МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1

$$\begin{cases} ab \,\vdots\, 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \,\vdots\, 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \,\vdots\, 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot x \\ b &= 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}\cdot y \\ c &= 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}\cdot z \end{aligned}$$

$$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot xyz$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - целые неотрицательные числа, где x, y, z не делятся на 2 и 7.

$$x, y, z \in \mathbb{N}; \; xyz \geq 1$$

Тогда делимости из условия можно записать так:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 14 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2+\beta_2 \geq 10 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 37 \Rightarrow \end{cases}$$

$$2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 51 \qquad \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 37$$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 26$ (т.к. все числа целые)

Тогда $abc \geq 2^{26}\cdot 7^{37}\cdot 1$

Пример для $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$:

$$a = 2^{9}\cdot 7^{10} \quad b = 2^{6} \quad c = 2^{11}\cdot 7^{27}$$

Ответ: $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$.

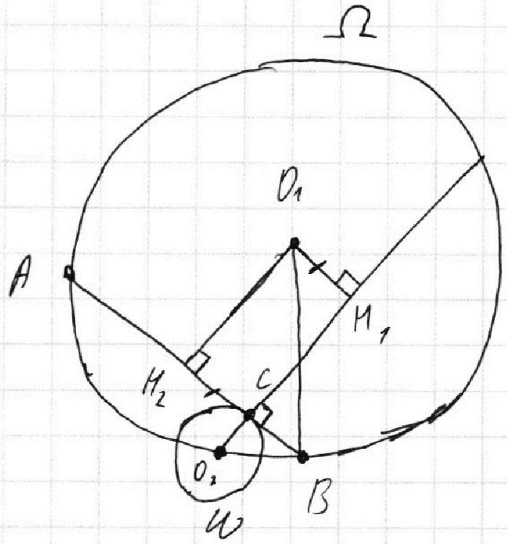
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3



Пусть $BC = x$

Тогда $AC = 7x$

$AB = 8x$

Заметим, что $AH_2 = H_2B$

(т.к. AO_1B – равнобедр.)

$AH_2 = H_2B = \frac{AB}{2} = 4x$

$H_2C = H_2B - CB = 3x = O_1H_1$ ($O_1H_1CH_2$ – прямоугольник по построению).

∢ $\Delta O_1O_2H_1$. ~~пот~~ по теореме Пифагора:

$O_1O_2^2 = O_1H_1^2 + O_2H_1^2$

$25 = 9x^2 + O_2H_1^2 \Rightarrow O_2H_1^2 = 25 - 9x^2$

$CH_1 = O_2H_1 - O_2C = O_2H_1 - 1 = \sqrt{25-9x^2} - 1$

$CH_1 = O_1H_2$ ($O_1H_1CH_2$ – прямоуг. по постр.)

∢ ΔO_1BH_2. По теореме Пифагора:

$O_1H_2^2 + H_2B^2 = O_1B^2$

$(\sqrt{25-9x^2} - 1)^2 + 16x^2 = 25$

$25 - 9x^2 + 1 - 2\sqrt{25-9x^2} + 16x^2 = 25$

$7x^2 + 1 = 2\sqrt{25-9x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$49x^4+1+14x^2=100-36x^2$$

$$49x^4+50x^2-99=0$$

$$t=x^2 \qquad 49t^2+50t-99=0$$

$$\frac{D}{4}=25^2-49\cdot(-99)=5476=$$

$$=4\cdot 1369$$

$$t=\frac{-25\pm 2\sqrt{1369}}{49}$$

$$t\geq 0 \Rightarrow t=\frac{2\sqrt{1369}-25}{49}$$

$$x=\frac{\sqrt{2\sqrt{1369}-25}}{7}$$

$$AB=8x=\frac{8}{7}\cdot\sqrt{2\sqrt{1369}-25}$$

Ответ: $AB=\frac{8}{7}\cdot\sqrt{2\sqrt{1369}-25}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1+(2-7x)}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$t=2x^2+2x+1 \quad y=2-7x;$$

$$\sqrt{t+y}-\sqrt{t}=y$$

$$\begin{cases} t+y+t-2\sqrt{(t+y)t}=y^2 \\ t+y\geqslant 0 \\ t\geqslant 0 \rightarrow \text{всегда верно, т.к. } 2x^2+2x+1>0 \end{cases}$$

