МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$; $b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$; $c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$. Если у них есть другие простые множители, это никак не связано с условием и делает произведение больше, чего нам не нужно.

Тогда:

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\geq 14\\ \alpha_2+\beta_2\geq 10\\ \alpha_1+\gamma_1\geq 20\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 37\\ \beta_1+\gamma_1\geq 17\\ \beta_2+\gamma_2\geq 17\end{cases}$$

Складываем: $\Rightarrow \begin{cases}2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\geq 51\\ 2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\geq 64\end{cases}$. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geq 26\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq 32\end{cases} \Rightarrow$ ~~$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\geq 2^{26}\cdot 7^{32}$~~.

~~Пример: $\begin{cases}a=2^9\cdot 7\\ b=2^5\cdot 7\\ c=2^{12}\cdot 7\end{cases}$~~ $\Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=26$. Пример: $\begin{cases}a=2^9\dots\\ b=2^5\dots\\ c=2^{12}\dots\end{cases}$.

$\begin{cases}\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq 32\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 37\end{cases}$. $\beta_2\geq 0 \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq 37 \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=37$. Пример: $\begin{cases}\alpha_2=10\\ \beta_2=0\\ \gamma_2=27\end{cases}$.

Значит, $(abc)_{min}=2^{26}\cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить на m, то и

$\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b}$ можно сократить, причём m остается наибольшим.

Знаменатель равен $(a+b) \Rightarrow m \leq a+b$. Пусть $m = a+b$.

$\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} = (a+b) - \frac{8ab}{a+b} \Rightarrow 8ab \vdots a+b$. Пусть $8ab = k(a+b)$

$8ab = ak + kb \Rightarrow kb \vdots a$ и $ak \vdots b$ $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow k \vdots a$ и $k \vdots b \Rightarrow$
$\Rightarrow k \vdots ab \Rightarrow k \geq ab \Rightarrow 8ab \geq ab(a+b) \Rightarrow a+b \leq 8 \Rightarrow m=8$. Пример: $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$.

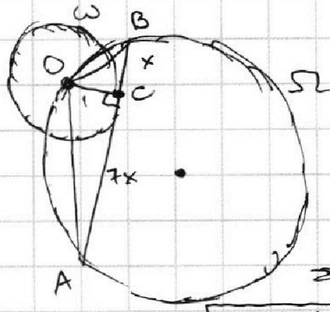
Если $m \neq a+b$, то пусть $m=d$. $a+b \vdots d \Rightarrow 8ab \vdots d$. Пусть $d>8$.
Тогда $НОД(ab; d) > 1$. Но $НОД(a+b; d) > 1 \Rightarrow НОД(ab; (a+b)) > 1$.
Противоречие. Значит, $m=8$.

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По теореме синусов,

$AB = 2\cdot 5\cdot \sin\angle AOB = 10(\sin COB \cos AOC + \sin AOC \cos COB) =$

$= 10\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 10\cdot\frac{8x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{49x^2+1}}.$

$AB = 8x \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 = \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{49x^2+1} \Rightarrow 100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$

$x^2 = \frac{-50+\sqrt{2500+4\cdot 49\cdot 99}}{2\cdot 49} = \frac{4\sqrt{1369}-50}{2\cdot 49} = \frac{4\cdot 37-50}{2\cdot 49} = 1. \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty) \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)^2=2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)=4x^4-6x^3-2x^2+x+3=(x-1)(4x^3-2x^2-4x-3)$$

$$\cancel{2x^2}-5x+3=\cancel{2x^2}+2x+1+49x^2+4-28x+2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

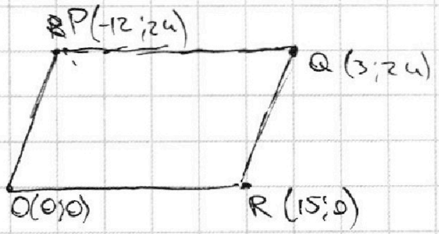
$$49x^2-21x+2=-2\cancel{x}(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ = OR$ и $PQ \nparallel QR$ ⇒ точки расположены так, как показано на рисунке.

