



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и  $2,5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим разложение  $a, b, c$  на простые множители: пусть  $2$  входит в  $a$  в степени  $\alpha_2$ ; в  $b$  в  $\beta_2$ ; а в  $c$  в степени  $\gamma_2$ . Аналогично с семёркой. Получаем:

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot p_1^{\alpha_{p_1}} \cdot p_2^{\alpha_{p_2}} \dots \\ b &= 2^{\beta_2} \cdot 7^{\beta_7} \cdot p_1^{\beta_{p_1}} \cdot p_2^{\beta_{p_2}} \dots \\ c &= 2^{\gamma_2} \cdot 7^{\gamma_7} \cdot p_1^{\gamma_{p_1}} \cdot p_2^{\gamma_{p_2}} \dots \end{aligned}$$

По условию:  $\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 23 \end{cases}; \begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \beta_7 + \gamma_7 \geq 18 \\ \alpha_7 + \gamma_7 \geq 39 \end{cases}$

( $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{Z}, \geq 0$ ; т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ) Пусть  $ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot p_1^{\alpha_{p_1}} \cdot p_2^{\alpha_{p_2}} \dots$ ;  $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot q_1^{\beta_{q_1}} \cdot q_2^{\beta_{q_2}} \dots$ ;  $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k_1^{\gamma_{k_1}} \cdot k_2^{\gamma_{k_2}} \dots$  ( $p_i, q_i, k_i \in \mathbb{N}$ )

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим  $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$ :

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot p_1^2 \cdot q_1^2 \cdot k_1^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot p_1^2 \cdot q_1^2 \cdot k_1^2, \text{ тогда } abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$$

$abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2 p_1^2 q_1^2 k_1^2}$ . Поскольку  $abc$  - натур.  $\Rightarrow 2 p_1^2 q_1^2 k_1^2$  - полный квадрат  $\Rightarrow p_1^2 q_1^2 k_1^2 : 2$  (в нечётной степени, т.е. хотя бы 1)

Из (II) системы получим, что  $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 39$ ,  $\Rightarrow abc : 7^{39} \Rightarrow \sqrt{2 p_1^2 q_1^2 k_1^2} : 7^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1^2 q_1^2 k_1^2 : 7^{10}$ . Чтобы минимизировать  $abc$ , необходимо взять минимальное  $p_1^2 q_1^2 k_1^2$ , удовл. условию:  $p_1^2 q_1^2 k_1^2 = 2 \cdot 7^{10}$  для  $\forall p_1^2 q_1^2 k_1^2 \ll 2 \cdot 7^{10}$  не выполн. условие  $abc$ .

Построим пример для  $p_1^2 q_1^2 k_1^2 = 2 \cdot 7^{10}$ :  $p_1 = 2 \cdot 7^{10}$ ;  $q_1 = 1$ ;  $k_1 = 1$

Заметим, что по выведенным ранее формулам,  $abc$  зависит только от  $p_1^2 q_1^2 k_1^2$ , значит выбирая различные числа  $a, b, c, p_1, q_1, k_1$  с одинаковыми значениями  $p_1^2 q_1^2 k_1^2$  - мы будем получать одни и те же  $abc$ .

$$\text{Тогда } ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2 \cdot 7^{10}; bc = 2^{17} \cdot 7^{18}; ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Это выполняется при  $a = 2^{17} \cdot 7^{21}$ ;  $b = 2^5$ ;  $c = 2^{12} \cdot 7^{18}$ , следовательно пример существует.

$$\text{Таким образом минимальное значение } abc = 2^{11} \cdot 2^5 \cdot 2^{12} \cdot 7^{21} \cdot 7^{18} \cdot 7^{28} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию  $\text{НОД}(a; b) = 1$ . Рассмотрим  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ :

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Целочисленную дробь ~~всегда~~

можно сократить тогда и только тогда, когда НОД числителя и знаменателя  $> 1$ . Примем максимальное число на которое её можно сократить это и есть НОД. (по опред. НОД)

