



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка: Задача 1.
Пусть $ab = k \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$; $bc = l \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$; $ac = m \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$,
где $l, k, m \in \mathbb{N}$.

Тогда перемножим равенства:

$$(abc)^2 = klm \cdot 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc = \sqrt{klm} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Если \sqrt{klm} не рационален, то abc
также иррационально, что противоречит
условию. Так как $k, l, m \in \mathbb{N}$, и

$$\sqrt{klm} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{klm} \in \mathbb{N}$$

Поэтому $\sqrt{klm} \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$

Но $abc : ac$ и $ac : bc \Rightarrow abc : 7^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$

Пример:

При $a = 3^9 \cdot 7^{19}$; $b = 3^5 \cdot 7^{23}$; $c = 3^{14}$

$$abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка:

Задача 2

Обозначим $\text{НОД}(x; y)$ как $(x; y)$.

$$(a+b; a^2-9ab+b^2) = (a+b; (a+b)^2-11ab) = (a+b; -11ab) = \\ = (a+b; 11ab) = d$$

Пусть $(a+b; a^2-9ab+b^2) = d$.

Если d

Пусть d делится на простое число $p \neq 11$

или d делится на $p=11^2$.

Тогда ~~$11ab$~~ $11ab: p$ или $11ab: p_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ab: p \text{ или } ab: 11 \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a:11 \\ b:11 \end{cases}$$

Мы знаем, что $a+b:p$ или $a+b:p_1$

Тогда $\begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases}$ или $\begin{cases} a:11 \\ b:11 \end{cases}$, это противоречит

условию, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

Значит $d = \{1; 11\} \Rightarrow d \leq 11$

(Мы приводим два возможных случая,
разделяя их «или». Перед «или» стоит
первый случай, после — второй)

Пример: $a=1, b=10$.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{1+100-90} = \frac{11}{11} = 1 \text{ — дробь } \frac{11}{11} \text{ сократима на } 11.$$

Ответ: ~~m~~ наибольшее $m=11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Заметим, что выражения под корнями всегда > 0 , т.к. дискриминанты < 0 ($25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 < 0$ и $1 - 4 \cdot 3 < 0$)

Поэтому выражение всегда имеет смысл.

В Р-и, когда левая часть обращается в 0.

$$3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

При $x = \frac{5}{6}$ ~~левая~~ ^{правая} часть тоже

равна 0. Поэтому $\frac{5}{6}$ — корень.

~~При $x < \frac{5}{6}$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 > 3x^2 + x + 1$, поэтому~~

~~левая часть > 0 при $x < \frac{5}{6}$.~~

~~и правая часть при таком x~~

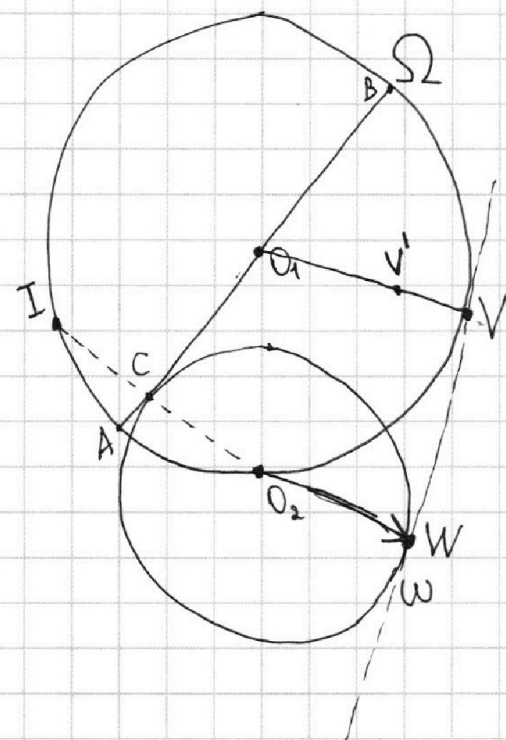
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

Пусть центры ω и Ω — это точки O_2 и O_1 соответственно.

Будем обозначать степень точки X относительно окружности γ как $P_{\omega}^{\gamma}(X)$.

$$P_{\Omega}^{\omega}(C) = -AC \cdot BC = -25$$

Так как $O_1A = O_1B$,

$$O_1C = 12, \quad O_1B = 13, \quad O_1A = 13, \quad O_1O_2 = 13.$$

$$P_{\omega}^{\omega}(O_1) = (O_1C)^2 = 144$$

$O_2C \perp O_1C$, т.к. O_1C — касательная.

