



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot x \\ b &= 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot y \\ c &= 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot z \end{aligned}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot xyz$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - целые неотрицательные числа.
где x, y, z не делятся на 2 и 7.
 $x, y, z \in \mathbb{N}; xyz \geq 1$

Тогда делимость из условия можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 51 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26$ (т.к. все числа целые).

Тогда $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \cdot 1$

Пример где $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$:

$$a = 2^9 \cdot 7^{10} \quad b = 2^6 \cdot 7^{11} \quad c = 2^6 \cdot 7^{27}$$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^4 + 1 + 14x^2 = 100 - 36x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$t = x^2 \quad 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\Delta = 25^2 - 49 \cdot (-99) = 5976 =$$

$$= 4 \cdot 1369$$

$$t = \frac{-25 \pm 2\sqrt{1369}}{49}$$

$$t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{1369} - 25}{49}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{1369} - 25}}{7}$$

$$AB = 8x = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{ОТВЕТ: } AB = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{2\sqrt{1369} - 25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$t = 2x^2 + 2x + 1 \quad y = 2 - 7x;$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$\begin{cases} t+y+t-2\sqrt{(t+y)t} = y^2 \\ t+y \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ всегда верно, т.к. $2x^2 + 2x + 1 > 0$

$$2t - y(y-1) = 2\sqrt{(t+y)t}$$

$$4t^2 + y^2(y-1)^2 - 4ty(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y + (y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(2 - 7x)^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$t+y = 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 41 = 244$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

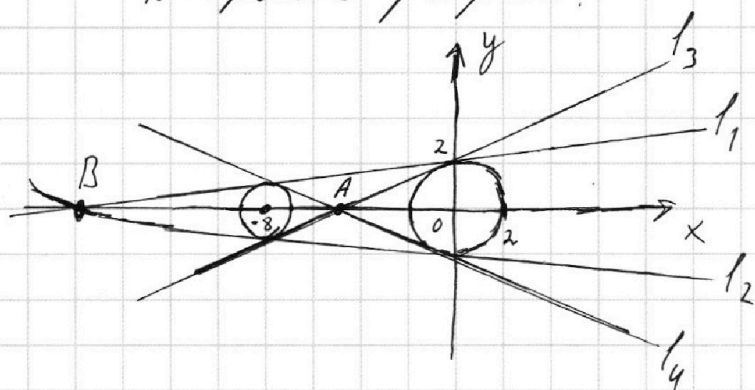
✓6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ - окружность с центром $(-8; 0)$
и радиуса 1.

$x^2 + y^2 \leq 4$ - окружность с центром $(0; 0)$
и радиуса 2.

Построим графики:



Чтобы прямая
имела ровно

2 решения,

необходимо,

чтобы прямая

вида $y = ax + 10b$

касается обеих окруж-

ностей. Всего таких

прямых ровно 4: две внеш-

ние и две внутренние общие
касательные. (изображены
на рисунке).

Прямые прямые

l_1 и l_2 , а также

l_3 и l_4 симметричны

относительно Ox .

Пусть l_1 и l_2 пересекаются в точке B, а l_3 и l_4 в
точке A.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Примеч x -координата точки A равна

$$x_A - \frac{8}{3} \cdot 2 = -5 \frac{1}{3}, \text{ и точки } B$$

$$x_B = -8 \cdot 2 = -16$$

$$\text{и } A(-5 \frac{1}{3}; 0) \text{ и } B(-16; 0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

