



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- ① [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1:4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
 $\frac{7}{2}$
 -1
- ③ [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- ④ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ⑤ [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- ± 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$,

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$. Т.к. все числа a, b, c ,

но другие ненулевые числа, не включающие на
делимость на $2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$, a, b, c не сужутся.

Поэтому задачи:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 10 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{36}{2} = 18. \text{ Пример: } \alpha_1 = 4; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 12$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$$

(т.к. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - целые числа.)
Пример: $\beta_1 = 8; \beta_2 = 5; \beta_3 = 17$

Т.к. $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$, но $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$. Пример:
 $\gamma_2 = 0$;
 $\gamma_3 = 11; \gamma_1 = 17$, тогда $\gamma_1 + \gamma_2 = 11; \gamma_2 + \gamma_3 = 17; \gamma_1 + \gamma_3 = 28$.

Т.к. $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$, но

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

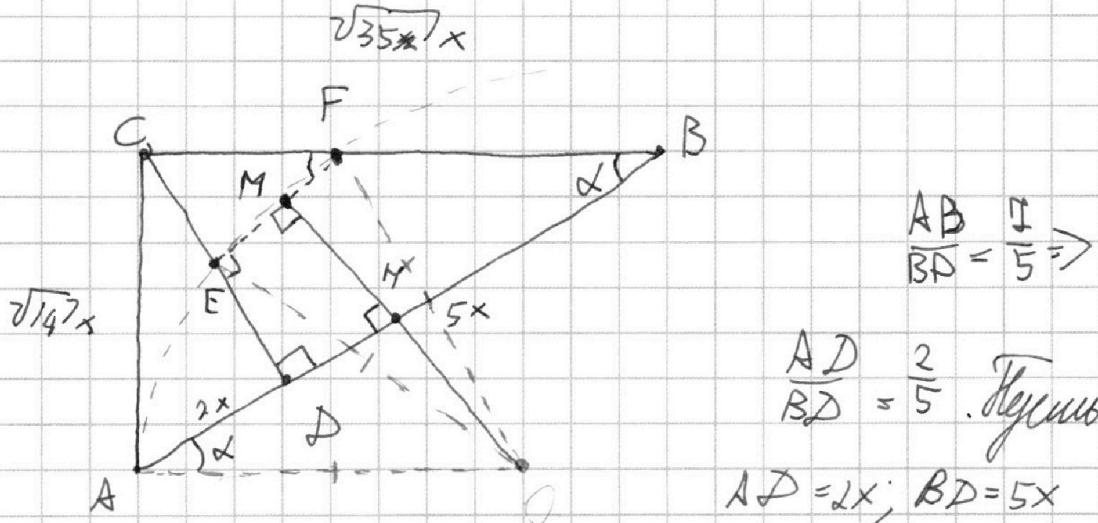
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Н.к. данная окр ОВ как. АС в А, то ее центр
О лежит на перпен. к АС в А. Н.к. Е, F
лежат на ОВ, что О лежит между ней симметрие
к ЕF.

Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{ACD} = \frac{2}{3}S$ одна восьмь,
одн. симм. как $\frac{3}{7}$.

$CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = x\sqrt{10}$ как восьмь члены. $D \Rightarrow$

по т. Пир. $BC = \sqrt{35}x; AC = x\sqrt{14}$

M - сред EF симметр MO пAB и M

$$\sin \angle = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{7 \cdot 5} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow \cos \angle =$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{7}. \text{ Пусть } \frac{CE}{CB} = k. \text{ Тогда из } EF \parallel AB : EF = DH = 5x \cdot k$$
$$CF = \sqrt{35} \cdot xk$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) AO \text{ и } OF - \text{ радиусы} \Rightarrow AO^2 = (AO - CF)^2 + AC^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = -2AO \cdot CF + CF^2 + AC^2, \quad CF = \sqrt{35} \times k;$$

$$AM = AD + MD = 2x + 5xk \Rightarrow 12 + 5k; \quad AO =$$

$$\frac{AM}{\cos \angle} = \frac{x(12+5k) \cdot 4}{\sqrt{35}}$$

$$2. \frac{x(12+5k) \cdot 4}{\sqrt{35}} \cdot \sqrt{35} \times k = 35x^2 k^2 + 14x^2$$