$$2t-y(y-1)=2\sqrt{(t+y)t}$$

$$4t^2+y^2(y-1)^2-4ty(y-1)=4t^2+4yt$$

$$y^2(y-1)^2-4yt(y-1+1)=0$$

$$y^2(y-1)^2-4y^2t=0$$

$$y^2((y-1)^2-4t)=0$$

$$y^2=0$$

$$(2-7x)^2=0$$

$$x=\frac{2}{7}$$

$$t+y=2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3>0$$

$$(y-1)^2-4t=0$$

$$(1-7x)^2-4(2x^2+2x+1)=0$$

$$41x^2-22x-3=0$$

$$\frac{D}{4}=121-(-3)\cdot 41=244$$

$$x=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

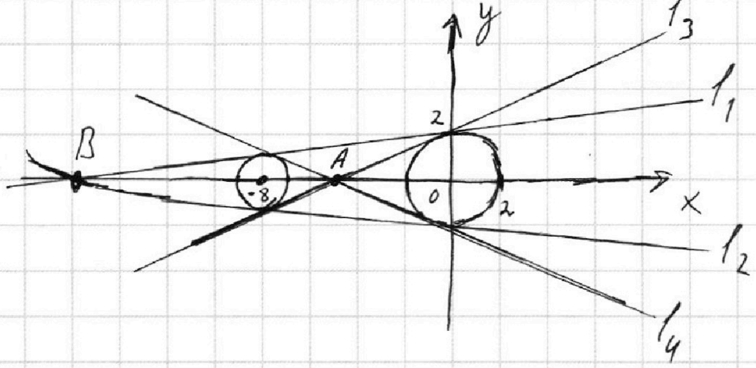
№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 \le 1$ – окружность с центром $(-8;0)$ и радиуса 1.

$x^2 + y^2 \le 4$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиуса 2.

Построим график:



Чтобы система имела ровно 2 решения, необходимо, чтобы прямая вида $y = ax + 10b$ касается обеих окружностей. Всего таких прямых ровно 4: две внешние и две внутренние общие касательные. (изображены на рисунке).

Причём прямые l_1 и l_2, а также l_3 и l_4 симметричны относительно Ox.

пусть l_1 и l_2 пересекаются в точке B, а l_3 и l_4 в точке A.

Причем x-координата точки A равна

$x_A \; -\frac{8}{3}\cdot 2 = -5\frac{1}{3}$, а точки B

$x_B = -8 \cdot 2 = -16$

~~A(0~~ $A\left(-5\frac{1}{3}; 0\right)$ и $B(-16; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

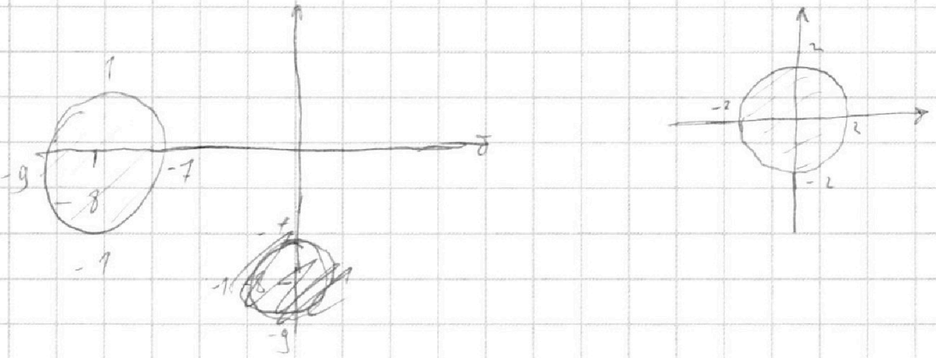
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