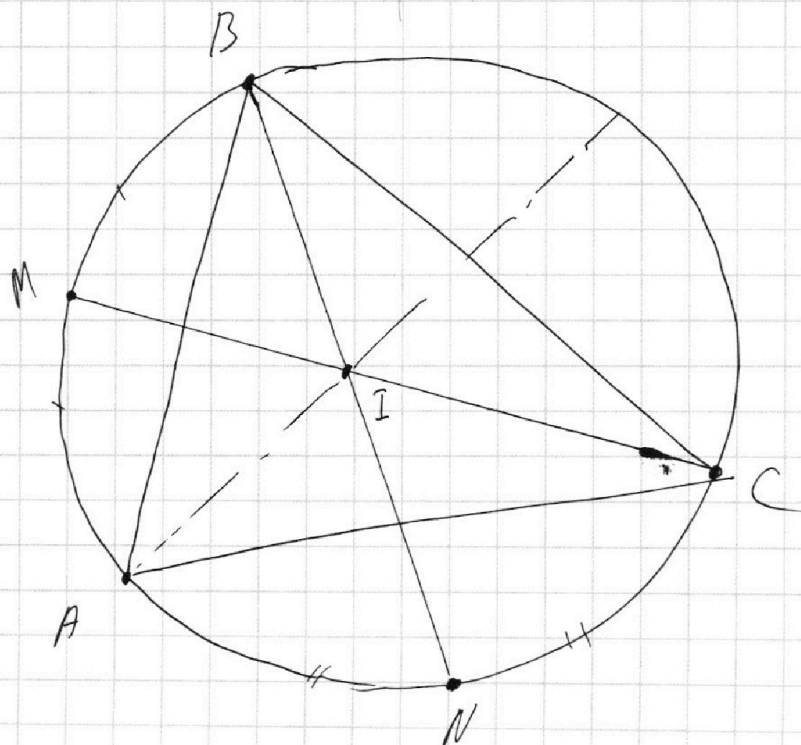
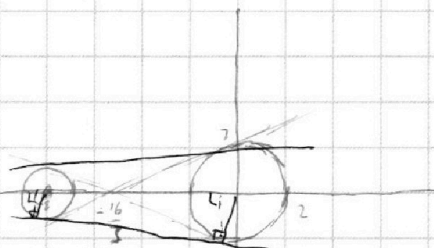
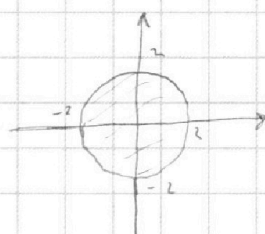
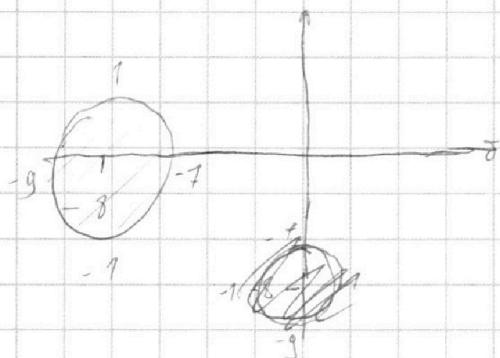
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$y = ax + 10b$$