Таким образом искомое  $m = \text{НОД}(a+b; (a+b)^2-9ab) =$   
 $= \text{НОД}(a+b; 9ab)$ . (т.к.  $(a+b)^2 : a+b$ ). Поскольку  $a, b$  - взаимнопросты, их произведение будет раскладываться на простые  $m$ .  $a$  и  $b$  вместе взятые, в то время как сумма  $a+b$  не может делиться ни на одно из этих простых, т.к. для каждого простого из разложения  $ab$ : он входит в одно из слагаемых и не входит в другое  $\Rightarrow$  сумма на него не делится. Мы получим, что  $\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9ab) = \text{НОД}(a+b; 9) \leq 9 \Rightarrow m \leq 9.$$

Оценка сверху.

Пример:  $a=1; b=8: \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$  можно сократить на 9

Ответ: 9



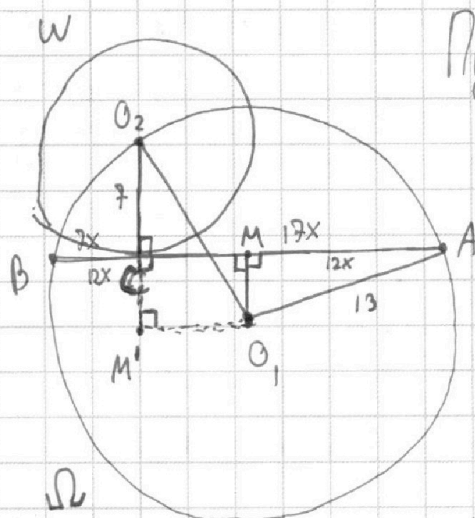
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AC = 7x$ ; тогда  $BC = 7x$

$$AB = AC + CB = 24x$$

$AB$  — хорда  $\Omega$ , поэтому её центр  $O_1$   
лежит на перпендикуляре  $AB$ :  $O_1M \perp AB$ ,  $AM = MB = \frac{AB}{2}$   
 $AM = \frac{AB}{2} = 12x$

$O_2$  — центр  $\omega$ :  $O_2C \perp AB$ .

Построим перпендикуляр из  $O_1$  к прямой  $O_2C$ .  
!  $O_2M'O_1$  — ~~равно~~ прямоугольный тр.;

$O_1MCM'$  — прямоугольник; т.к.  $AB \perp O_1M$ ,  $AB \perp O_2C$ ;  $O_1M' \perp O_2C \Rightarrow O_1M' = MC$ ;  
 $CM' = O_1M$ .  $MC = MB - BC = 12x - 7x = 5x$ ; Пусть  $O_1M = y$ , тогда по теор.

Пифагора в  $\triangle O_2M'O_1$ :  $(7+y)^2 + (5x)^2 = (O_1O_2)^2$ ;  $O_1O_2 = 13$  ( $O_2$  лежит на  $\Omega$ )  
 $\Rightarrow 49 + 14y + y^2 + 25x^2 = 169 \Rightarrow y = \sqrt{169 - 25x^2} - 7$

По теор. Пифа в  $\triangle O_1MA$ :  $(12x)^2 + y^2 = 13^2$

$$144x^2 + 169 - 25x^2 + 49 - 14\sqrt{169 - 25x^2} = 169 \Rightarrow 119x^2 + 49 = 14\sqrt{169 - 25x^2} \quad |^2$$

$$14161x^4 + 11662x^2 + 9604 = 196 \cdot 169 - 196 \cdot 25x^2$$

$$14161x^4 + 16562x^2 - 23520 = 0$$

$$1t = x^2: 14161t^2 + 16562t - 23520 = 0$$

Решив это квадратное уравнение относительно  $x$   
(и <sup>поможет</sup> умножив корень на 24 мы и получим искомое  $AB$ )

Ответ.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☒

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{3(x-1)(x+2) + 7} = 1 - 9x$$

$$\text{Пусть } t = x - 1: \sqrt{3t^2 - 1} - \sqrt{3t(t+3) + 7} = -9t - 8 \quad |^2$$

$$3t^2 - 1 + 3t^2 + 9t + 7 - 2\sqrt{(3t^2 - 1)(3t(t+3) + 7)} = 81t^2 + 144t + 64$$

$$-2\sqrt{(3t^2 - 1)(3t^2 + 9t + 7)} = 75t^2 + 135t + 56$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим условие для пары точек:  $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$

Сумма расстояний точек одной пары ~~по~~ <sup>увеличению</sup> по  $y$  и расстояния по  $x$  должна быть равна 14.