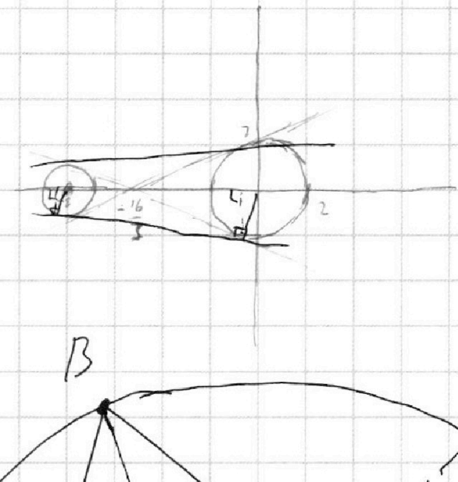
МФТИ

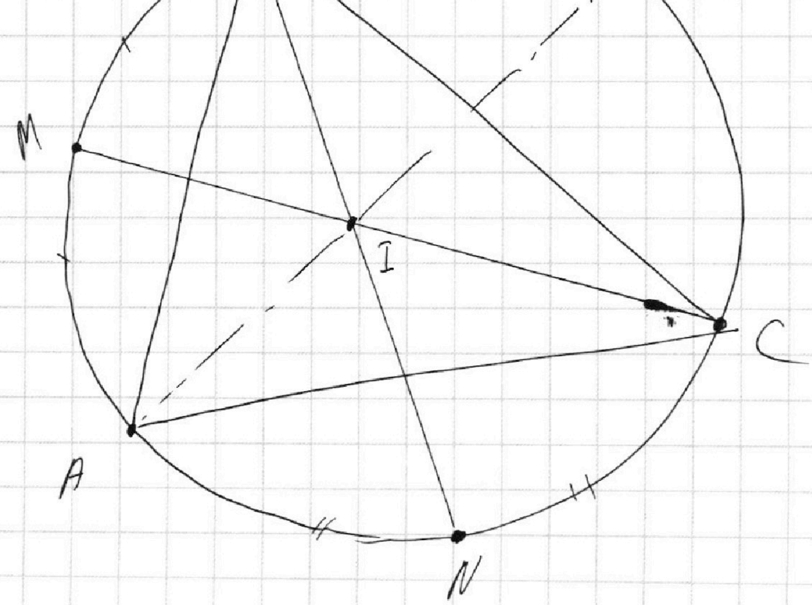
№6

$y = ax + 10b$

$(x+8)^2 + y^2 \le 1$ ~~или~~ $x^2 + y^2 \le 4$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$122\cdot 2 =$
$= 61\cdot 4$

№ 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1+(2-7x)}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

$$\sqrt{t+y}-\sqrt{t}=y$$

$$t+y+t-2\sqrt{(t+y)t}=y^2$$

$$2t+y-y^2=2\sqrt{t^2+yt}$$

$2x^2-5x+3$

$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1$

$$2t-y(y-1)=2\sqrt{t^2+yt}$$

$$4t^2+y^2\cdot(y-1)^2-4t\cdot y(y-1)=4(t^2+yt)$$

$$\cancel{4t^2}+y^2(y-1)^2-4ty(y-1)=\cancel{4t^2}+4yt$$

$$\cancel{y(y-1)(y(y-1)-4t)-4yt=0}$$

$D=4-4\cdot 2$

$$y^2(y-1)^2-4yt(y-1)-4yt=0$$

$$y^2(y-1)^2-4yt(y-1+1)=0$$

$$y^2(y-1)^2-4y^2t=0$$

$$y^2((y-1)^2-4t)=0$$

$y^2=0$

$(2-7x)^2=0$

$2-7x=0$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}$

$2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3=1$

$=\frac{8-70}{49}+3=$

$2\cdot\frac{4}{49}+2\cdot\frac{2}{7}+1=$

$-62+150$

$(y-1)^2-4t=0$

$(1-7x)^2-4(2x^2+2x+1)=0$

$1+49x^2-14x-8x^2-8x-4=0$

$41x^2-22x-3=0$

$\frac{D}{4}=121-(-3)\cdot 41=244$ $\quad 123$

$x=\frac{11\pm\sqrt{244}}{41}=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$(y_2 - y_1) + k(x_1 - x_2) = 0$