Поэтому по теореме Пифагора:

$$(O_1C)^2 + (O_2C)^2 = (O_1O_2)^2$$

$$\text{Отсюда } O_2C = 5$$

Продлим O_2C за C до пересечения с Ω . Получим точку I .

Проведём общую внешнюю касательную как на рисунке, касающуюся Ω и ω

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В тогжак V и W соответственено.

Сделаем параллельный перенос отрезка

O_1O_2 на вектор O_2W . Тогжак O_2 перей-

дет в W . Пусть тогжак O_1 перейдет

в V' . Тогжак по теореме Пифагора для

прямоугольного $\triangle V'VW$:

$$(VW)^2 = (V'W)^2 - (V'V)^2$$

$$(VW)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1V - O_2W)^2 = (O_1O_2)^2 - (O_1B - O_2C)^2 =$$

$$= 13^2 - (13 - 5)^2 = 169 - 64 = 105$$

$$VW = \sqrt{105}$$

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Пусть скорости велосипедиста и мотоциклиста —
 v_B и v_M соответственно, а расстояние
между пунктами А и В — S .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S}{v_B} &= \frac{S}{v_M} + \Delta t_1 \quad (\Delta t_1 = 1.2 \text{ час} - \text{время из условия}) \\ \frac{v_B \cdot S}{v_M} + \Delta S &= \frac{v_M S}{v_B} \quad (\Delta S = 49 \text{ км} - \text{расстояние из условия}) \\ \frac{S}{v_B + \Delta v} &= \frac{S}{v_M + \Delta v} + \Delta t_2 \quad (\Delta t_2 = 36 \text{ мин}; \Delta v = 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - \text{величины из условия}). \end{aligned} \right.$$

~~$$v_B = \frac{S}{\frac{S}{v_M} + \Delta t_1} \quad - \text{из первого ур-я.}$$~~

~~$$v_B = \frac{S v_M}{S + v_M \Delta t_1}$$~~

~~$$\frac{S^2 v_M}{S v_M + v_M^2 \Delta t_1} + \Delta S = \frac{v_M S^2 + S v_M^2 \Delta t_1}{S v_M} \quad - \text{из второго ур-я}$$~~

~~$$\frac{S^2}{S + v_M \Delta t_1} + \Delta S = S + v_M \Delta t_1$$~~

~~$$S^2 + \Delta S \cdot S + \Delta S \cdot v_M \Delta t_1 = S^2 + 2S \cdot v_M \Delta t_1 + v_M^2 \cdot \Delta t_1^2$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Первое и третье ур-я:

$$\begin{cases} v_M S - v_B S - \Delta t_1 \cdot v_M v_B = 0 \\ (v_M + 7) S - (v_B + 7) S - \Delta t_2 \cdot (v_M + 7)(v_B + 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta t_2 (v_M + 7)(v_B + 7) = \Delta t_1 v_M v_B$$

Второе ^{нрв.} и v ур-я:

$$\begin{cases} v_B^2 S - v_M^2 S + \Delta S \cdot v_M \cdot v_B = 0 \\ v_B S - v_M S = -\Delta t_1 \cdot v_M v_B \end{cases}$$

$$(v_B + v_M)(v_B S - v_M S) + \Delta S v_M \cdot v_B = 0$$

$$(v_B + v_M) \cdot (-\Delta t_1 \cdot v_M v_B) + \Delta S v_M v_B = 0$$

$$\begin{cases} v_B + v_M = \frac{\Delta S}{\Delta t_1} \Rightarrow v_B = \frac{\Delta S}{\Delta t_1} - v_M \\ \Delta t_2 v_M v_B + 7(v_M + v_B) \Delta t_2 + 49 \Delta t_2 - \Delta t_1 v_M v_B = 0 \end{cases}$$

$$(\Delta t_2 - \Delta t_1) \left(\frac{\Delta S}{\Delta t_1} - v_M \right) v_M + \frac{7 \Delta S \Delta t_2}{\Delta t_1} + 49 \Delta t_2 = 0$$

$$-0,4(49 - v_M) v_M + \frac{7 \cdot 49 \cdot \frac{6}{10}}{1} + 49 \cdot \frac{6}{10} = 0$$

$$0,4 v_M^2 - 19,6 v_M + 235,2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v_m^2 - 49v_m + 588 = 0$$

~~№~~ ~~м. Вильямс~~

~~$v_m = 196 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$~~ ~~или~~ ~~справь~~ ~~наполнительные~~
~~значения.~~

$$v_m = \frac{49 \pm \sqrt{7^4 - 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}}{2} = \frac{49 \pm 7 \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$v_m = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \quad \text{или} \quad v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Подставляя в ур-е:

$$v_m + v_B = \frac{S}{\Delta t_1} \quad \text{получаем, что } v_B = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

или $v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ соответственно.