$$(x+3)^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$





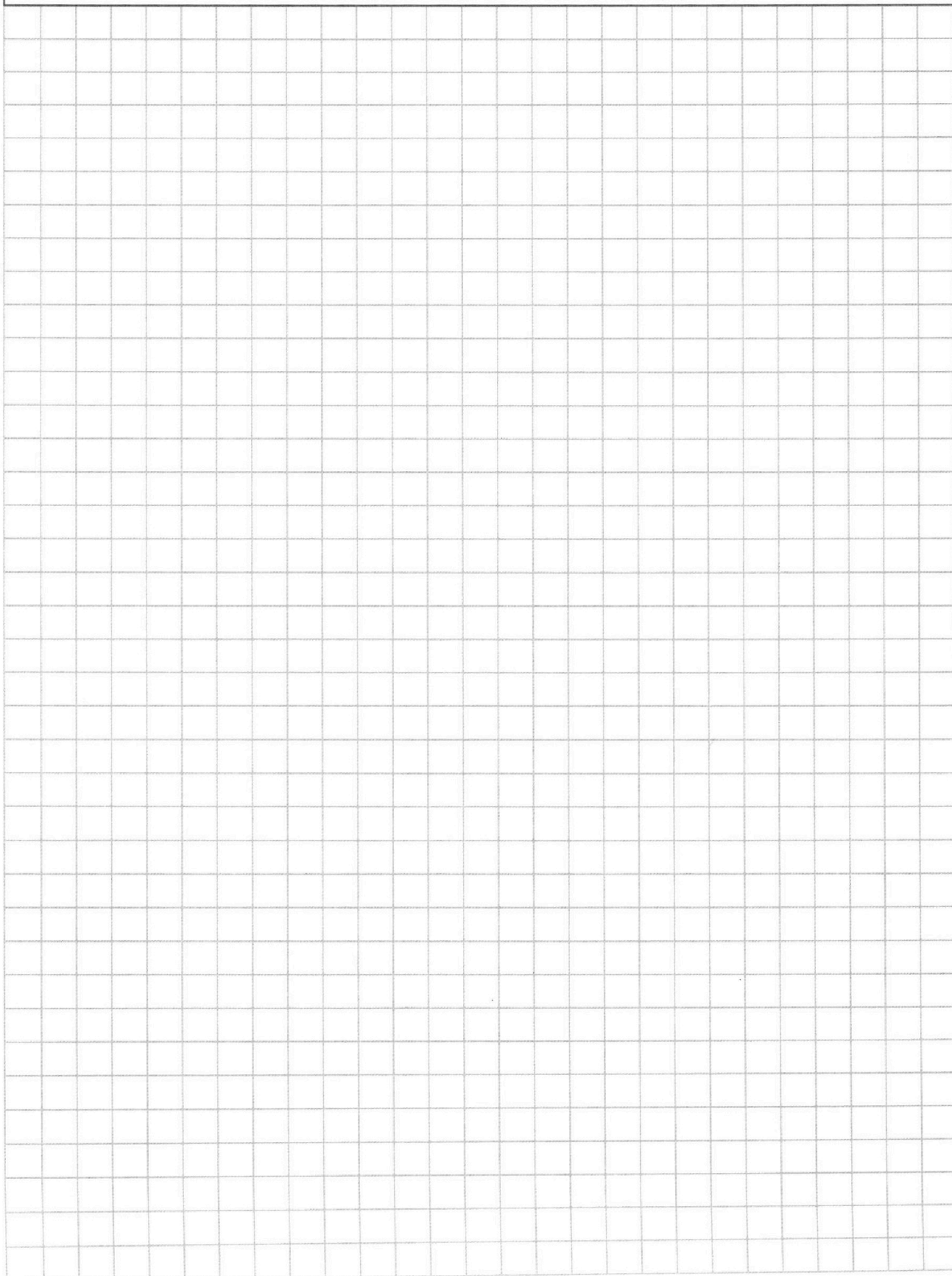
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$122 \cdot 2 = 244$$

$$= 61 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{t+y} - \sqrt{t} = y$$

$$t+y+t-2\sqrt{(t+y)t} = y^2$$

$$2t+y-y^2 = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2t+y-y(y-1) = 2\sqrt{t^2+yt}$$

$$4t^2 + y^2(y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4(t^2 + yt)$$

$$4t^2 + y^2(y-1)^2 - 4t \cdot y(y-1) = 4t^2 + 4yt$$

$$y(y-1)(y(y-1)-4t) - 4yt = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1) - 4yt = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4yt(y-1+1) = 0$$

$$y^2(y-1)^2 - 4y^2t = 0$$

$$y^2((y-1)^2 - 4t) = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(y-1)^2 - 4t = 0$$

$$(2-7x)^2 = 0$$

$$(1-7x)^2 - 4(2x^2+2x+1) = 0$$

$$2-7x=0 \quad 2 \cdot \frac{1}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 = 1 + 49x^2 - 14x - 8x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$= \frac{8-20}{49} + 3 = \frac{-12+150}{49}$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 121 - (-3) \cdot 49 = 249$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{249}}{49} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{49}$$

$$2 \cdot \frac{1}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$(y_2 + y_1) - k(x_2 + x_1) = 2k$$