Зафиксируем одну из точек; например,  $A(x_1, y_1)$  и посмотрим  
какие точки подходят ей. Пусть  $A(0; 0)$ :  $2x + y = 14 \Rightarrow y = -2x + 14$ .

Это прямая с коэф.  $a = -2$ ; и  $b = 14$ . Заметим, что если мы  
переместим точку  $A$  в другое место плоскости, расстояние до прямой  
подходящих точек останется тем же. Следовательно все искомые пары  
точек можно найти, двигая конструкцию из точки и прямой внутри  
параллелограмма. Заметим, что прямая (назовем её парной) паралл.  
сторонам параллелограмма  $PQ$  и  $QR$ ; т.к. уравнения их прямых это  $y = -2x$  и  $y = -2x + 32$ .

Следовательно для любой точки и парной ей прямой внутри параллелограмма  
(и точка лежит внутри и прямая пересекает паралл-м)

Следовательно, если парная прямая точки пересекает паралл-грамм, то  
количество точек на парной прямой будет равно кол-ву точек на стороне  $PQ$ .

(Поясни, что это выполняется только потому что ~~парная~~ все точки имеют  
целые коор-ды.)

Рассстояние от точки до парной ей прямой равно  
7 по оси  $Ox$ ; таким образом парные прямые лежат внутри  
паралл-грамма только для точек на расстоянии не меньше 7 от правой  
стороны. Всего таких точек  $(16 - 7 + 1) = 10$ , в каждом случае, сколько  
парой

точек на стороне  $PQ$ . На стороне  $QR$  всего 14 точек. Итого для каждой из  
 $14 \cdot 10 = 140$  точек можно взять в пару 14 точек  $\Rightarrow 140 \cdot 14 = 1960$  пар

ответ: 1960

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Неравенство выполняется тогда и только тогда, когда один из множителей не отрицателен, а другой не положительн.

Рассмотрим каждый из множителей в уравнении с нулём:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{уравнение окружности с центром } (0; 0) \text{ и } R = 1$$

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 12)^2 = 16 \rightarrow \text{ур. окр. с центром } (0; 12) \text{ и } R = 4$$

В случае неравенства, выражение окружности  $> 0$  для любой точки вне окр. и  $< 0$  для любой точки внутри неё.

Таким образом исходное неравенство представляет собой множество точек, лежащих в одной окр. и не лежащих внутри и наоборот. Поскольку окр. не пересекаются, этому неравенству удовл. все точки внутри и на обеих окружностях.

Заметим, что пара параметров  $a$  и  $b$  может задать любую прямую на координатной плоскости:  $y = -ax + 8b$

В совокупности система означает, что выбранная прямая должна пересекать множество точек неравенства в двух точках. Прямая может пересечь окружность либо в одной, либо в ~~двух~~ бесконечном кол-ве точек на промежутке (сечении).  
(в случае касания) (в случае сечения)

Следовательно, система имеет ровно 2 решения только тогда, когда прямая является общей касательной для двух окружностей. Всего таких касат.ых 4: 2 внутр. и 2 внешн., при этом поскольку оба центра окр.-ей находятся на оси  $Oy$ , внутр. внутренние касательные могут быть получены друг из друга симм. отн.  $Oy$ ; также как и внешн.