Система, задающая точки параллелограмма:

$$\begin{cases} y \geq 0 & (OR) \\ y \leq 24 & (PQ) \\ y \geq -2x & (OP) \\ y \leq -2x+30 & (QR). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12.$

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12.$

Представим, что параллелограмм — множество прямых вида $y = -2x + b$, где $b \in [0; 30]$, причём $y \in [0; 24]$. Тогда, если $A(x_1; y_1) \in l_1 : y = -2x + b_1$, $B(x_2; y_2) \in l_2 : y = -2x + b_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \Rightarrow b_2 = b_1 + 12$. Точки с целочисленными координатами $\Rightarrow b_i \in \mathbb{Z}$; $b_i \in [0; 30]$. Тогда решений уравнения $b_2 - b_1 = 12$ ровно $30 - 12 + 1 = 19$. $OR \parallel PQ \parallel O_x \Rightarrow$ у каждой такой прямой 25 целочисленных точек. Значит, всего решений $19 \cdot 25^2$.

Ответ: $19 \cdot 25^2 = 11875$

т.к. пару b_i можно выбрать 19 способами, а пару точек на этих прямых — 25^2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

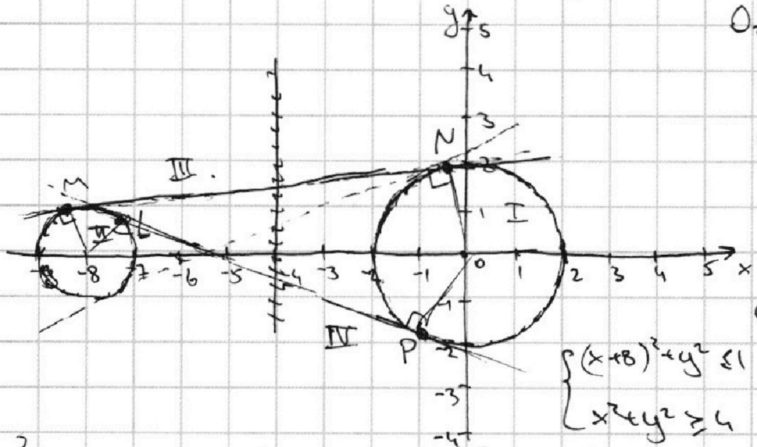
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x+8)^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 4\end{cases} \\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\ge 4\end{cases}\end{array}\right.$

$(x+8)^2+y^2=1$ – окружность с центром $O_1(-8;0)$ и радиусом 1.

$x^2+y^2=4$ – окружность с центром $O_2(0;0)$ и радиусом 2.



Окружности не пересекаются $\Rightarrow \begin{cases}(x+8)^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 4\end{cases}$ ~~задаёт~~ ~~всю плоскость~~ задаёт ~~он~~ круг I (включая его границы), а $\begin{cases}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\ge 4\end{cases}$ задаёт круг II (включая границы).

Значит, ~~уравнение~~ неравенство $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$ задаёт два ранее упомянутых круга.

$ax-y+10b=0$ – прямая. Решений $2 \Rightarrow$ эта прямая – общая касательная двух окружностей. $A(-8;0)$, $B(0;0)$, M и N – точки касания прямой III с I и II окружностями соответственно. O – пересечение прямой III и оси x, $O(z;0)$.

Тогда $\frac{z}{2}=\frac{z-8}{1} \Rightarrow z=2z-16 \Rightarrow z=16$. Значит, $-16a+10b=0$.

$a=\frac{1}{\sqrt{8^2-1^2}}=\frac{1}{\sqrt{63}}=\frac{1}{3\sqrt7} \Rightarrow b=\frac{-16}{30\sqrt7}=\frac{-8}{15\sqrt7} \Rightarrow$ III: $y=\frac{1}{3\sqrt7}x+10\cdot\frac{8}{15\sqrt7}$.

Аналогично находится вторая внешняя касательная: $y=-\frac{1}{3\sqrt7}x+10\cdot\frac{8}{15\sqrt7}$. Рассмотрим прямую IV. Пусть эта пересекает $y=0$ в Q. $\Rightarrow (Q(q;0)) \Rightarrow \frac{-q}{2}=\frac{q+8}{1} \Rightarrow 0=3q+16$

$q=-\frac{16}{3}$. $\Rightarrow 10b=\frac{16}{3}a$. $a=-\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2-2^2}}=-\frac{2\cdot 3}{\sqrt{220}}=-\frac{3}{\sqrt{55}} \Rightarrow b=\frac{16\cdot(-3)}{\sqrt{55}\cdot 3\cdot 10}=$