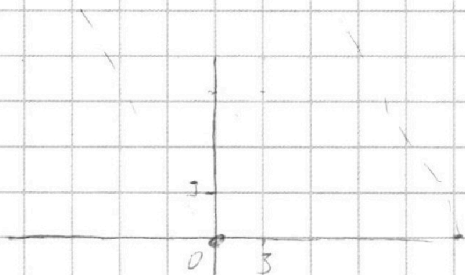
$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

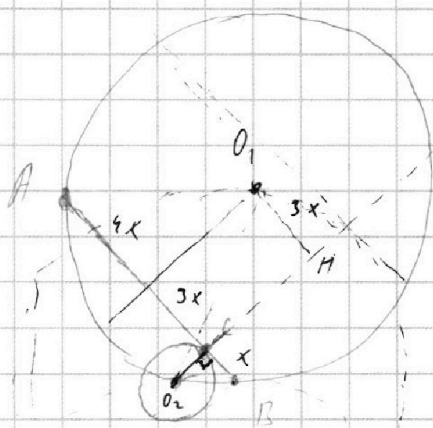
$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$y_2 + y_1 = k(x_2 + x_1) + 2b$$



$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = -2x_2 + 12$$



$$25 = 3x + O_1H^2$$

$$O_1H^2 = 25 - 3x$$

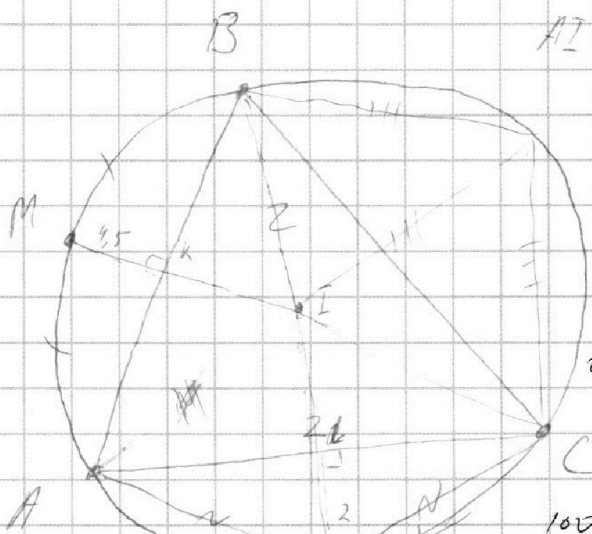
$$25 - (O_2H - 1)^2 = 4x$$

$$25 - (\sqrt{25 - 3x} - 1)^2 = 4x$$

$$25 - 25 + 3x - 1 + 2\sqrt{25 - 3x} = 4x$$

$$BM^2 = \frac{AB^2}{4} + 4,5^2$$

$$IK = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + 4,5^2} - 4,5 = 1,6$$



$$x + 1 = 2\sqrt{25 - 3x}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4 \cdot 25 - 12x$$

$$CN^2 = \frac{AC^2}{4} + 4$$

$$IL = \sqrt{\frac{AC^2}{4} + 4} - 2$$

$$IK = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + 4,5^2} - 4,5 = 1,6$$

$$x^2 + 14x - 99 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 49 - (-99) = 148$$