Таким образом с помощью уравнения кас. -ой эти искомого значения параметров легко находятся.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$= 2(\cancel{x} - x_1) + \cancel{y} - y_1 = 14 \Rightarrow y = 14 - 2x + \cancel{y} + y_1$$

$$y = -2x + 2x_1 + y_1 + 14$$

$2x_2 -$

P (15; 26)

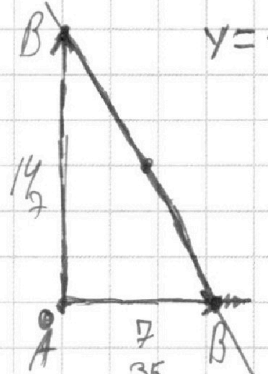
Q (3; 26)

O (0; 0)

$$a=0$$

$$y=8b$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 6 \\ 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

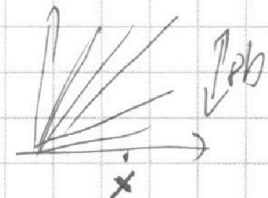
19

(1; 1)

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-16)^2 - 16) \leq 0$$

$$y = -ax + 8b$$



196

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0; & x^2 + (y-16)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + (y-16)^2 - 16 \leq 0; & x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

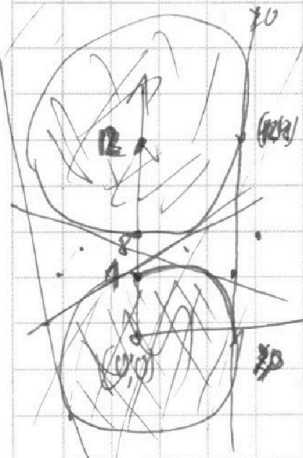
$$\begin{aligned} x^2 + (y-16)^2 - 16 &\geq x^2 + y^2 - 1 \\ y^2 - 32y + 256 - 16 &\geq y^2 - 1 \\ 32y &\leq 241 \end{aligned}$$

241/32

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-16)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ x^2 + (y-16)^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$11662x^2 + 4900x^2$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 196 \\ \times 25 \\ \hline 980 \\ 1392 \\ \hline 4906 \\ + 11662 \\ \hline 16562 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 196 \\ \times 1196 \\ \hline 5469 \\ 7264 \\ + 1126 \\ \hline 196 \\ 21 \\ \hline 33124 \\ - 9604 \\ \hline 23520 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

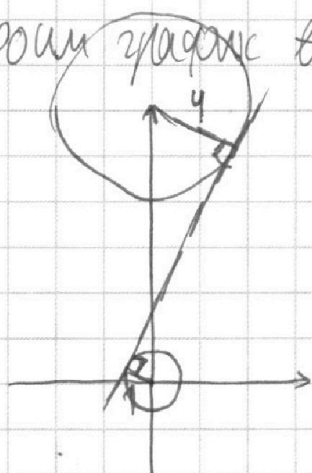
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -25 \\ \hline 119 \end{array}$$

Построим график второго неравенства: это две



$$\begin{array}{r} 18 \\ 119 \\ \times 119 \\ \hline 1071 \\ + 119 \\ \hline 119 \\ + 119 \\ \hline 14161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 119 \\ \times 98 \\ \hline 952 \\ + 1071 \\ \hline 11662 \end{array}$$

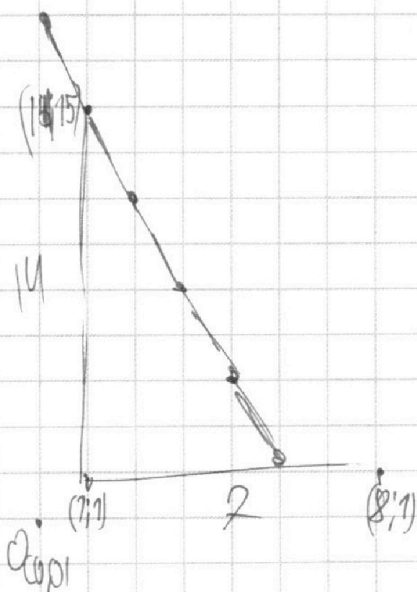
$$(100-2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$

$$x^2 + y^2 - 1 =$$

$$y = \sqrt{1-x^2} = ax + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c$$

$$1-x^2 = ax + \frac{1}{2}c$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 43 \\ \times 25 \\ \hline 980 \\ -292 \\ \hline \end{array}$$



