



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Обозначим a_i, b_i, c_i - ~~каждый~~ максимальные степени простого множителя i на который делится a, b, c .

Тогда $a_2 + b_2 \geq 9$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + c_2 \geq 13$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \Rightarrow \text{что } abc$$

также делится на 2^{21} .

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_3 + c_3 \geq 19$$

$$a_3 + c_3 \geq 18$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 47$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21 \Rightarrow \text{что } abc : 3^{21}$$

$$a_5 + b_5 \geq 10$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 30$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27 \Rightarrow \text{что } abc : 5^{27}$$

Получаем, что $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но $abc : bc \Rightarrow abc : 5^{30}$, так что

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$, проверим a, b, c когда получаем при $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}, \text{ получаем } ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим EF до пересечения с $CB(N)$.

Обозначим AB за $3x$, DB за x . Тогда

и.и. $EN \parallel AB$. $EF = 3y$, $FN = y$.

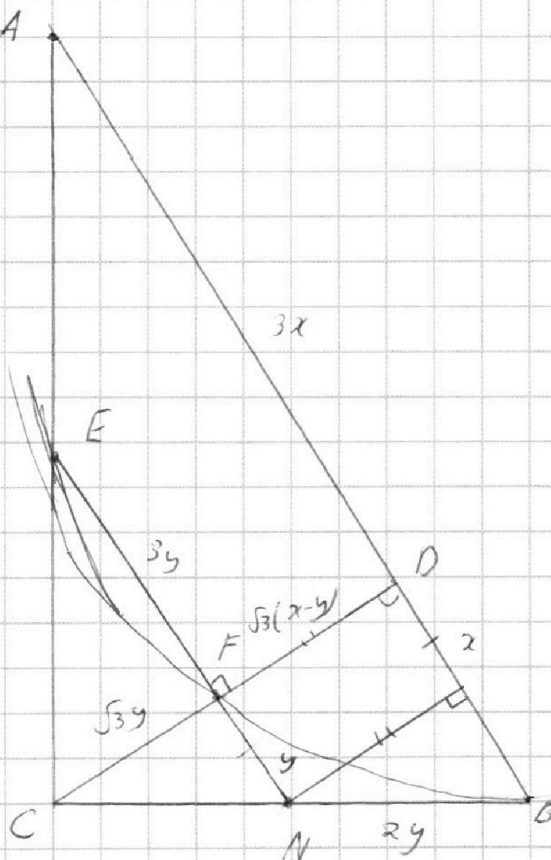
Тогда по свойствам касательной и секущей:

$$FN \cdot NE = NB^2$$

$$y \cdot 4y = NB^2 \Rightarrow NB = 2y$$

(D - высота окруж. Δ $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB$)

$$CD = \sqrt{3}x$$

$$(F = \frac{y}{x} \cdot CD = \sqrt{3}y \Rightarrow FD = \sqrt{3}(x-y) \text{ Тогда:}$$


$$(\sqrt{3}(x-y))^2 + (x-y)^2 = (2y)^2$$

$$4(x-y)^2 = 4y^2$$

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4y^2 \Rightarrow 4x^2 - 8xy = 0 \Rightarrow 4x(x - 2y) = 0$$

$$4x = 8y, \quad x = 2y, \quad S_{APC} = \frac{3S_{ABC}}{4}$$

$$S_{ECF} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3S_{ABC}}{16}$$

Ответ: $S_{APC} : S_{CEB} = 16 : 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}, \text{ заменим } \arcsin(\sin(x)) = x + 2\pi k,$$

$k \in \mathbb{Z}, \text{ так что } x + 2\pi k \in [0, 2\pi]$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}; \text{ тогда } \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi + 11\pi k}{3} \in [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \text{единственный ответ}$$

поэтому только $k=0$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



НЧ

Используя уравнения можно решить графически. Тогда первое уравнение - прямая вида $Kx + d = y$, где $ax + 2y - 3b = 0$

$$y = -0,5ax + 1,5b; \quad K = -0,5a; \quad d = 1,5b$$

Тогда уравнение можно из двух частей: окружность $x^2 + y^2 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 = 3^2$ - с центром в $(0, 0)$ и радиусом 3. и еще одной окружности

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0; \quad x^2 - 6 \cdot 2 \cdot x + 6^2 + y^2 = 2^2$$

Получим так:

$$(x - 6)^2 + y^2 = 2^2 \text{ - с центром в } (6, 0) \text{ и радиусом } 2.$$

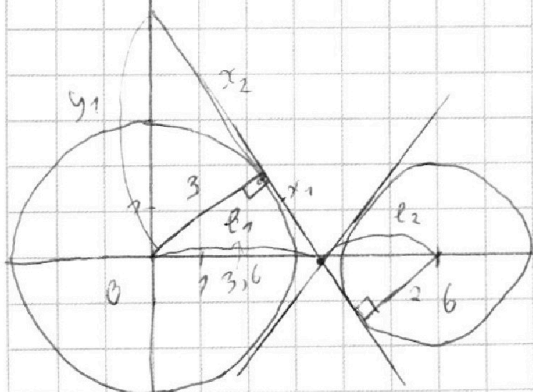
Тогда нам нужно найти также K ,

при которых касательные к окружностям пересекаются с окружностью,

назовем бы d мы не знаем. Получим, что это K

выразим.