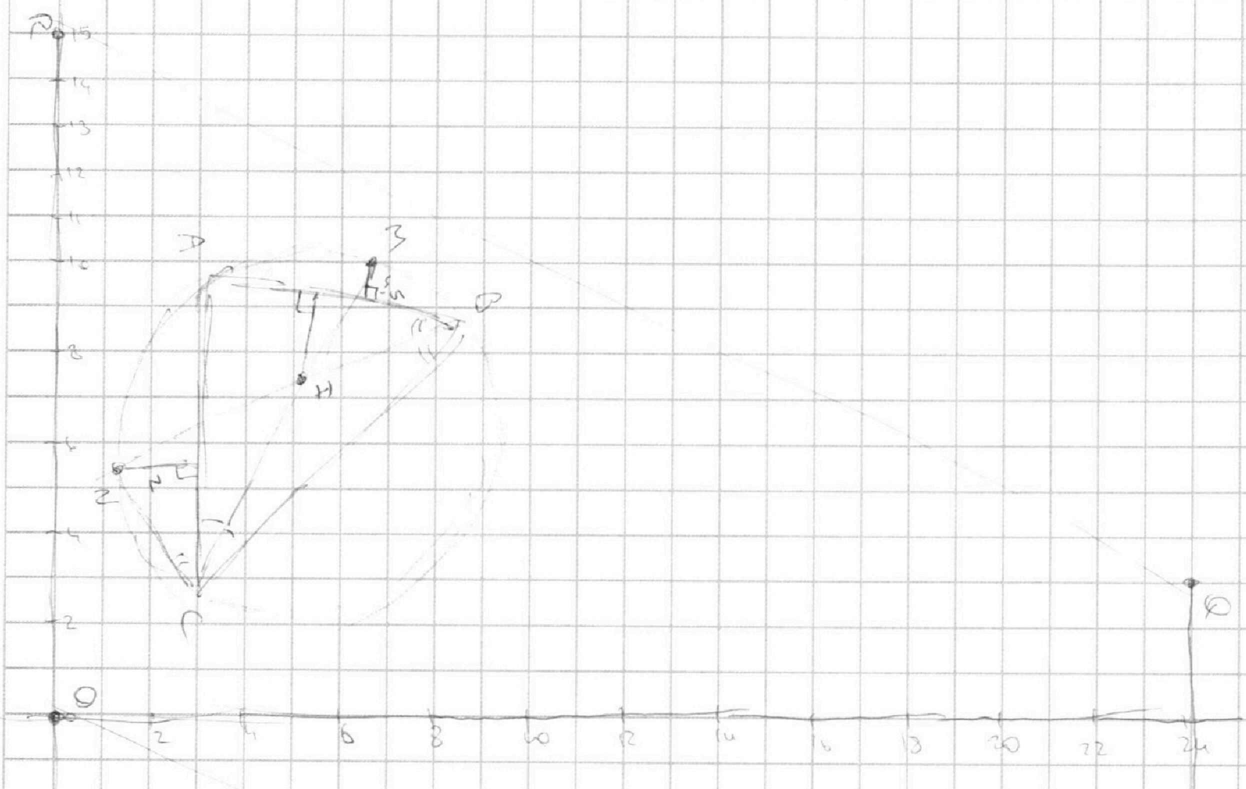
$=-\frac{8}{5\sqrt{55}}$. Аналогично для второй внутренней касательной, $a=\frac{3}{\sqrt{55}}$; $b=\frac{8}{5\sqrt{55}}$.

Ответ: (a,b): $\left(\frac{1}{3\sqrt7};-\frac{8}{15\sqrt7}\right)$, $\left(-\frac{1}{3\sqrt7};\frac{8}{15\sqrt7}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{55}};-\frac{8}{5\sqrt{55}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{55}};\frac{8}{5\sqrt{55}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$4x^4+4x^3+8x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3=$

$=4x^4-6x^3-2x^2+x+3 \;|\; x-1$

$4x^4-4x^3$

$-2x^3-2x^2+x+3$

$-2x^3+2x^2$

$-4x^2+x+3$

$-4x^2+4x$

$-3x+3$

0

$4x^3-2x^2-4x-3$

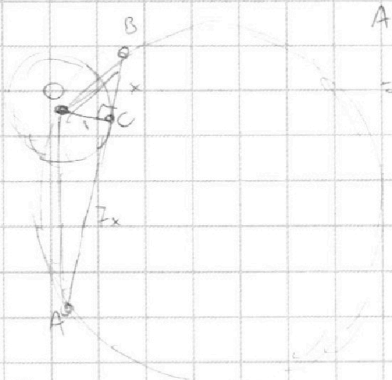
$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AB = 10\cdot\sin\angle AOB = 10\,(\sin COB\cos AOC + \sin AOC\cos COB) =$