О(0,0)





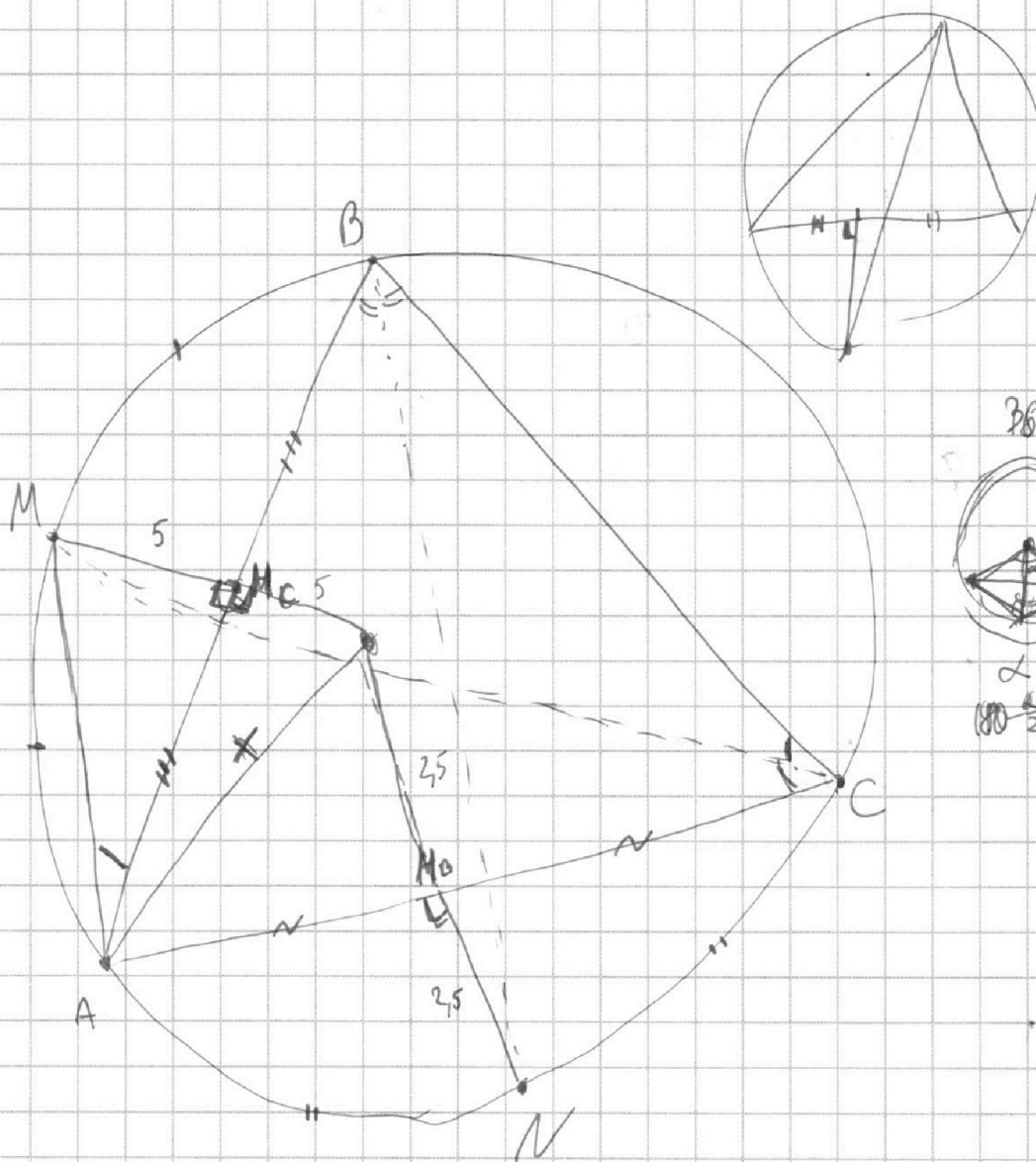
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} 7^{11} \Rightarrow ab = 2^{15} 7^{11} \cdot k, *$$