$(y_2 + y_1) - k(x_1 + x_2) = 2b$

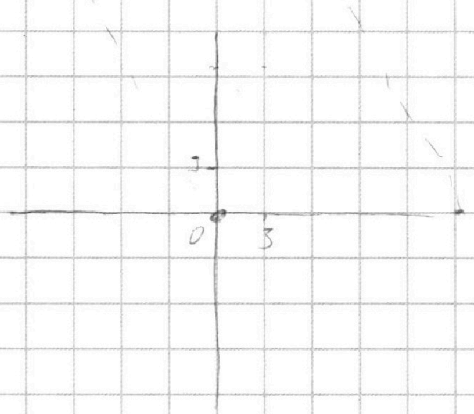
$y = kx + b$

$y_1 = kx_1 + b_1$

$y_2 = kx_2 + b_2$

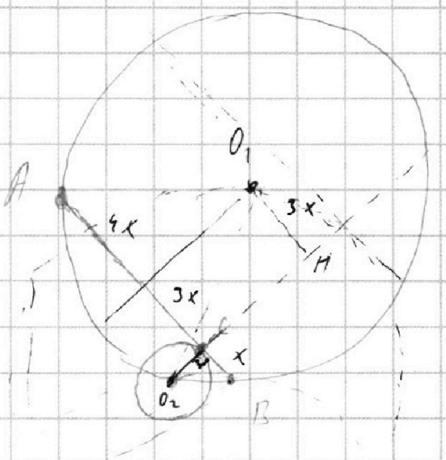
$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$

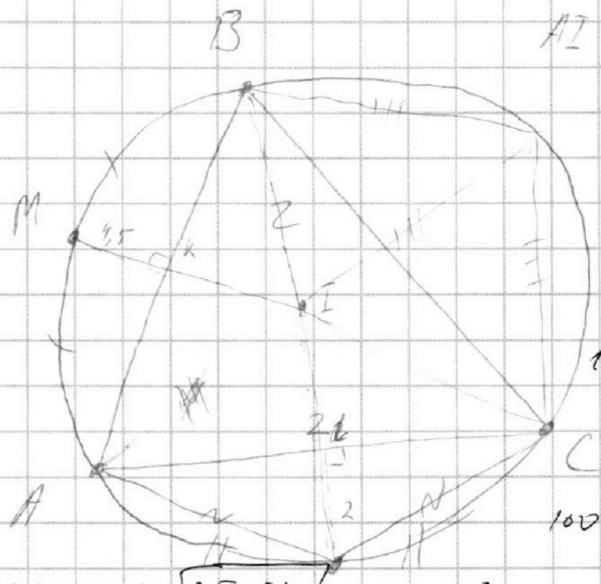
$y_2 + y_1 = k(x_2 + x_1) + 2b$



$2x_2 + y_2 = 12$

$y_2 = -2x_2 + 12$





$AI = $

$\frac{99}{49}$

$148 \mid 2$
$74 \mid 2$
37

$\frac{37}{4}$

148

$2\sqrt{37}$

100

$25 = 3x + O_2H^2$

$O_2H^2 = 25 - 3x$

$25 - (O_2H - 1)^2 = 4x$

$25 - (\sqrt{25 - 3x} - 1)^2 = 4x$

$\cancel{25} - \cancel{25} + 3x - 1 + 2\sqrt{25 - 3x} = 4x$

$BM^2 = \frac{AB^2}{4} + 4{,}5^2$

$x + 1 = 2\sqrt{25 - 3x}$

$x^2 + 2x + 1 = 4 \cdot 25 - 12x$

$CN^2 = \frac{AC^2}{4} + 4$

$IL = \sqrt{\frac{AC^2}{4} + 4} - 2$

$AI^2 = \frac{AC^2}{4} + \left(\sqrt{\frac{AC^2}{4} + 4} - 2\right)^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{AC^2}{4} + 4 + 4 - 4\sqrt{\frac{AC^2}{4} + 4}$

$IK = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + 4{,}5^2} - 4{,}5 = IL$

$x^2 + 14x - 99 = 0$

$\frac{D}{4} = 49 - (-99) = 148$

$x = -7 \pm 2\sqrt{37} = 2\sqrt{37} - 7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\alpha_1+\beta_1=14$ $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=26$

$\beta_1+\gamma_1=17$

$\gamma_1+\alpha_1=20$ $\alpha_1=20-\gamma_1$

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$$

2^{3} 2^{6} 2^{11}

$\gamma_1-\alpha_1=3$

$\gamma_1-20+\gamma_1=3$

$2\gamma_1=23$

$\gamma_1=11{,}5$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot x$ $a=2^{9}\cdot 7^{10}$