Между K двумя окружностями касательных, как показано на рисунке:



$$\text{Получим } l_1 + l_2 = 6, \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{2}, \quad l_1 = 1,5l_2$$

$$1,5l_2 = 6, \quad l_2 = \frac{6}{1,5}, \quad l_1 = \frac{1,5 \cdot 6}{1,5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

$$x_1^2 = 3,6^2 - 3^2 =$$

$$= 0,6 \cdot 6,6 \Rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{0,6 \cdot 6,6}, \quad x_2 = \frac{3^2}{x_1}$$

$$K = \frac{y_1}{3,6} = \frac{x_2}{3} = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{\sqrt{0,6 \cdot 6,6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow K = \frac{5}{\sqrt{11}} \text{ - когда отрезки касаются в одну точку.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.е. при $k \in \left[-\frac{5}{\sqrt{11}}; +\frac{5}{\sqrt{11}}\right]$ - будет менее 4 решений

точка в. $k = 0,5a$, поэтому при $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right]$ - будет 4.
 $a = -2k$

Ответ: $a = \left(-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}\right) \cup \left(\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty\right)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NS

По свойству логарифма $\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$; $\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$, заменим $\log_3 x$ на t_x
и $\log_3 5y$ на t_y .

$$t_x^4 + \frac{6}{t_x} = \frac{5}{2t_x} - 8; \quad t_y^4 + \frac{2}{t_y} = \frac{11}{2t_y} - 8$$

$$t_x^5 + 6 = 2,5 - 8t_x; \quad t_y^5 + 2 = 5,5 - 8t_y$$

$$t_x^5 + 8t_x = -3,5; \quad t_y^5 + 8t_y = -3,5$$

$$t_x^5 + t_y^5 + 8(t_x + t_y) = 0$$

можно разложить на

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4)$$

и так как $t_x, t_y > 0$

тогда

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4 + 8) = 0$$

и так как $t_x, t_y > 0$

$$t_x + t_y = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$3^0 = 5xy; \quad 1 = 5xy \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $xy = 0,2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

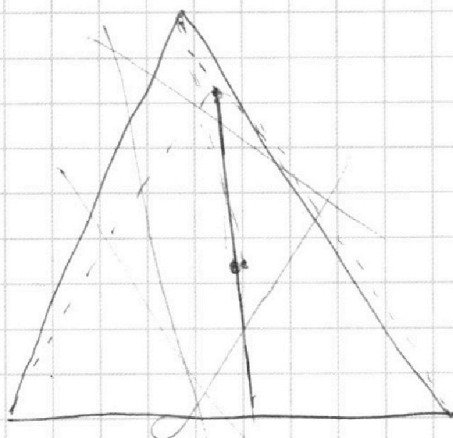
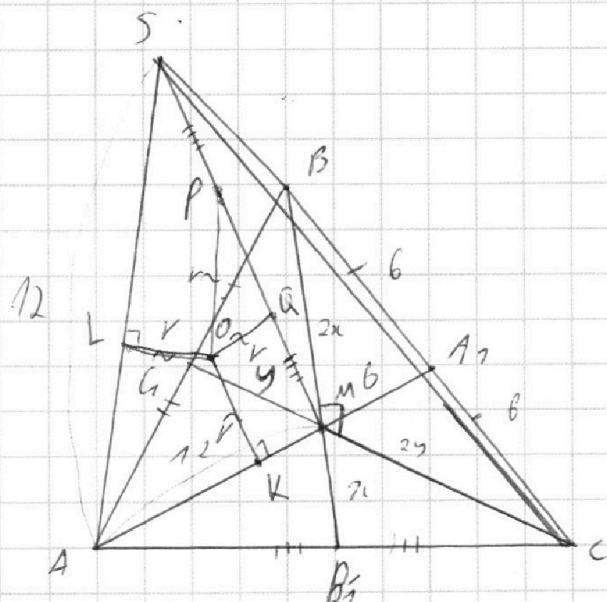
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Все можно воспринимать т.к. все используется
точка деления на отрезке плоскости ASM
и сегменты отрезка - симметричны.