$$bc: 2^{17} 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17} 7^{18} \cdot n, *$$

$$ac: 2^{23} 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23} 7^{39} \cdot m, *$$

$$abc = 2^{22} = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot knm \Rightarrow abc = 7^{34} \sqrt[24]{2^{55} knm}$$

$$knm = 2^{10} \quad : 2^{24} = 2^{14}$$

$$k=2 \Rightarrow ab = 2^{16} 7^{11}$$

$$k=2; n \cdot m=1 \quad ab = 2^{15} 7^{11} \quad a=2 \quad \alpha+\beta=15$$

$$bc = 2^{17} 7^{18} \quad b=2 \quad \beta+\gamma=17$$

$$ac = 2^{23} 7^{39} \quad c=2 \quad \alpha+\gamma=23$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{17+15-23}{2} = 5$$

$$\alpha=10 \quad \beta=5$$

$$\gamma=13 \quad \alpha=11 \quad \gamma=12$$

$$\alpha+\beta=21 \Rightarrow \beta=0 \quad \alpha=21 \quad \gamma=18 \Rightarrow ab$$

$$\beta+\gamma=18$$

$$\alpha+\gamma=39$$

$$abc = 2^{28} 7^{39}$$

$$\begin{cases} a = 2^{11} 7^{21} \\ b = 2^5 7^{18} \\ c = 2^{12} 7^{12} \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}$$

$$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2-2ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b; 2ab) \rightarrow \max = m$$

$$\text{НОД}(a; b) = 1 = \text{НОД}(a; 2ab)$$

\* 2-ух в. пр. чисел: на каждой из др.  $a, b$ ;  
но их сумма - не пр. на др.

$$3 \sqrt{5} \rightarrow 15 \quad a+b=9 \quad \frac{9}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{8}$$

$$16 -$$

$$\frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} \cdot \frac{m}{\frac{6}{12}}$$

$$2=36-24=12=2\sqrt{3}$$

$$2=9-12$$

$$3x^2-3x+1-7+7$$

$$9+72$$

$$\sqrt{3(x+2)(x-1)} =$$

$$\sqrt{8} \cdot x$$

$$4\sqrt{3} \cdot x$$

$$\sqrt{3} \cdot x$$

$$\sqrt{3(x-1)^2-1}$$

$$\pm 1$$

$$\sqrt{3(x^2+1)-2}$$

$$\sqrt{3(x^2+x)}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 21 \quad 1-2 \\ 33 \quad 2-3 \\ 45 \quad 4 \\ 57 \quad 5 \\ 69 \quad 6 \\ 81 \quad 7 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3(x-1)^2+7}-\sqrt{3(x-1)(x+2)+7}=1-9x$$

$$\sqrt{2 \cdot 5}-\sqrt{2 \cdot 7}=\sqrt{2(\sqrt{5}-\sqrt{7})}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2+7}+\sqrt{3(x-1)(x+2)+7}-2\sqrt{9(x-1)^3(x+2)-3(x-1)(x+2)+28(x-1)^2-7}=1-18x+8x^2$$

$$t=x-1 \quad 3t^2+1+3t(t+3)+7-2\sqrt{9t^3(t+3)-3t(t+3)+27t^2-7}=\frac{(9t+8)^2}{9t^2+9t+8}$$
$$6t^2+9t+8$$
$$9t^4+27t^3-3t^2-9t+27t^2-7$$
$$9t^4+27t^3+18t^2-9t-7$$
$$-2\sqrt{9(t^4+3t^3+2t^2-t)-7}=75t^2+135t+56$$
$$15t \quad 7 \cdot 8 \quad 14$$
$$44$$
$$56$$
$$196$$