$$2 \cdot (12+5k) \cdot 4 \cdot k = 35k^2 + 14$$

$$2(14+35k)k = 35k^2 + 14; \quad 28k + 70k^2 = 35k^2 + 14$$

$$35k^2 + 28k - 14 = 0 \quad 5k^2 + 4k - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 40 = 66$$

$$k_1 = \frac{-4 + \sqrt{66}}{10} \quad (\text{більшій корінь. інший})$$

$$S_{CDB} = \frac{5}{7}S; \quad S_{CEF} = k^2. \quad S_{CDB} = \left(\frac{\sqrt{66} - 4}{10}\right) \cdot \frac{5}{7} S$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{(\sqrt{66} - 4)^2}{10} \cdot \frac{8 \cdot \frac{5}{7}}{2 \cdot 2} = \frac{66 + 16 - 8\sqrt{66}}{4} = \frac{35 - 4\sqrt{66}}{2}$$

$$\text{Отвіт: } \frac{35 - 4\sqrt{66}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(KEZ): $\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$. Возьмем \cos от обеих
сторон: $\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$

и

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k & (\text{I}) \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k & (\text{II}) \end{cases}$$

Н.к. $\arccos(\frac{1}{2}) \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\text{т.о. } 9\pi - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4,5\pi$$

$$9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow x \geq -\frac{\pi}{2}$$

I) $5\pi - 10x = 9\pi - 2x + 20\pi k ; 8x = -4\pi + 20\pi k$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k. \text{ Суммарно } ODZ \text{ получ:}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = 4,5\pi$$

II) ~~$x = \frac{\pi}{2}$~~ $10x - 5\pi = 9\pi - 2x + 20\pi k$

$$12x = 14\pi + 20\pi k ; x = \frac{7}{6}\pi + \frac{10}{6}\pi k. \text{ Сум. } ODZ:$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{4}{6}\pi; x = \frac{13}{6}\pi; x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5\pi$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{4}{6}\pi; 2\pi; \frac{13}{6}\pi; 4,5\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AOC = \beta. \cos B = \frac{AO}{OC} = \frac{5 \cdot 7}{45} = \frac{7}{9} \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{81-49}}{9} = \frac{\sqrt{32}}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Если $|\frac{5}{6}a| > \frac{4\sqrt{2}}{7}$, то $\exists b$, устр. усл. задачи.

$$\left(\frac{5}{6}a\right)^2 > \left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{6}a - \frac{4\sqrt{2}}{7}\right) \left(\frac{5}{6}a + \frac{4\sqrt{2}}{7}\right) > 0$$

$$\left(a - \frac{24\sqrt{2}}{35}\right) \left(a + \frac{24\sqrt{2}}{35}\right) > 0 \quad a^2 < \left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\left(a - \frac{5 \cdot 35}{24\sqrt{2}}\right) \left(a + \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) < 0$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right) \quad \text{но счтами}$$

при $a=0$ наше $x = \frac{6}{6} = 1$ больше $a=0$, но
может пересекать обе окр. бдущ. точек.

$$\text{Отвем: } a \in \left[-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Выполните упр-ие системой равнозначных саб-систем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases} \text{ - ИК}$$

Уравнения - окр. радиусами 5 и 2 с центрами в

(0,0) и (0,-9) соответ. График $5x^2 + 6ay - 6 = 0$ -

- прямая, при $a \neq 0$ имеет вид: $y = \frac{5}{6a}x - \frac{5}{6a}$

у

Показано, что при $a > 0$ прямая

относится к верхней и симметрично пересекает
все окр., а при $a > 0$ (уравнение

имеет 2 общ. точк.)

Гр. син Тривиальный случай -
общая внешн. кас. Найдем

ее нахождение: A, B - точки кас. с

Большой и меньшей окр., C - пересеч. с

окр. y, O и I - центры большей и меньш. окр.

$$OI = 9. \Delta OAC \sim \Delta IBC \Rightarrow \frac{OC}{IC} = \frac{OA}{IB} = \frac{5}{2} \Rightarrow OC = \frac{5}{2} IC$$

$$OC + IC = \frac{7}{2} IC = 9 \Rightarrow IC = \frac{18}{7}, OC = \frac{45}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\log_{11}x = t$; $\log_{11}(0,5y) = u$; $t \neq 0$; $u \neq 0$

$$\log_{11} \frac{1}{121} = -2 \log_{11} 11 = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 = -\frac{2}{3} \log_{11} x = -\frac{2}{3}t$$

$$\log_{0,125} y^3 (11^{-13}) = -13 \cdot \log_{0,5} y^3 (11) = -\frac{13}{3} \log_{0,5} y (11) = -\frac{13}{3} \log_{11} y = -\frac{13}{3}u$$

Наша ис ун.

