



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

Пусть  $x, y, z \in \mathbb{N}$ . Тогда можно записать, что для некоторых  $x, y, z \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = y \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = z \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

Перемножим три равенства:  $(abc)^2 = x y z \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$\Rightarrow abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26}$ . Значит,  $\sqrt{xyz} \in \mathbb{N}$ ,

т.е.  $xyz$  — полный квадрат. Тогда каждое из чисел  $x, y, z$  делится на 3.

② перемножим первые два и поделим на 3-е:

$$b^2 = \frac{xy}{z} \cdot 2^2 \cdot 3^8 \cdot 5^{-4} \quad \text{т.к. } b^2 \in \mathbb{N}, \text{ то } \frac{xy}{z} \in \mathbb{N}$$

Значит,  $xy = 5^{4k}$ .

$$\Rightarrow abc \geq 5^2 \cdot 3^{29} \cdot 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26}$$

т.е.  $xyz \geq 5^4 \cdot 3$ . Проведем поиск, когда это так:

( $x = y = 5^2, z = 3$ )

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

и  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^2 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \\ b = 2^2 \cdot 3^4 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{28} \end{cases}$

и  $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

① т.к.  $\forall t \in [-1; 1]$   $\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$ , то исходное уравнение можно переписать:

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 \arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow -5 \arcsin(\sin x) = 2\pi - x.$$

② т.к.  $\arcsin(t)$ ,  $\forall t \in [-1; 1]$   $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , то

$$-5 \arcsin(t) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$$

Тогда  $(2\pi - x)$  также должен лежать на этом отрезке:

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2} - 2\pi \leq -x \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

③ Разобьем решение на рассмотрение отдельных случаев, в зависимости от которых будет дано значение  $\arcsin(\sin x)$ .

1)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Тогда  $\arcsin(\sin x) = x$  и получаем след. равенство:

$$-5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = -2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ - решение, т.к. } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2)  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . Тогда заметим, что  $-\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{2} \leq \pi - x \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}. \text{ Тогда заметим, } \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) \Leftrightarrow$$

$$= \pi - x \text{ (Здесь мы воспользовались тем, что } \sin(x) = \sin(\pi - x) \text{ для}$$

любого  $x \in \mathbb{R}$ ). Получаем:

$$-5\pi + 5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 7\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ - решение, т.к. } \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \leq \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3)  $x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$ , тогда  $\frac{3\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$ . А т.к.

$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$ , то  $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$ . Получим:

$-5x + 10\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 8\pi = 4x \Leftrightarrow x = 2\pi$  — решение, ведь  $\frac{3\pi}{2} =$

$1,5\pi \leq 2\pi \leq 2,5\pi = \frac{5\pi}{2}$ .

4)  $x \in \left[ \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$ . Опять заметим, что  $\frac{5\pi}{2} - 6\pi \leq x - 3\pi \leq \frac{7\pi}{2} - 6\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq$

$\leq x - 3\pi \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 3\pi - x \leq \frac{\pi}{2}$ . (Тогда воспользуемся

свойствами синуса и арксинуса:  $\arcsin(\sin(x - 3\pi)) = \arcsin(\sin(3\pi - x)) =$

$= \arcsin(\sin(x))$ . Значит,  $\arcsin(\sin(x)) = 3\pi - x$  и мы получаем:

~~$5x - 15\pi = 3\pi - 2x \Leftrightarrow 7x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{7}$~~

$5x - 15\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 17\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{6}$ , т.к.  $\frac{17\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ ,

то, очевидно,  $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$  — значит, решение

5) следующий вариант?  $x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$ . Тогда  $-\frac{\pi}{2} \leq x - 4\pi \leq \frac{\pi}{2}$  и

$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 4\pi)) = x - 4\pi$ . Получим:

или  $-5x + 20\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{2}$  — очевидно, решение.