$b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}\cdot y$ $b=2^{6}$ $x, y, z \not\vdots 2; 7$

$c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}\cdot z$ $c=2^{11}\cdot 7^{27}$ $2a+2=20$

$2a=18$

$a=9$

$a+a+3=20$

$2a=17$

$a=8{,}5$

$a\cdot b=2^{\alpha_1+\beta_1}\cdot 7^{\alpha_2+\beta_2}\cdot xy \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1\geq 14 \\ \beta_1+\gamma_1\geq 17 \\ \alpha_1+\gamma_1\geq 20 \end{cases}$$

$\gamma_1-\alpha_1\geq 3$

$\alpha_1+\beta_1\geq 14$

$\alpha_2+\beta_2\geq 10$

$b\cdot c=2^{\beta_1+\gamma_1}\cdot 7^{\beta_2+\gamma_2}\cdot yz \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$

$\alpha_1-\gamma_1\geq -3$

$2\alpha_1\geq 17$

$\alpha_1\geq 8{,}5$

$\alpha_1\geq 9$

$\beta_1+\gamma_1\geq 17$

$\beta_2+\gamma_2\geq 17$

$\gamma_1-\beta_1\geq 6$

$a\cdot c \Rightarrow$

$\alpha_1+\gamma_1\geq 20$

$2\gamma_1\geq 23$

$\beta_1\geq 5{,}5$

$\beta_1\geq 6$

$\alpha_2+\gamma_2\geq 37$

$\gamma_1\geq 12$

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1\geq 14 \\ \alpha_2+\beta_2\geq 10 \\ \beta_1+\gamma_1\geq 17 \\ \beta_2+\gamma_2\geq 17 \\ \alpha_1+\gamma_1\geq 20 \\ \alpha_2+\gamma_2\geq 37 \end{cases}$$

$2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1\geq 51$

$21+18=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geq 25{,}5$

$=39+15=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\geq 26$

$=54$

$2\alpha_2+2\beta_2+2\gamma_2\geq 64$

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\geq 32$

$abc \geq 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot xyz\geq 2^{26}\cdot 7^{37}\cdot 1$

$xyz\geq 1$

$\frac{1}{3}$ $+\frac{3}{4}$ $\frac{1}{10}$ 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 НОД$(a;b)=1$

$\frac{a}{b}$ – несократ. дробь $(a,b\in\mathbb{N})$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=$ наиб. m, такое, что

НОД$(a+b; a^2-6ab+b^2)=m$

$=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

$a^2-6ab+b^2=(a+b)\cdot k$

$(a+b)^2-8ab-k(a+b)=0$

$(a+b)(a+b-k)=8ab$

НОД$(a+b; a^2-6ab+b^2)$

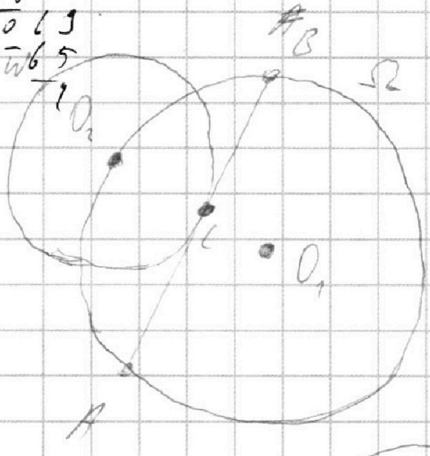
$3 \cdot 3 = 9$; $49 \cdot 99 = 441 + 441 = 4851$