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \Rightarrow t^5 - 16 + 5t = 0 \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$t^4 + \frac{1}{t} = -\frac{13}{3}t - 5 \Rightarrow t^5 + 5t + \frac{16}{3} = 0$$

$$\begin{cases} t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \\ t^5 + 5t + \frac{16}{3} = 0 \end{cases}$$

Замечаем, что есть t -решение,
но $t = -t$, т.е. $t = -t$ - также решение

Замечаем, что $f(t) = t^5 + 5t - \frac{16}{3}$ симметрична
ко t ($f'(t) = 5t^4 + 5 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$)); $f(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ имеет только одно решение

от t ($t^5 + 5t + \frac{16}{3}$ имеет одно решение $t_1 = -t$,

$\Rightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad \log_{11}x + \log_{11}(0,5y) = 0; \log_{11}(0,5xy) = 0$

$\Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим, какие значения принимает $\arccos(\sin x)$
при $x \in \mathbb{R}$ из различных четв.: (такие $\exists k, b \in \mathbb{Z}$)

I) $\frac{\pi}{2} - x$

II) $\pi - x$ - 1-я четв., $\sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \pi + x = x - \frac{\pi}{2}$

III) $x - \pi$ - 2-я четв., $\sin(x - \pi) = -\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(-\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + \pi = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow \arccos(\sin x) =$
 $= \pi - \frac{3\pi}{2} + x = x - \frac{\pi}{2}$

IV) $x - \pi$ - 3-я четв., $\sin(x - \pi) = \sin(x) \cdot (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos(-\sin x) = x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \pi - x + \frac{3\pi}{2} =$
 $= \frac{5\pi}{2} - x.$

1) Решим x -число первых четв.: $10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$,

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} - \text{чел}, \text{не I четв.}$

2) x -число II четв.: $10\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$; $10x - 5\pi = 9\pi - 2x$

~~* 12x = 14\pi; x = \frac{7\pi}{6}~~ - нечел, не II четв.

3) x -III четв.: из 2: $x = \frac{7\pi}{6}$ - нечел

4) x -IV четв.: $25\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow x = 2\pi - \text{нечел}$

Ответы: $-\frac{\pi}{2}, 2\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 25$$