Поэтому $v_B = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $v_m = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, т.к. $v_m > v_B$.

Подставим:

$$v_m S - v_B S = \Delta t_1 v_B v_m$$

$$S = \frac{\Delta t_1 v_B v_m}{v_m - v_B} = 84 \text{ км}$$

Ответ: расстояние между А и В равно

84 км.

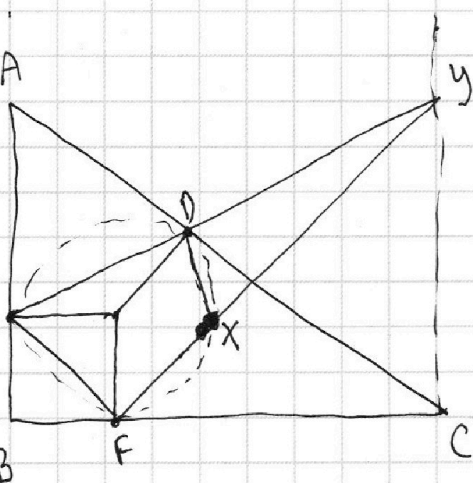
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.

~~Решим задачу в предположении, что EX — диаметр вписанной окружности.~~

Пусть

Решим задачу в предположении, что EX — диаметр вписанной окружности. Пусть

$$EX = x. \text{ Тогда } XY = \sqrt{2}x; \quad FX = \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

$$EF = \frac{\sqrt{2}x}{2} \Rightarrow XY = \sqrt{EF^2 + FY^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{5}x$$

Из подобия $\triangle EFX \sim \triangle XYD$:

$$\frac{EX}{FX} = \frac{XY}{DY}$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{\frac{3\sqrt{2}x}{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{DY}$$

$$DY = \frac{3}{\sqrt{5}}x = \frac{3\sqrt{5}}{5}x$$

$$ED = EX - DY = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{2}{3} \quad (\text{м.к. } \triangle ADE \sim \triangle DYC)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Теперь докажем, что EX — диаметр.

$$\triangle ADE \sim \triangle DYC.$$

$AD = AE$ в силу свойств касательных.

Значит

$$CD = CY.$$

Но $CD = CF$. Поэтому $CF = CY$.

Ещё мы знаем, что $BE = BF$ и

$$\angle EBF = \angle FCY = 90^\circ.$$

Значит тогда $\angle EFB = \angle YFC = 45^\circ$.

Значит $\angle EFY = 90^\circ$. Это равносильно

тому, что EX — диаметр.

Тогда задача решена.

Ответ: $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что~~
~~Левая часть возрастает.~~
~~Это не трудно показать~~
~~Переведем уравнение:~~
~~Заметим, что минимум~~
~~выражения $\sqrt{5x^2 - 5x + 6}$ при $x = \frac{5}{6}$~~
~~(по формуле для квадр. трехчлена).~~
~~Для~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Имеем ур-я:

$$3,28 = \frac{28}{84}$$

$$v_B = \frac{S v_m}{S + v_m \cdot \Delta t_1}$$

$$S(\Delta S - 2v_m \cdot \Delta t_1) = v_m^2 \cdot \Delta t_1^2 - \Delta S \cdot v_m \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \frac{v_m \Delta t_1 (v_m \Delta t_1 + \Delta S)}{\Delta S - 2v_m \Delta t_1}$$

$$\frac{S}{v_B + \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2$$

$$\frac{S}{\frac{S v_m}{S + v_m \Delta t_1} + \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2 - \text{чл. перебора ур-я.}$$

$$\frac{S(S + v_m \Delta t_1)}{S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v} = \frac{S}{v_m + \Delta v} + \Delta t_2$$

$$S(S + v_m \Delta t_1)(v_m + \Delta v) = S(S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v) +$$