Можно записать ответ:

Ответ:  $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$



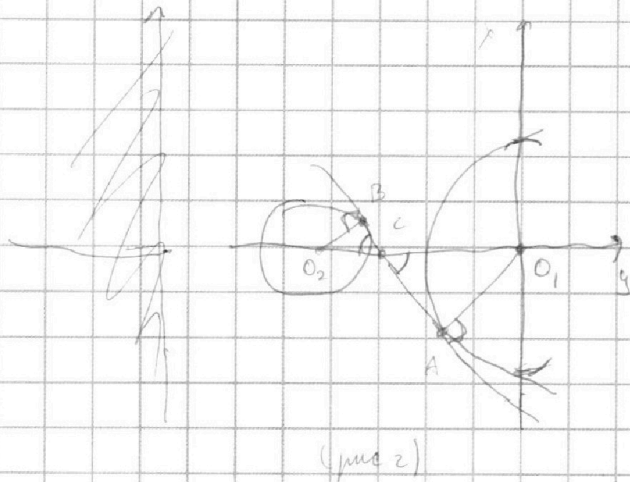
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $\angle O_2BC = \alpha$ ,  $AC$  и  $CB$  —

$\angle O_2CB = \angle O_1CA$ , то

$\triangle O_2BC \sim \triangle O_1AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{O_2C}{AC} = \frac{O_2B}{OA} = \frac{2}{5}$$

А т.к.  $O_2C + CO_1 = 0$ ,  $O_2 = 2$ , то

$$O_2C = 2 \cdot \frac{9}{7} \quad \text{и} \quad O_1C = 5 \cdot \frac{9}{7}$$

Тогда  $\tan k = \tan(\angle O_1CB) = -\tan(\angle O_2CB) = -\frac{O_2C}{O_2B} = -\frac{2 \cdot \frac{9}{7}}{2} = -\frac{9}{7}$

$B$  находится на  $T$ -окружности:  $BC^2 = O_2C^2 - O_2B^2 = 4 + 4 \cdot \frac{81}{49} =$

$$= 4 \left( \frac{81 + 49}{49} \right) = \frac{4}{49} \cdot 32 \Rightarrow BC, \text{ т.е. } BC = \frac{2}{7} \sqrt{32}$$

Тогда  $k = -\frac{2}{\frac{2}{7} \sqrt{32}} = -\frac{7}{\sqrt{32}}$

Решить, что при  $k < -\frac{7}{\sqrt{32}}$  ситуация будет ещё хуже: в т.е. касания с большей окр. стало меньше, не будет иметь одного каска с меньшей. Зато  $k > -\frac{7}{\sqrt{32}}$  подскажет, все ~~ситуации~~ касания будут пересекать меньшую окр. и касаться большей — просто будет её «примыкать», увеличив  $a$ , и будет 4 пересечения.

$$k > -\frac{7}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}} \quad \text{т.е.} \quad a < \frac{35}{6 \cdot 4 \sqrt{2}} = \frac{35}{24 \sqrt{2}}$$

3)  $a < 0$ . Очевидно, что ситуация аналогична, ответом будет

$$a > -\frac{35}{24 \sqrt{2}}$$

Ответ:  $a \in \left( -\frac{35}{24 \sqrt{2}}; \frac{35}{24 \sqrt{2}} \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①  $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{3,3} \frac{1}{12} - 5$ . Преобразуем левую часть

слева:  $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^4(11^{-3}) - 5 = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$ . Вынесем  
исходное выражение, переписав всё число (всё, кроме  $-5$ ):

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x = -5$$

② Аналогично преобразуем и упростим из условия с переменной  
 $y$ , сделав замену  $t = 0,5y$  (тогда  $t^3 = 0,5^3 \cdot y^3 = 0,125 y^3$ ):

$$\log_{11}^4(t) + \log_{11} t = \log_{3,3}(11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4(t) + \log_{11} t + \frac{13}{3} \log_{11} t = -5$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(t) + \frac{16}{3} \log_{11} t = -5$$

③ Теперь заметим, что если первое уравнение имеет  
корень  $x_0$ , то второе уравнение имеет корень  $\frac{1}{x_0}$ . Действительно:

Во-первых  $x_0 > 0$  и  $x_0 \neq 1$ . Значит  $\frac{1}{x_0} > 0$ ,  $\frac{1}{x_0} \neq 1$  - второе  
выражение тоже имеет смысл. Подставим  $t = \frac{1}{x_0}$ :

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x_0}\right) + \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{x_0}\right) = -5 \Leftrightarrow (-\log_{11}(x_0))^4 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x_0 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \quad \text{— что верно, ввиду предполо-$$

жения, что  $x_0$  - корень первого уравнения.

Аналогично, если второе уравнение имеет корень  $t_0$ ,  
( $t_0 > 0$ ,  $t_0 \neq 1$ ), то первое имеет корень  $\frac{1}{t_0}$  ( $\frac{1}{t_0} > 0$ ,  $\frac{1}{t_0} \neq 1$ ):

$$\log_{11}^4 \frac{1}{t_0} - \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{t_0}\right) = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 t_0 + \frac{16}{3} \log_{11}(t_0) = -5$$

что тоже верно по предположению.

Из этого всего мы заключаем, что  $x_0$  - корень первого тогда  
и только тогда, когда  $\frac{1}{x_0}$  - корень второго.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ Стало бы замечать, что первое уравнение имеет единствен-  
ный действительный корень. Видно, так как = имеет

$x = \sqrt[3]{\frac{16}{3}}$ ,  $k \neq 0$ . Тогда первое уравнение принимаем вид

$$\frac{1}{2k} + \frac{16}{3}k = -5 \Rightarrow \frac{1}{2k} = -\frac{16}{3}k - 5.$$

рассмотрим  $f(k) = \frac{1}{2k}$  и  $g(k) = -\frac{16}{3}k - 5$ . Попробуем, что

при  $k > 0$   $f(k) > 0$  и  $g(k) < 0$  — решений  $f(k) = g(k)$  нет.

Но при  $k < 0$   $f(k)$  — монотонно возрастающая функция

( $f'(k) = -4 \cdot \frac{1}{2k^2} < 0$  для всех  $k < 0$ ), а  $g(k)$  — монотонно убыв.

Функция ( $g(k) = -\frac{16}{3}k - 5$ ). Значит, если и есть пересечение, то оно  
единственное.

Для дока-ва ~~существования~~ этого пересечения, введем

$h(k) = f(k) - g(k)$ . Замечая, что  $h(k) \rightarrow -\infty$  при  $k \rightarrow (-\infty)$

(т.к. при  $k \rightarrow -\infty$   $f(k) \rightarrow 0$  и  $-g(k) \rightarrow -\infty$ ), а при

Замечая, что  $h(-3) = \frac{1}{3^2} - 16 + 5 = -11 + \frac{1}{9}$  — что меньше

0, т.к.  $\frac{1}{9} < 1 < 11$ . Зато при  $h(-\frac{1}{2}) = 16 - \frac{2}{3} + 5 = 21 - \frac{2}{3} = \frac{65}{3} > 0$ .

$f(k)$  и  $g(k)$  непрерывны на интервале  $(-3; -\frac{1}{2})$  — значит, и непре-

рывна  $h(k) = f(k) - g(k)$ . Тогда по теореме о промежуточных

значениях:  $h(-3) < 0$ ,  $h(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \exists t \in (-3; -\frac{1}{2}) : h(t) = 0$

$\Leftrightarrow f(t) = g(t)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В) И так, единственность решения (а оно сформулировано)  
доказана. Так как  $x_0$  - корень первого <sup>уравнения</sup>  $x_0$  - корень второго,  
то  $x$  и  $y$  второго единственности корень.

Пусть  $x_0$  действительное корень первого. Тогда второе  
уравнение имеет корень  $t = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x_0}$

В) Таким образом  $x$  и  $y$  принимаем единственное значение

$$xy = x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$$

Ответ:  $xy = 2$