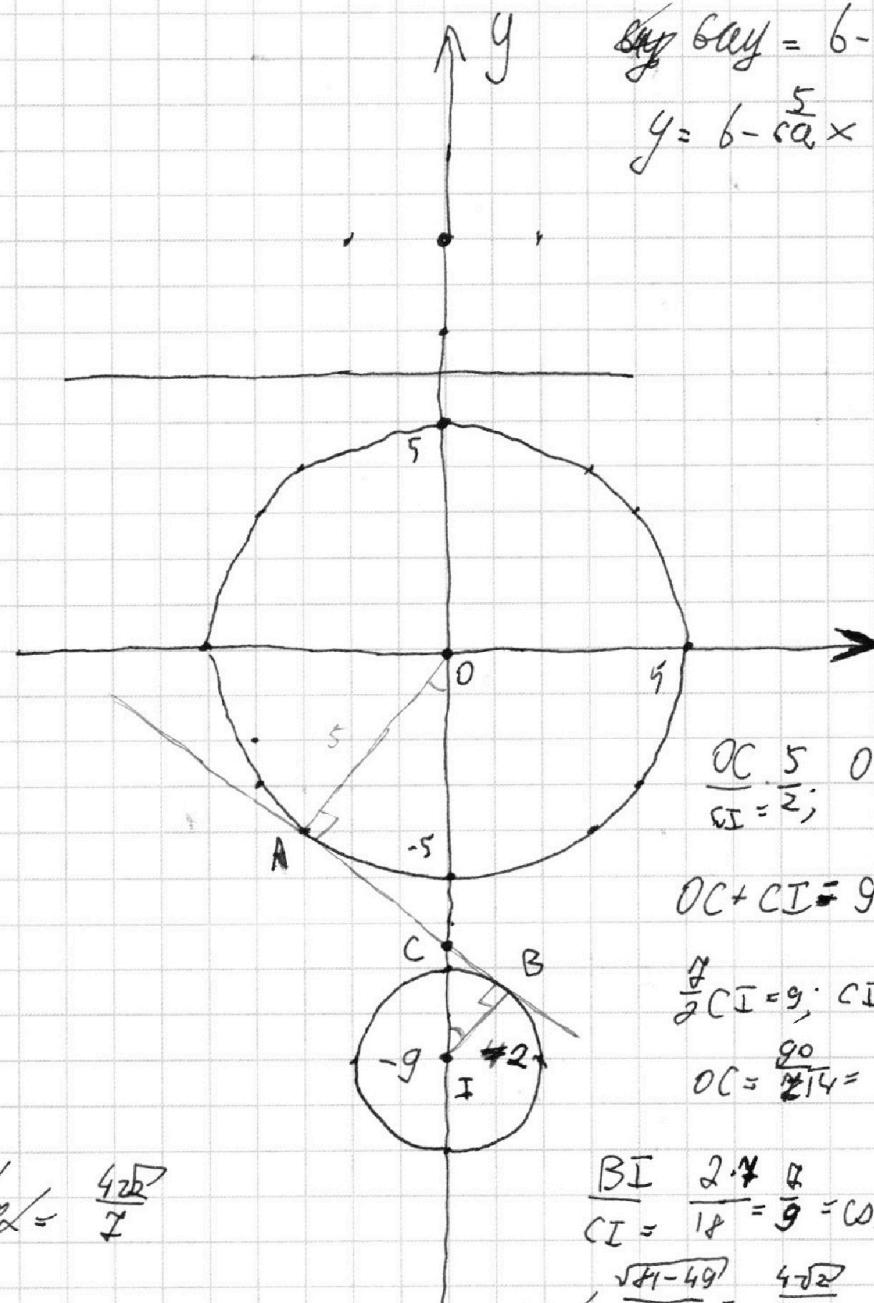
$$x^2y^2 + 16y + 81 + 72 - 81 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$\text{say } 6y = 6 - 5x$$

$$y = 6 - \frac{5}{\alpha} x$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{4xk}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



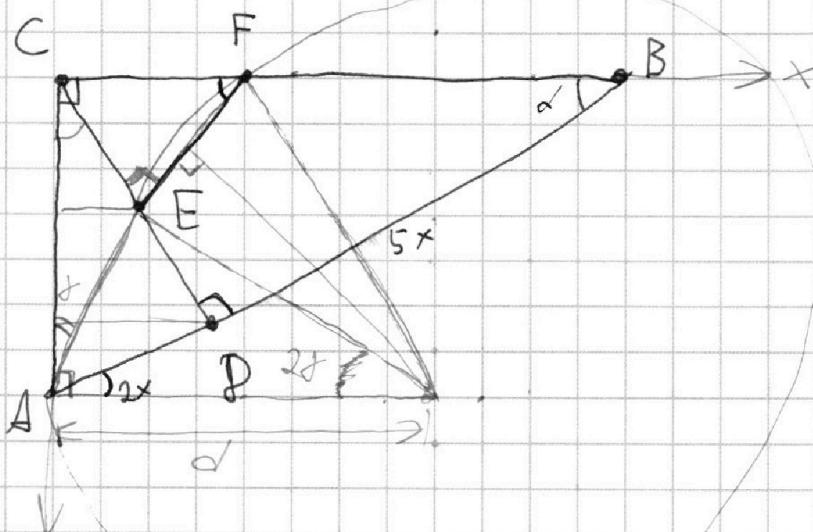
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

