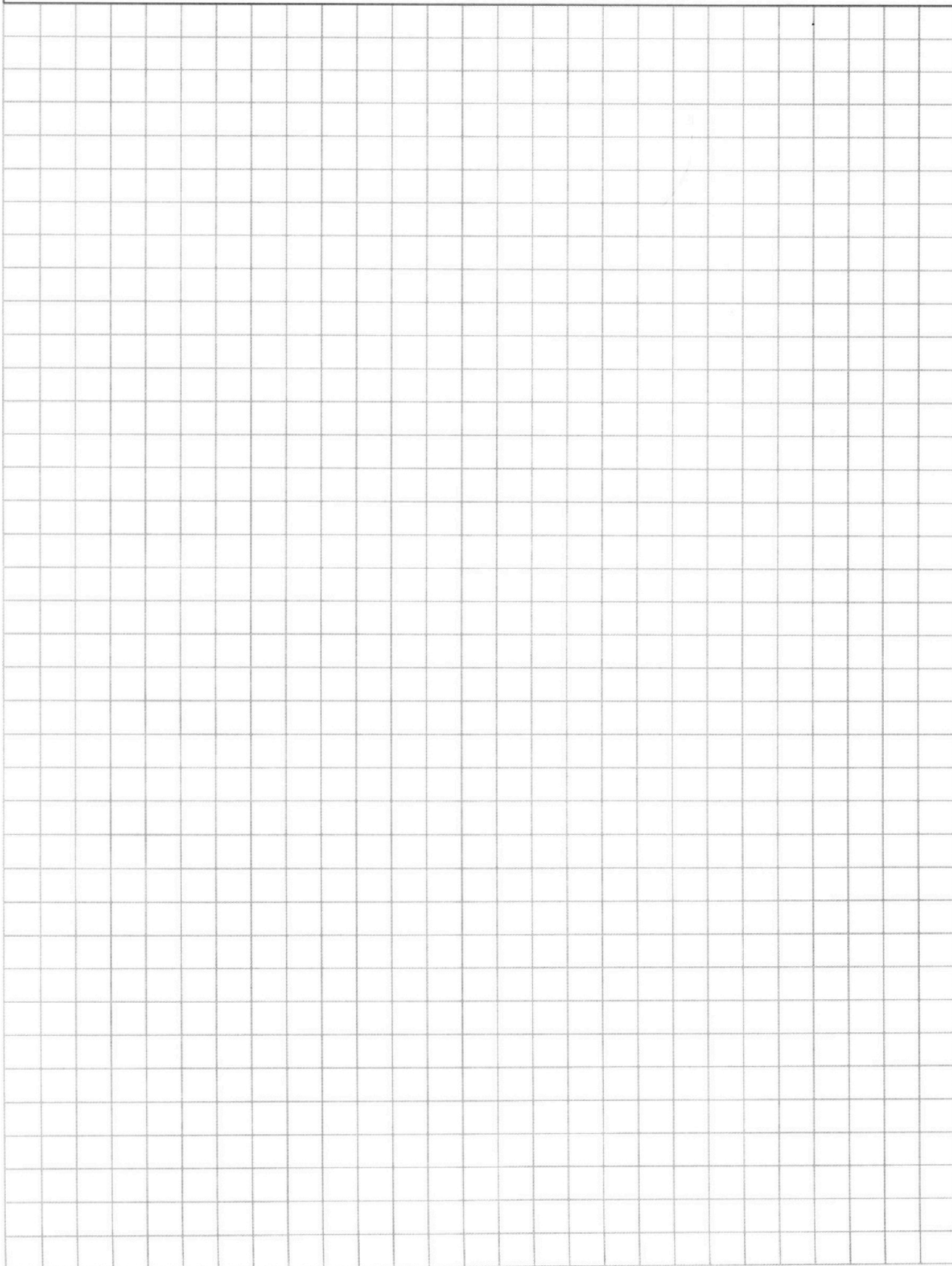
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Diagrams of triangles and circles.
- Equations:  $2x^2 - 2x + 1 = a^2$ ,  $(abc)^2$ ,  $18 + 6 + 1^2 = 25$ ,  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ ,  $\sqrt{25 - 16x^2 + 1} + 5x = 5$ ,  $4x^2 - 3x + 4 = 49x^2 - 25x + 4$ ,  $45x^2 - 25x = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$ ,  $4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 25x^2(5 - 9x)^2$ ,  $4(4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 + 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3) = 25x^2(25 - 10x + 4x^2) = 0$ .
- Arithmetic:  $99 \cdot 49 = 4851$ ,  $89 \cdot 1 = 89$ ,  $396$ ,  $4551$ ,  $4851 + 625 = 5476$ .
- Algebraic manipulations:  $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ ,  $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$ ,  $ac = 2^{20} \cdot 7^{52}$ ,  $abc = 2^{51} \cdot 7^{77}$ .
- Geometric diagrams showing circles and triangles with various points and lines.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ ;     $2x^2-5x+3 \geq 0$

$\sqrt{(x-1)(x+3)} - \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2-7x$ ;     $D = 25 - 4 \cdot 6 < 0$

$\text{НОД}(a+b), (a+b)^2 - a^2 - b^2$ ;     $\text{НОД}(a-b), (a-b)^2 - a^2 - b^2$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ ;     $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$\text{НОД}(2x^2-5x+3) = y = ax + 10b$ ;     $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$

$\text{НОД}(x+3) + y^2 - 1$ ;     $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

$\text{НОД}(6+3x^2) = \text{НОД}(6, 3)$ ;     $(x+3)^2 + (ax+10b)^2 - 1$ ;     $(x^2 + y^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$

$\frac{10}{4} = \frac{3x^2}{4}$ ;     $(x^2 + 6x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4)(x^2 + a^2y^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$

$\frac{10}{4} = \frac{16+3x^2}{4}$ ;     $(x^2 + 4x(4+5ab) + 100b^2 + 63)(x^2 + (a^2+1)y^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$

$\frac{4}{4} = \frac{16+3x^2}{4}$ ;     $(x^2 + (a^2+1)y^2) + 20abx + 100b^2 - 4 \leq 0$

$\frac{24}{4} = \frac{12}{4}$ ;     $D_1 = 16(4+5ab)^2 - 4(a^2+1)(100b^2+63)$ ;     $D_2 = 400(a^2b^2 - 4 \cdot (a^2+1)(100b^2-4))$

$a^2, b^2 \geq 0$ ;     $16(16 + 40ab + 25a^2b^2) - 4(100a^2b^2 + 100b^2 + 63a^2 + 63)$

$16(25(a^2b^2 - (a^2+1)(25b^2+1))) \geq 0$ ;     $16 \cdot 25(a^2b^2 - (a^2+1)(25b^2+1)) \geq 0$

$4 \cdot (16 + 40ab + 25a^2b^2) - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0$

$25a^2b^2 - (25a^2b^2 + 25b^2 - a^2 - 1) = 0$

$64 \cdot 100ab + 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0$

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$ ;     $(8a-5b)(8a+5b) = 0$