$$S^2 v_m + S^2 \Delta v + S v_m^2 \Delta t_1 + S v_m \Delta v \Delta t_1 + \Delta t_2 (v_m + \Delta v)(S v_m + S \Delta v + v_m \Delta t_1 \Delta v)$$

$$= S^2 v_m + S^2 \Delta v + S v_m \Delta v \Delta t_1 + \Delta t_2 S v_m^2 + \Delta t_2 S \Delta v \cdot v_m + \Delta t_2 \cdot \Delta t_1 \cdot v_m^2 \cdot \Delta v + \Delta t_2 S v_m \Delta v + \Delta t_2 \cdot S \cdot \Delta v^2 + \Delta t_2 \cdot \Delta t_1 \cdot v_m \cdot \Delta v^2$$

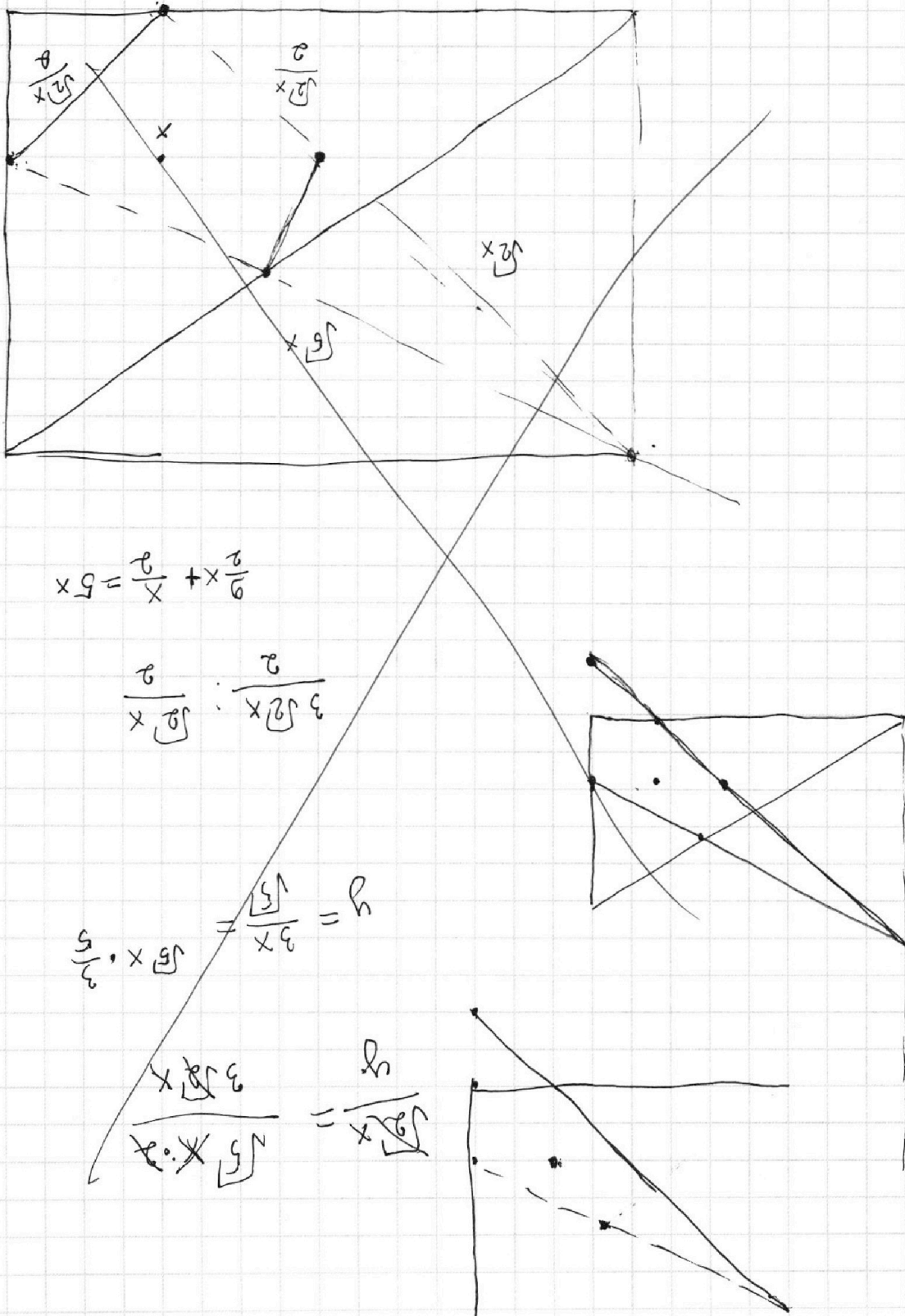
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