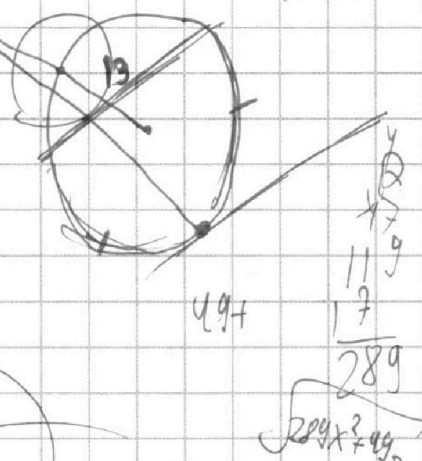
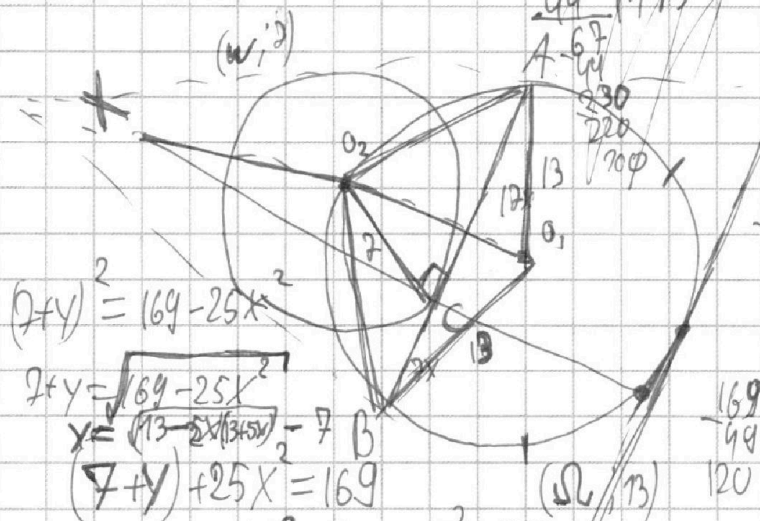
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$24x=\frac{507}{\sqrt{3}}$$

$$y=\frac{144\sqrt{676-100x^2}}{2}$$

$$\frac{507}{44} \mid \frac{144}{175}$$

$$D=196+480-100x^2$$
$$x=\frac{\sqrt{507}}{\sqrt{44}} \cdot 24$$
$$49+49x^2=\sqrt{49(x^2+1)}$$
$$8(x^2+1)$$



$$(7+y)^2=169-25x^2$$

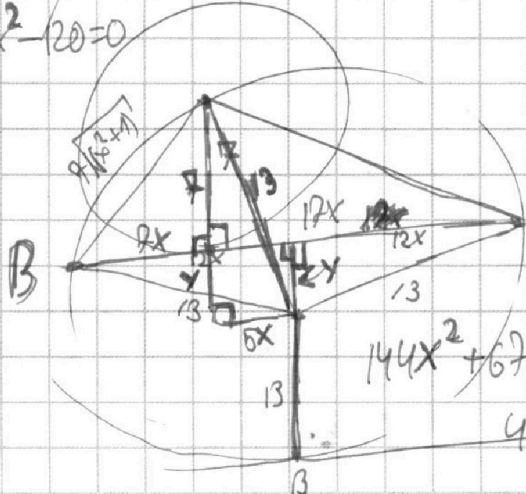
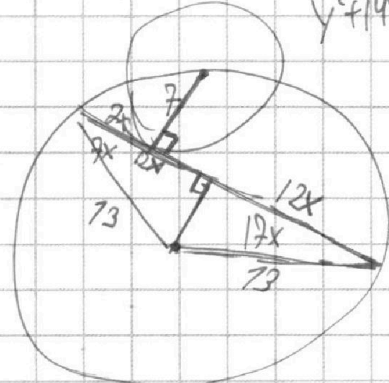
$$7+y=\sqrt{169-25x^2}$$

$$x=\frac{(13-2x(13+5))}{2}-7$$

$$(7+y)+25x=169$$

$$y^2+14y+25x^2=20$$

$$y^2+14y+25x^2-20=0$$



$$144x^2+676-100x^2=169$$

$$44x^2=507$$