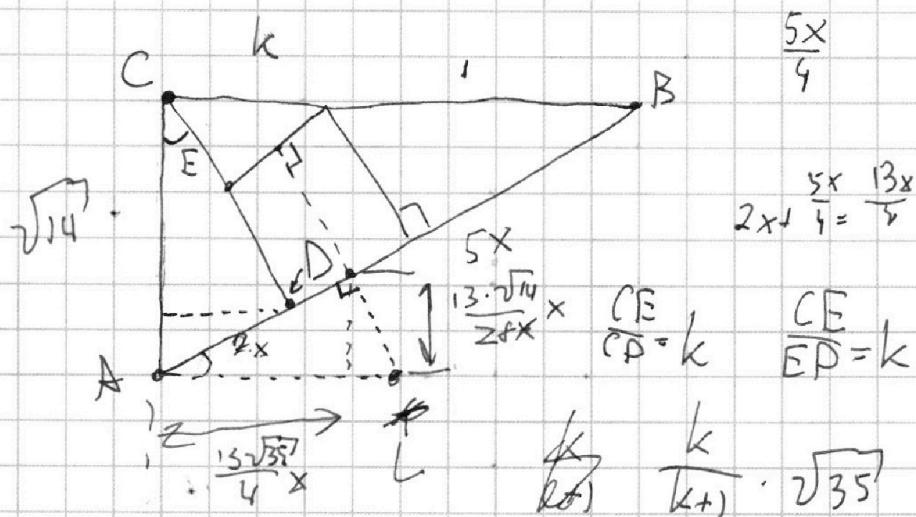
S_AC_D
S_CE_F

$$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$$



E:

d =



49 - 35

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$34^5 + 15u + \frac{16}{3} = 0$$

$$34^5 + 15u - 15 = 0$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 0,5y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$2x + \frac{5}{7}x = \frac{f+5}{7}x$$

$$CD = x\sqrt{10}; \quad \sin x = \frac{\sqrt{10}}{5}; \quad = \frac{13}{4}x$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

$$\cos x = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35} \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\frac{13}{4}x \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{14} \cdot 13}{28}x$$

$$\frac{13}{4} \cdot \frac{\sqrt{35}x}{x} = \frac{13 \cdot \sqrt{35}}{4}x$$

$$\frac{13 \cdot 14}{4 \sqrt{35}}$$

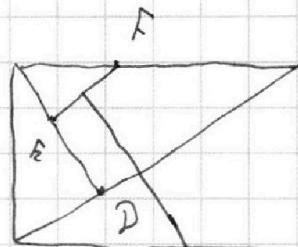
$$AL = \frac{13 \cdot 14}{4 \sqrt{35}} \quad CK = \frac{k}{4 \sqrt{35}} \cdot \sqrt{35}x$$

$$\frac{k}{k+1} = k \quad \left(\frac{13 \cdot 14}{4 \sqrt{35}}x - k \cdot \sqrt{35}x \right)^2 + 14x^2 = \left(\frac{13 \cdot 14}{4 \sqrt{35}} \right)^2$$

$$-2k \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{13 \cdot 14}{4 \sqrt{35}}x^2 + 14x^2 = 0$$

$$AM = 2x + 5x \cdot k = x(2 + 5k)$$

$$AO = \frac{AM}{\cos x} = \frac{x(2 + 5k) \cdot 7}{\sqrt{35}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

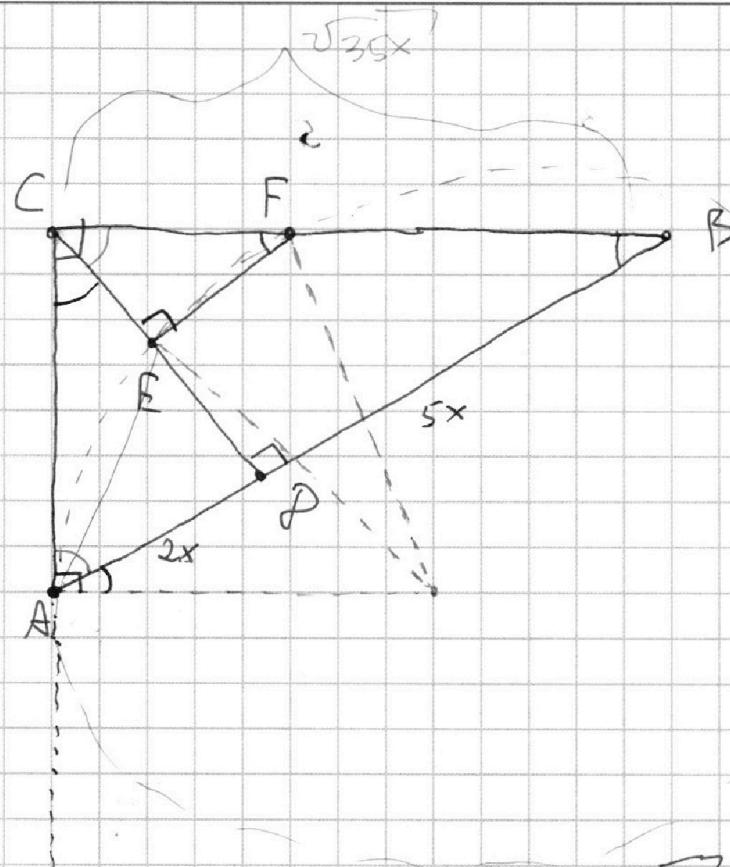
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$25 + 10 = 35$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5} \neq$$