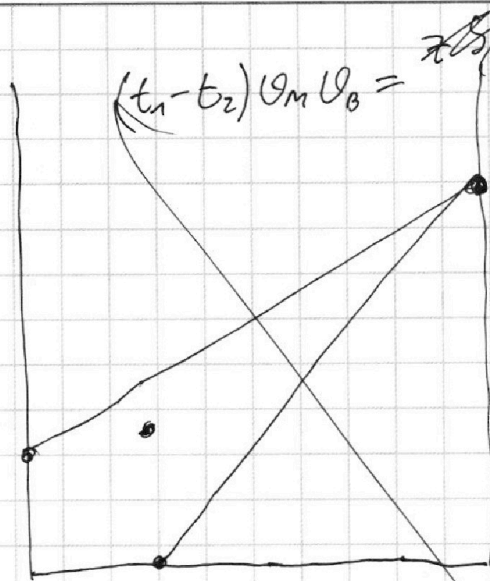
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(t_1 - t_2) v_m v_b = \dots$$

$$7 v_b (7 + \frac{S}{v_m}) = 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{6}{10} = 3 \cdot 49 \cdot \frac{6}{10}$$

$$49 + \frac{S}{v_m} = 56$$

$$4 \cdot 49$$

$$v_b S - v_m S = -\Delta t_1 \cdot v_m \cdot v_b$$

$$147 \cdot 4$$

$$3 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$$\frac{8 \cdot 49 \cdot 6}{10}$$

$$a + b = 49$$

$$ab =$$

$$\begin{array}{r} 2352 \quad | \quad 4 \\ - 20 \quad \quad | \\ \hline 35 \quad \quad | \\ - 32 \quad \quad | \\ \hline 32 \end{array}$$

$$FC = 588 = \frac{447 \cdot 3}{12} = \frac{149}{27}$$

$$\frac{S}{v_m} + 60 \text{ мин} = \frac{S}{v_b}$$

$$\frac{588}{4} = 147$$

$$\frac{18}{16} = \frac{28}{28}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 49 \\ 48 \\ \hline 392 \\ 196 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$S v_b + 60 v_m v_b - S v_m = 0$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + 36 = \frac{S}{v_b + 7}$$

$$S v_b + 7 S + 36 () () -$$

$$- S v_m - 7 S = 0$$

$$4 \cdot 49 = 98 \cdot 2 = 196$$

$$60 v_m v_b = 36 (v_m + 7) (v_b + 7)$$

$$0,4$$

$$\frac{24}{60} = \frac{4}{10}$$

$$196^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2352$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(S \vartheta_m^2 \Delta t_1 - S \vartheta_m^2 \Delta t_2 - \vartheta_m^2 \Delta \vartheta \cdot \Delta t_1 \Delta t_2) - (S \vartheta_m \Delta \vartheta \cdot \Delta t_2 + \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2) - S \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_2 = 0$$

Из второго уравнения:

$$S = \frac{\vartheta_m \Delta t_1 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S)}{\Delta S - 2\vartheta_m \Delta t_1}$$