$$x = -7 \pm 2\sqrt{37}$$

$$= 2\sqrt{37} - 7$$

$$= \frac{AC^2}{4} + 4 + 4 - 4\sqrt{\frac{AC^2}{4} + 4}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 198 \\ 2 \\ \hline 37 \\ 7 \\ \hline 148 \\ 2\sqrt{37} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\alpha_1 + \beta_1 = 14$
 $\beta_1 + \gamma_1 = 17$
 $\gamma_1 + \alpha_2 = 20$
 $\alpha_1 = 10 - \beta_1$
 $\alpha, b, c \in \mathbb{N}$
 $\gamma_1 - \alpha_1 = 3$
 $\gamma_1 - 10 + \beta_1 = 3$
 $\beta_1 = 13$
 $\gamma_1 = 11,5$
 $\alpha = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot X$
 $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot Y$
 $c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2} \cdot Z$
 $a \cdot b = 2^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot XY$
 $b \cdot c = 2^{\beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} \cdot YZ$
 $a \cdot c = 2^{\alpha_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \gamma_2} \cdot XZ$
 $\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$
 $\beta_1 + \gamma_1 \geq 17$
 $\gamma_1 + \alpha_2 \geq 20$
 $\alpha_1 - \gamma_1 \geq -3$
 $2\alpha_1 \geq 17$
 $\alpha_1 \geq 8,5$
 $\alpha_1 \geq 9$
 $\beta_1 \geq 5,5$
 $\beta_1 \geq 6$
 $\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_1 + \gamma_1 \geq 17$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 12$
 $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 20$
 $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 12$
 $2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 51$
 $21 + 18 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 20,5$
 $= 39 + 15 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 24,26$
 $= 54$
 $2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq 64$
 27
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 32$
 $a \cdot b \cdot c \geq 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot XYZ \geq 2^{54} \cdot 7^{32} \cdot 1$
 $XYZ \geq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Получаем, что $\alpha_1 \geq 9$ $\beta_1 \geq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 15$. Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 52$$

Также имеем $\alpha_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 \geq 20 - 14$

$$\gamma_1 - \beta_1 \geq 6$$

$$\gamma_1 - \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 6 + 17 \quad 2\gamma_1 \geq 23$$

$$\gamma_1 \geq 12 \text{ (т.к. } \gamma_1 \text{ - целое неотрицательное)}$$

Получаем: $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 9 + 12 = 21$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 6 + 12 = 18$$

В итоге:

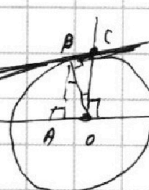
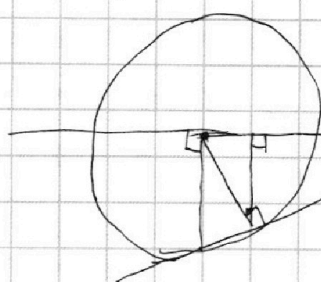
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 54$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 27$$

Т.е. в abc произведение чисел 2 вхождений в строку ≥ 27

$$\text{Тогда мин. } abc = 2^{27} \cdot 7^{37}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^6$ $c = 2^{11} \cdot 7^2$



$$\frac{AB}{BC} = \frac{OB}{CO}$$

$$CO = \frac{OB^2}{AB}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

Заметим, что если
какое-то из чисел a, b или c
делится на простое $p \neq 2, 7$,
то можно убрать это p из

разложения на простые числа a, b, c ,
при этом на делимости из условия это никак не
повлияет, а произведение abc уменьшится $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при минимальном abc числа a, b и c содержат
и разложения на простые только числа 2 и 7.

Тогда:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}, \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}, \quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ — целые неотрицательные числа.

Тогда делимости из условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \beta_1 - \beta_1 - \gamma_1 \geq 14 - 17$$

$$\alpha_1 - \gamma_1 \geq -3$$

$$\alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 - 3$$

$$2\alpha_1 \geq 17 \quad \alpha_1 \geq 9 \text{ (т.к. } \alpha_1 \text{ — целое неотрицат.)}$$

$$\text{Также: } \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \gamma_1 \geq 17 - 20; \quad \beta_1 - \alpha_1 \geq -3$$

$$\beta_1 - \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_1 \geq -3 + 14 \quad 2\beta_1 \geq 11 \quad \beta_1 \geq 6 \text{ (т.к. } \beta_1 \text{ — целое неотрицательное)}$$

$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$, т.е.
в abc входит число 7 в степени не меньшей 37.