$= 10\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$10 = \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{49x^2+1}$

$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$

$\frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4\cdot 49\cdot 99}}{2\cdot 49} = \frac{4\sqrt{1369} - 50}{2\cdot 49} = \frac{4\cdot 37 - 50}{2\cdot 49} =$

$= 1$

198

336 · 49 = 3564 + 15840 = 19404

19404 + 2500 = 21904

$21904 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

21904 : 2 = 10952; 10952 : 2 = 5476; 5476 : 4 = 1369

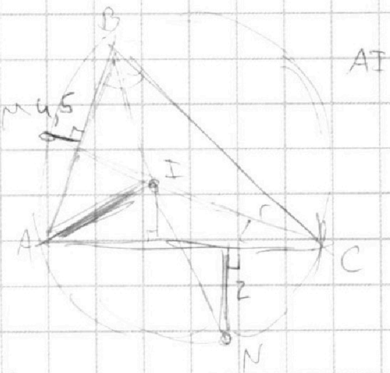
35 · 35 = 1225

37 · 37 = 1369

74

148

98



$AI = (AB + AC - BC)\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{AC}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{9}{AB}$

$AB + AC - BC$

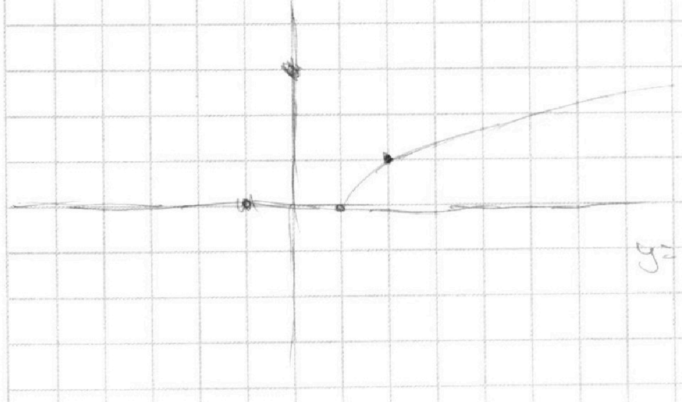
$32x^2 + 32x + 16 + 4\cdot 98x^4 + 4\cdot 98x^3 + 2\cdot 98 - 8\cdot 28x^3 - 8\cdot 28x^2 - 4\cdot 28 =$

$= x^4\cdot 7^4 - 42\cdot 49x^3 + x^2(21^2 + 4\cdot 49) - 4\cdot 21x + 4$

$(4\cdot 98 - 7^4)x^4 + x^3(25\cdot 98 - 8\cdot 28) + x^2(32 - 8\cdot 28 - 21^2 - 4\cdot 49) + x(32 + 4\cdot 21) + 12 + 196 - 56 = 0.$

$72 - 5\cdot 6 + 3$

$50 - 25 + 3 =$



$y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x$

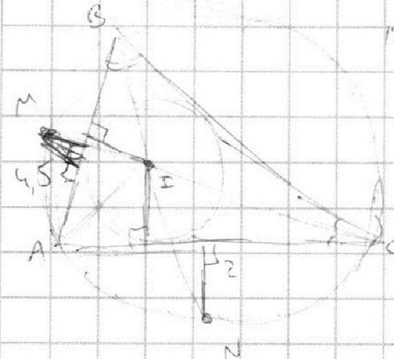
$y =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$180-2\beta \vee 180-(\alpha+\gamma) = 180 - \frac{180-2\beta}{2} = 90+\beta$

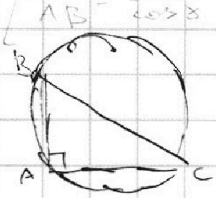
$\frac{AI}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma+2\beta)}$

$\frac{AI}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(90+\beta)}$

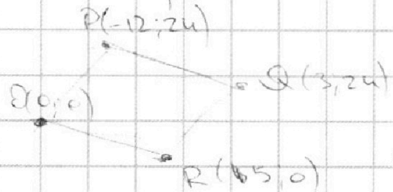
$\frac{4}{AC} = tg\,\beta$

$\frac{9}{AB} = tg\,\alpha$

$\begin{cases} \frac{4}{AC} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \\ \frac{9}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$