Подставим: и сократим на $(\Delta S - 2\vartheta_m \Delta t_1)$

$$\begin{aligned} & (\vartheta_m^3 \Delta t_1^2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) - \vartheta_m^3 \Delta t_1 \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) - \vartheta_m^2 \Delta \vartheta \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 \times \\ & \times (\Delta S - 2\vartheta_m \Delta t_1)) - \vartheta_m^2 \Delta \vartheta \cdot \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) \cdot \Delta t_1 + \\ & + \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 (\Delta S - 2\vartheta_m \Delta t_1) - \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \cdot \Delta t_1 \Delta t_2 (\vartheta_m \Delta t_1 + \Delta S) = \\ & = 0 \quad | : \vartheta_m \Delta t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_m^3 \Delta t_1^2 + \vartheta_m^2 \Delta t_1 \Delta S - \vartheta_m^3 \Delta t_2 \Delta t_1 - \vartheta_m^2 \Delta t_2 \Delta S - \\ & - \vartheta_m \Delta \vartheta \Delta t_2 \Delta S + \underline{2\vartheta_m^2 \Delta \vartheta \Delta t_1 \Delta t_2} - \underline{2\vartheta_m^2 \Delta \vartheta \Delta t_2 \Delta t_1} - \\ & - 2\vartheta_m \Delta \vartheta \Delta t_2 \Delta S - \Delta \vartheta^2 \Delta t_2 \Delta S + 2\vartheta_m \Delta \vartheta^2 \Delta t_1 \Delta t_2 - \\ & - \vartheta_m \Delta \vartheta^2 \Delta t_1 \Delta t_2 - \Delta \vartheta^2 \Delta t_2 \Delta S = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_m^3 (\Delta t_1 - \Delta t_2) \Delta t_1 + \vartheta_m^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2) \Delta S + \vartheta_m (\Delta t_1 \Delta \vartheta - 3\Delta S) \Delta \vartheta \Delta t_2 + \\ & + (-2\Delta \vartheta^2 \Delta t_2 \Delta S) = 0 \end{aligned}$$

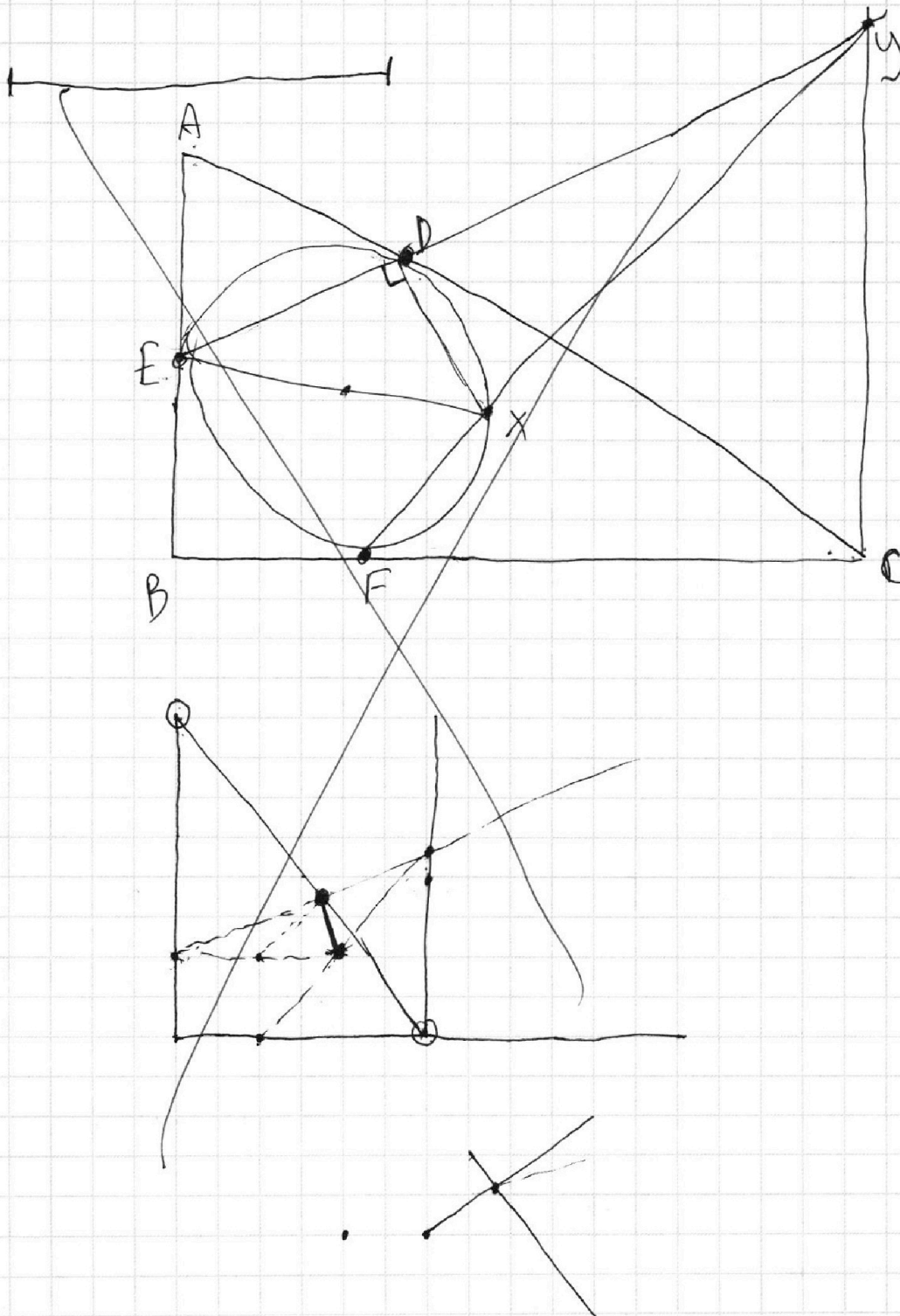
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{5zx + zy - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$8yz + xz = 15yx$$