По теореме о секущей и касательной: $MK^2 = MQ \cdot MP$; $MK^2 = MQ \cdot (PQ + MQ)$

также $\triangle OLA = \triangle AKO$ (по т.т. углов).

$$AL = AK; AL + SL = AK + KM$$

$$SA = AM = 12$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ; SL^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$$

$$(SP = QM)$$

$$MK = SL$$

по теореме о секущей и касательной: $MA_1 = 6 = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугольный. Пусть $BM = 2x$; $CM = 2y$, тогда $MB_1 = x$
 $CM_1 = y$

$$\text{Заметим, что } S_{MB_1C_1} = \frac{S_{BMC}}{3} = 30 = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot 3x \cdot 3y =$$

$$xy = 15;$$

$$= 18 \cdot 9xy = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 2430$$

$$\text{Ответ: } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

log

$$\log_3 243 = 6$$

$$txy(txy - tx^2y - ty^2) - txy$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$c = 2$$

$$\log_2 1024 = 10$$

$$a = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$b = 2^2 \cdot 3^10 \cdot 5^0$$

$$c = 2^1 \cdot 3^10 \cdot 5^0$$

$$2 \log_2 27 = \log_2 243$$

$$2 \cdot \log_2 256 = 2 \cdot 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\log_3 27 = 3$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\log_3 x + \frac{6}{\log_3 2} = \frac{5 \log_3 3}{2} - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 x \cdot 5y =$$

$$=$$

$$3$$

$$2,5 - 6 = 3,5$$

$$\log_{x^2} z = \frac{\log_x z}{2}$$

$$tx^4 + \frac{6}{tx} = \frac{5}{2tx} - 8; \quad ty^4 + \frac{2}{ty} = \frac{11}{2ty} - 8$$

$$tx^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8tx; \quad ty^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8ty$$

$$(tx^3 - ty^3)(tx - ty) + tx^5 + 8tx = -3,5; \quad ty^5 + 8ty = 3,5$$

$$tx^5 + ty^5 + 8(tx + ty) = 0$$

$$(tx + ty)(tx^4 - tx^3ty + tx^2ty^2 - txty^3 + ty^4)$$

$$28 + 44 = 72$$

$$38 + 4 = 42$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

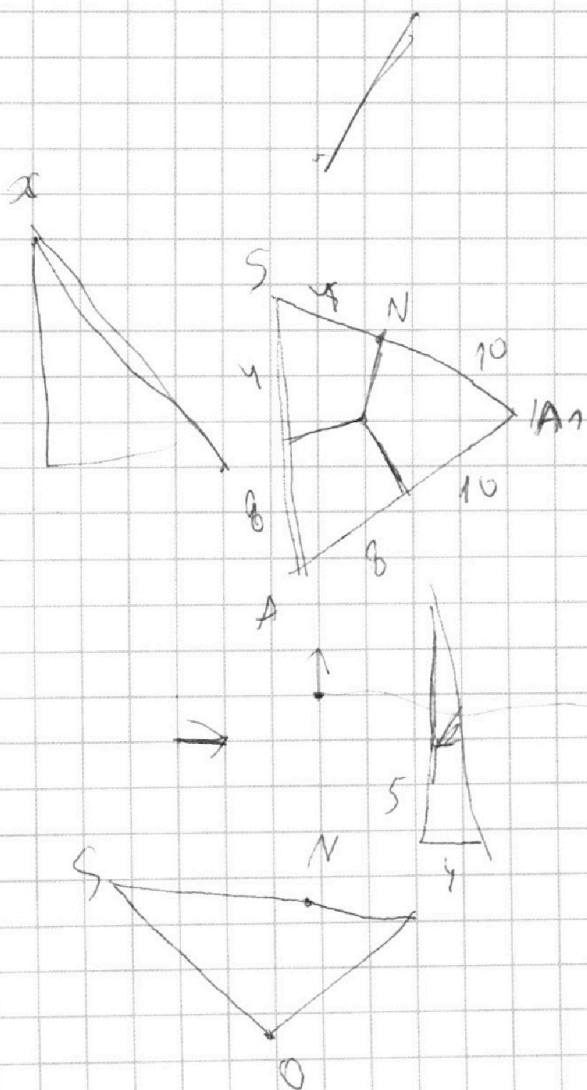
NS

~~систему уравнений можно решить графически. Тогда первая задача~~

~~графическая форма $y = kx + b$, где $ax + by + c = 0$~~

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \rightarrow k = -\frac{a}{b}, d = \frac{c}{b}$$

~~а вторая задача состоит~~



$$0,6 \cdot 6,6$$

$$0,6 \cdot 0,6 \cdot 11$$

$$0,6 \cdot \sqrt{11}$$

$$\frac{3}{0,6}$$

$$\frac{1}{0,2 \cdot \sqrt{11}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