$$\angle ACD = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\sin \angle ACD = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\sin \angle = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$CD = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \angle = \frac{5}{35} = \frac{5\sqrt{35}}{35} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$BC = \sqrt{35} \times$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos \angle = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 36$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 59$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 27$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \end{array} \right. \quad \frac{7}{6}\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 25 \\ + 21 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 28 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 11 \\ + 13 \\ \hline 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 27$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right.$$

$$8 \ 5 \ 17$$

$$\sin x = \cos \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi - 2x}{10} \quad 10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$\alpha: 4 \ 2 \ 12$$

$$\beta: 8 \ 5 - 14$$

$$\gamma: 9\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{26}{3}\pi$$

$$\gamma_1 = 11 \quad x = \frac{7}{6}\pi$$

$$\gamma_3 = 17$$

$$12x = 14\pi$$

$$5\pi + 10x = 9\pi - 2x$$

$$12x = \frac{4\pi}{3}; x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

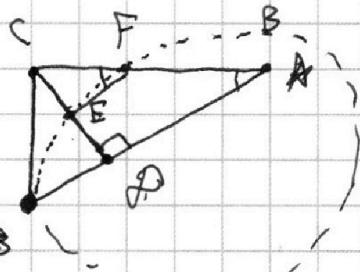


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

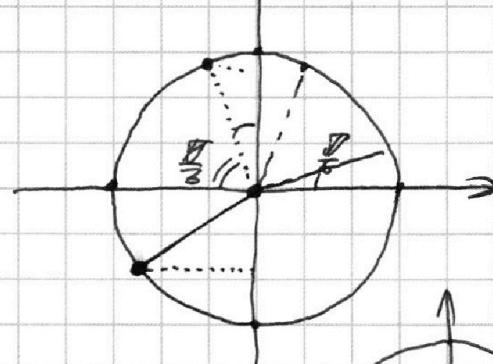
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

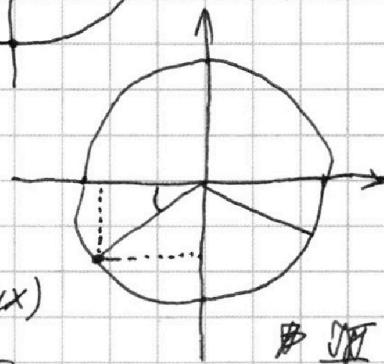
см2.



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\pi$$



$$\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} =$$



$$arccos(\sin x)$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\text{I: } \frac{\pi}{2} - x$$

$$\text{II: } x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{III: } x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{IV: } \frac{5\pi}{2} - x - 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} - x$$

$$\pi - x$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi + x = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x - \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$x - \pi$$

$$\pi - x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} - x$$

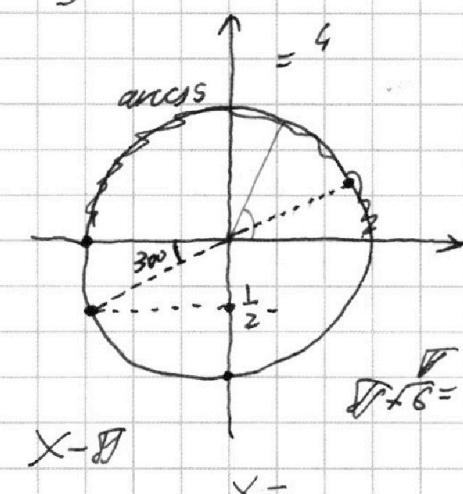
$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x = \frac{9\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{4\pi}{6} =$$

$$\frac{11\pi}{6}$$

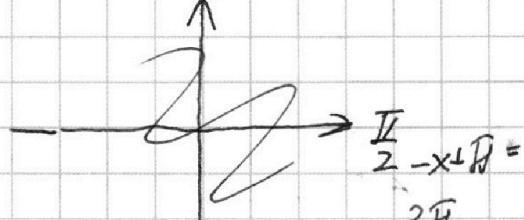
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$



$$x - \pi$$

$$x - \pi$$

$$x -$$



$$\frac{\pi}{2} - x - \pi =$$

$$\frac{3\pi}{2} - x$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$x - \pi$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