$$(4x-y)(4x+y) + (3x-z)(3x+z) \quad \frac{86}{3}xz - 8z^2 - 25x^2 = 0$$

~~$$(3z-x)(3z-y) = xz$$~~

$$y = 5x - 3z$$

$$8z(5x - 3z) + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$25x^2 - (5x - 3z)^2 - z^2 =$$

$$(5x - 3z)^2 + 3z^2$$

$$= \frac{25x^2 - 25x^2 - 9z^2 + 30zx - z^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2} = \frac{z(30x - 10z)}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$

$$40xz - 24z^2 + xz =$$

$$= 475x^2 - 45xz$$

$$86xz - 24z^2 - 75x^2 = 0 \quad | :3$$

$$\frac{86}{3}xz - 8z^2 - 25x^2 = 0$$

$$25x^2 - 30xz + 12z^2 =$$

$$= -\frac{4}{3}xz + 4z^2$$

$$x = \frac{30z \pm \sqrt{900z^2 - 4 \cdot 25 \cdot 12z^2}}{2 \cdot 25}$$

$$\frac{30x - 10z}{- \frac{4}{3}x + 4z} =$$

$$= \frac{90x - 30z}{12z - 4x}$$

$$= \frac{90x - 30z}{12z - 4x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\Delta U \Delta t_2 \Delta S - 2 \Delta U \Delta t_2 \Delta S + \Delta U^2 \Delta t_1 \Delta t_2.$$

$$24 \cdot 60 + 24 \cdot 49 + (7 - 3 \cdot 49) \cdot 4,2 =$$

$$= 2 \cdot 49 \cdot 0,49 = 0$$

$$24 \cdot 60 + 24 \cdot 49 - 14 \cdot 42 - 4802 = 0$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 98 \\ 49 \\ \hline 882 \\ 392 \\ \hline 4802 \end{array}$$

$$24 = 6 \cdot 4$$

$$25 \cdot 49 = 5^3 = 125$$

$$= 500 +$$

$$24 \cdot 60 + 24 \cdot 49 - 14 \cdot 42 - 48$$

$$120 + 98 - 49 - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$3x^2 - 5x + 6$~~
 ~~$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 72}}{6}$~~

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 1$

$x = 1$
 $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$
 $x = t + \frac{5}{6}$

$-\frac{1}{12} + 12$

~~$3x^2 - 5x + 6$~~

$\frac{25}{12} - \frac{25}{12} + 6 =$
 $= -\frac{25}{12} + \frac{72}{12} = \frac{47}{12}$