$1369 : 9 = 152$; $1369 : 13 = 105$; $1369 : 7$

$25 \cdot 25 = 125 + 50 = 125$; $4851 + 125 = 5476$

$5476 : 4 = 1369$

№3



$\frac{AC}{CB}=7$ $AB=8BC$

$r=1$

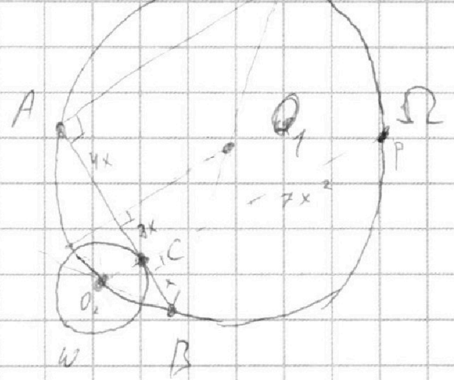
$R=5$

$\frac{PC}{AC}$ $\frac{BC}{O_2C}$

$AC\cdot BC=O_2C\cdot PC$

$x\cdot 7x=O_2C\cdot PC=PC$

$7x^2=PC$



$x^2+y^2-4=ax-y+10b$

$ax+10b=0$ $16a+10b=0$

$49x^4$ $49x^4+1+14x^2=100-36x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Получаем, что $\alpha_1 \geq 9$ $\beta_1 \geq 6$ =>

=> $\alpha_1 + \beta_1 \geq 15$. ~~Тогда:~~

$$\cancel{\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 52}$$

Также имеем $\alpha_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 \geq 20 - 14$

$$\gamma_1 - \beta_1 \geq 6$$

$$\gamma_1 - \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 6 + 17 \quad 2\gamma_1 \geq 23$$

$\gamma_1 \geq 12$ (т.к. γ_1 - целое неотрицат.)

Получаем: $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 9 + 12 = 21$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 6 + 12 = 18$$

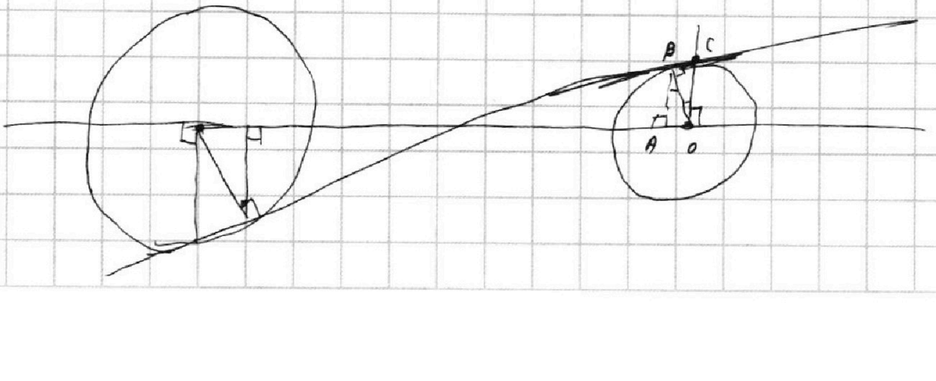
В итоге:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 15 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 18 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 \geq 54 \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 27$$

Т.е. в abc простое число 2 входит в степени ≥ 27

Тогда мин. $abc = 2^{27} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^6$ $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$



$\frac{AB}{OB} = \frac{OB}{CO}$

$CO = \frac{OB^2}{AB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} ab \,\vdots\, 2^{14}\cdot 7^{10} \\ bc \,\vdots\, 2^{17}\cdot 7^{17} \\ ac \,\vdots\, 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$$

Заметим, что если какое-то из чисел a, b или c делилось на простое $p \neq 2; 7$, то можем убрать это p из разложения на простые числа a, b, c, при этом на делимости из условия это никак не повлияет, а произведение abc уменьшится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при минимальном abc числа a, b и c содержат в разложении на простые только числа 2 и 7.

Тогда:
$$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}, \quad b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}, \quad c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$$
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ — целые неотрицательные числа.

Тогда делимости из условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 37$, т.е. в abc простое число 7 входит в степени не меньшей 37.

$$\alpha_1 + \beta_1 - \beta_1 - \gamma_1 \geq 14 - 17$$
$$\alpha_1 - \gamma_1 \geq -3$$
$$\cancel{\alpha_1 + \gamma_1}\ \alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 - 3$$
$$2\alpha_1 \geq 17 \quad \alpha_1 \geq 9$$ (т.к. α_1 — целое неотрицат.)

Также: $\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \gamma_1 \geq 17 - 20$; $\beta_1 - \alpha_1 \geq -3$

$$\beta_1 - \alpha_1 + \alpha_1 + \beta_1 \geq -3 + 14 \quad 2\beta_1 \geq 11 \quad \beta_1 \geq 6$$ (т.к. β_1 — целое неотрицательное)