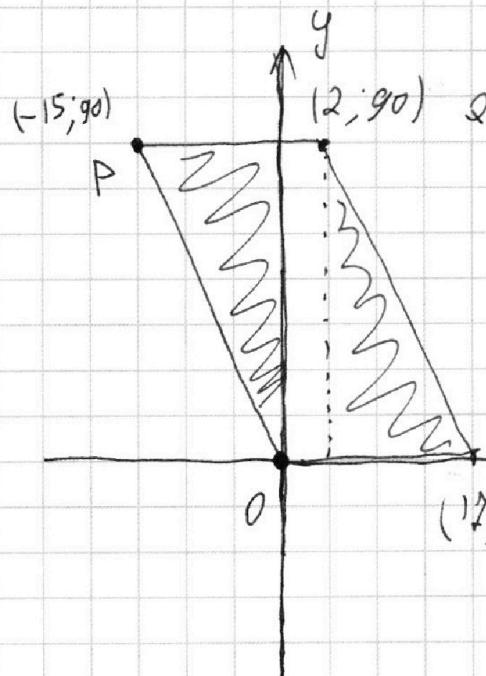
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$1) x_2 = x_1 :$$

$$y_2 - y_1 = 48$$

~~18:4~~

~~12k~~

~~12k = 4k~~

~~k~~

~~12:0~~ ~~13:16~~ ~~10:36~~

~~7:40~~

~~16:4~~ ~~11:32~~ ~~6:44~~

~~5:48~~

~~10:28~~ ~~11:32~~ ~~5:48~~

~~4:52~~

~~9:56~~

~~3:56~~

~~2:60~~

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = c.$$

~~15:8~~

~~14:12~~

~~9~~

~~11:32~~

~~4:52~~

~~3:56~~

~~2:60~~

$$x_1 - x_2 = 1$$

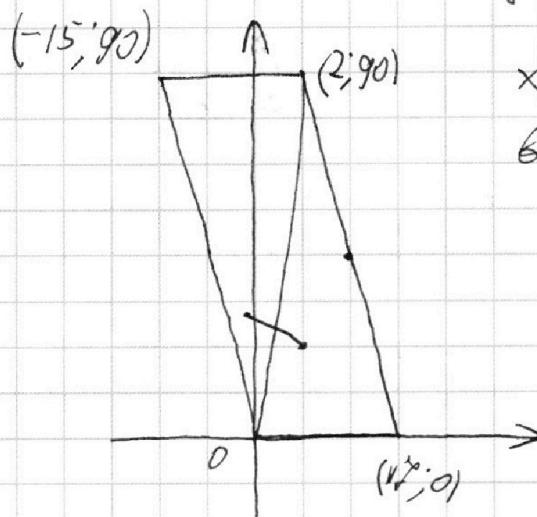
~~6+X~~

$$y_2 - y_1 = 6$$

$$x_2 y$$

$$(x+1; y+44)$$

$$y = 45x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x^{''} = -\log_x^3 11^2 - 5$$

$$\log_x^3 11^2 = \frac{2}{3} \log_x 11 + \frac{16}{3}$$

$$f^4 - 6f = -\frac{2}{3}f - 5 \quad f^4 - \frac{6}{f} + \frac{16}{3f} + 5 = 0$$

$$\log_{11}(0,54) + \cancel{\log_x^4 - \frac{6}{f}} = -\frac{2}{3}f - 5$$
$$f^4 - \frac{6}{f} + \frac{16}{3f} + 5 = 0$$

$$\log_{11}(0,54) + \frac{1}{\log_{11}(0,54)} =$$

$$\log_{x^3}(121) = -2 \log_x^3 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_{11} x$$

$$\log_{0,12543}(11^{-13}) = -13 \cdot \log_{0,54}(11) =$$

$$= -\frac{13}{3} \log_{0,54} 11^5 - \frac{13}{3} \frac{1}{\log_{11}(0,54)} \quad 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