$72 - 5 = 47$

~~$3x^2 - 5x + 6$~~

$-\frac{b}{2a} = \frac{5}{6}$

$-\frac{1}{12}$

$x = (t + 0)$

~~$3t^2 + 6t + 30^2 - 5t - 30 + 6$~~

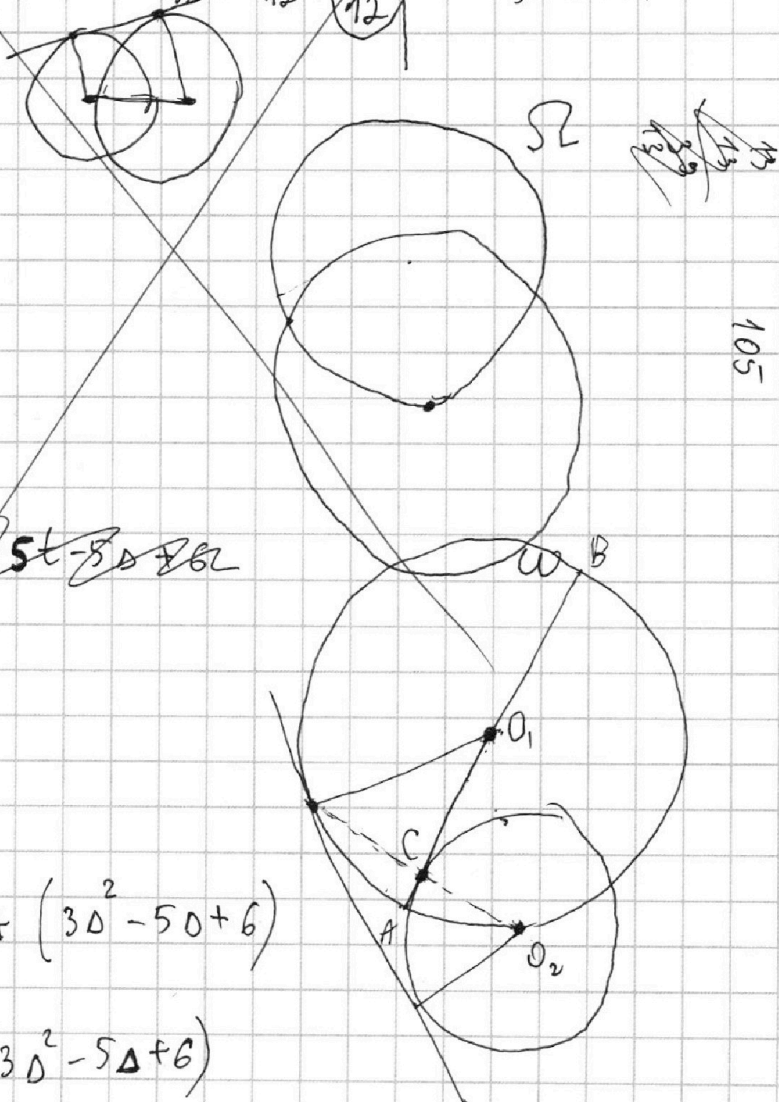
~~$3x^2 - 5x + 6$~~

~~$3t^2 + 6t + 30^2 - 5t - 30 + 6$~~

$3t^2 + (60 - 5)t + (30^2 - 50 + 6)$

$(60 - 5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (30^2 - 50 + 6)$

$360^2 - 600 + 25 - 360^2 + 600 - 72$



105

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-5x + 6 \geq x + 1$$

$$6x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$x < \frac{5}{6}$$

$$-\frac{1}{42} + 1 = \frac{11}{42}$$

$$\geq \frac{11}{12}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$(a+b) - \frac{11ab}{a+b}$$

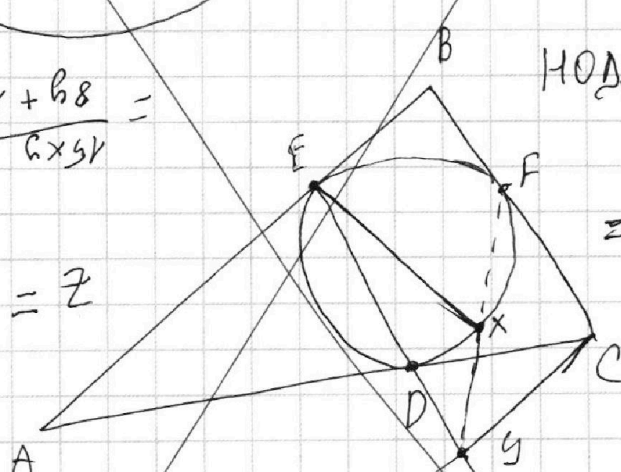
$$\text{НОД, } (a+b, (a+b)^2 - 11ab) =$$

$$= (a+b; 11ab)$$

36

$$\frac{x + b_8}{6x51} =$$

$$\frac{\frac{b}{1} + \frac{x}{8}}{51} = z$$



$$\frac{6-x44}{(x-26)^2} \cdot \frac{11}{(z-x8)51}$$

$$ab = k \cdot 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = l \cdot 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = m \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$(abc)^2 = klm \cdot 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$23 + 19 = 42$$

$$28 - 19 = 9$$

$$36 - 17 = 19$$

$$56 : 2 = 28 \quad 42 - 19 = 23$$

~~28 19~~

$$28 - 14 = 14$$

$$\frac{z - \frac{b}{1} + \frac{x}{8}}{51} = \frac{\frac{b}{1} - \frac{x}{8}}{8} = x$$