$\frac{BC}{\sin 90^\circ} = 2R$

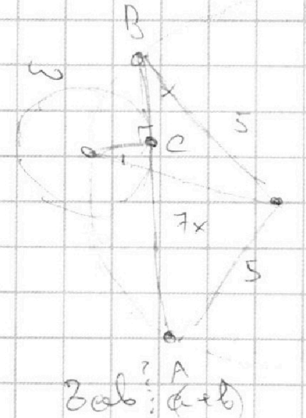


$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$\frac{AB}{\sin AOB} = 10$

OR : $y=0$
PQ : $y=24$
OP : $y=-2x$
QR : $y=-2x+30$

$\Rightarrow \begin{cases} y \in [0;24] \\ y \in [-2x; -2x+30] \end{cases}$



$\Rightarrow \frac{ab}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^2-6ab+b^2}{a+b}$ можно сократить

$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b}$

$x = \frac{\sin COB}{\cos COB}$

$8ab \stackrel{?}{\vdots} (a+b)$

$8\cdot 3\cdot 5 : (3+5)$

$\Rightarrow k_{min} = ab$

$8ab = k(a+b)$

$8ab = ak + kb \Rightarrow kb \vdots a \Rightarrow k \vdots a$

$ak \vdots b \Rightarrow k \vdots b \Rightarrow$

$8ab \geq ab(a+b)$

$a+b \leq 8$

$\sin\angle AOB = \sin COB \cos AOC + \sin AOC \cos COB = 8x \cos COB \cos AOC$

$16\cdot 2\cdot 10$

16
×16
96
16
256

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^{14} 7^{10}$

$bc : 2^{17} 7^{17}$

$ac : 2^{20} 7^{37}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 20 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 37 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 17 \end{cases}$$

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 34+17 =$

$= 51$

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 52$

$2. \frac{ab}{a^2-6ab+b^2}$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot 3}}{4} =$

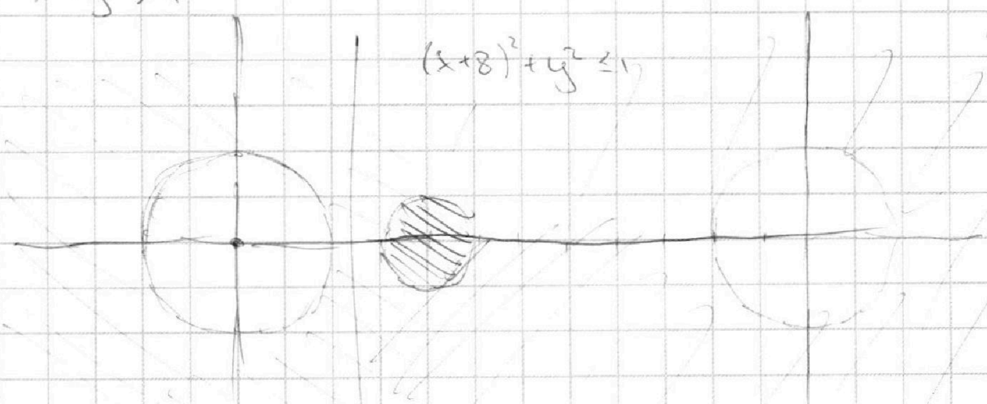
$= \frac{5 \pm 1}{4} = 4$ или $\frac{3}{2}$

$ax - y + 10b = 0$ — прямая

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+y^2-4 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+y^2-4 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4}$

$x^2+y^2 \geq 4$



Либо всё кроме первой окружности, либо всё кроме второй

Либо первая окружность, либо вторая

$y = ax+10b$ Решения два, если прямая касается обеих окружностей

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [1; +\infty)$

$2x^2-5x+3 >$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = (2-7x) + \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = 4+49x^2-28x+2x^2+2x+1-2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} = 49x^2 - \cancel{23x}\, 21x + 2$ $\quad (2-7x)^2 = 49x^2-28x+4$

$4(4+49x^2-28x)(2x^2+2x+1) = 7^4x^4 + 21^2x^2 + 4 - 2\cdot 21\cdot 49x^3 + 2\cdot 2\cdot 49x^2 - 4\cdot 21x$