$$f^4 - \frac{6}{f} = -\frac{2}{3}f - 5 \quad f^4 - \frac{16}{3f} + 5 = 0$$

$$f^4 + \frac{1}{f} + \frac{13}{3} \frac{1}{f} = -5 = f^4 - \frac{16}{3f}$$

$$f^4 + \frac{1}{f} \cancel{- \frac{16}{3}} \frac{1}{f} = f^4 - \frac{16}{3f}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{4} \quad \frac{16}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{t} \right) = t^4 - u^4 \Rightarrow ut = 0$$

$$\frac{16}{3} \left(\frac{u+t}{ut} \right) = (t^2 - u^2)(t^2 + u^2) = (t-u)(t+u)(t^2 + u^2)$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0 \quad t^4 + \frac{16}{3u} = \cancel{5} + 5 = 0$$

$$u^4 + \frac{16}{3u} + 5 = 0 \quad t^5 - \frac{16}{3} + 5t = 0$$

$$\cancel{t^5 + 5t - 16} = 0$$

(1;2)

$$\cancel{t^5 + 5t - 16} = 0$$

$$u^5 + \frac{16}{3} + 5u = 0$$

$$3t^5 + 3u^5 + 15u + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15u + \frac{16}{3} = 0$$

$$t+u = \log_{10}(0,5(x+y)) =$$

$$= \log_{10} xy + \log_{10} 0,5 =$$

$$\log_{10} xy - \log_{10} \cancel{t+2}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} t - 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3t} - 5 = 0$$

$$t^5 - 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$6 - \frac{3}{3} = \frac{10}{3}$$

$$3u^5 + 15u + 3t^5 + 15t = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 - b^2ab$$

$$3(u+t)(u^4 - u^3t + u^2t^2 - ut^3 + t^4)$$

$$u^5 - u^4t + u^3t^2 - u^2t^3 + ut^4 + t^5 - u^3t^2 + u^2t^3 - ut^4 + t^5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$g \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

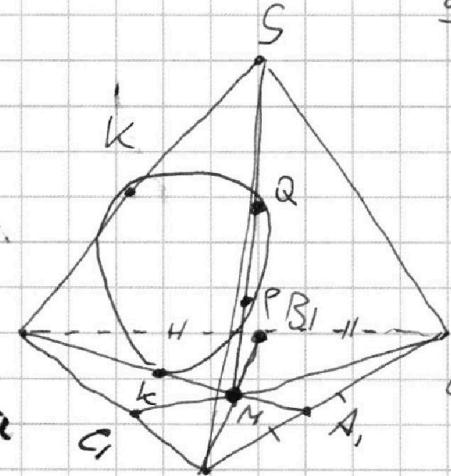
$$-1$$

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

108

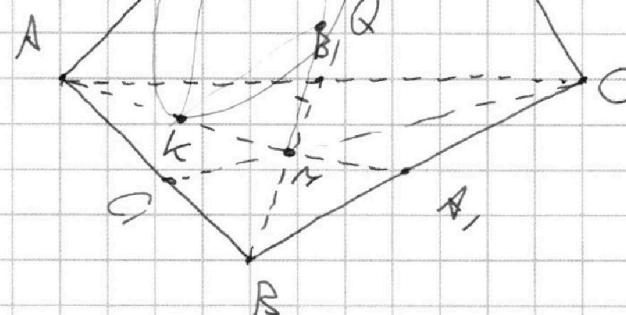
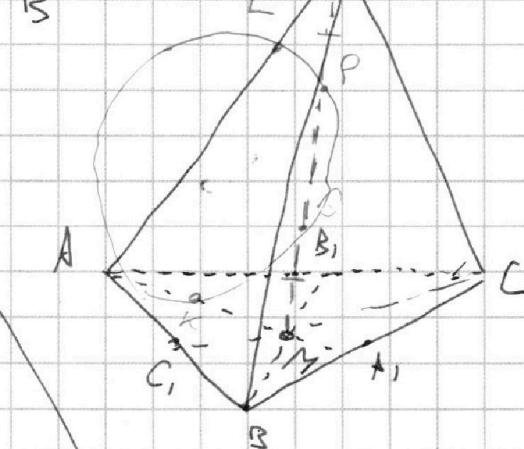
$$\frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{9\pi - 2x}{10} + 2\pi k$$



$$2\pi + \frac{5}{8}\pi$$

$$2\pi \frac{10}{3}$$



$$\frac{10}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$