



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} \cdot n, n \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot q, q \in \mathbb{N}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot k \cdot n \cdot q, \text{ т.е. справа}$$

~~$ab = 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{34} \cdot k, n, q$~~ все степени
у 2, 3, 5 должны

быть четными (т.е. среди k, n, q есть хотя бы одна
тройка, пусть для минимума она одна и ~~она у n~~),

при этом $ac : 5^{39} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{78}$, значит ~~среди~~ у
произведения ~~$k \cdot n \cdot q$~~ есть 5^{10} (пусть для минимума
это равно 5^{10} , а не $5^{11}, 5^{12}, \dots$ и это $n = 5^{10}$), ну

а больше ничего добавлять не будем (т.е. $k, n, q \geq 5^{10} \cdot 3$,
и приведем пример когда это так, потому что мы
получим оценку на $abc \geq 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$):

$$b = 2^3 \cdot 3^7, a = 2^5 \cdot 5^{12} \cdot 3^7, c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27} \Rightarrow \text{натурально}$$

$$\text{убедиться, что } abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \text{ и делимость}$$

$$\text{работает тоже} \Rightarrow \text{ответ: } 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \cdot 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x;$$

вынес $\frac{\pi}{2} - x = 2d \Leftrightarrow \pi - 2x = 2d$, но $\arcsin(\sin d)$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, но $-5\pi \leq 10 \arcsin(\sin d) = 2d \leq 5\pi$, значит

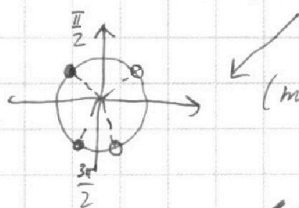
$$-2,5\pi \leq d \leq 2,5\pi$$

2) I. Если $d \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$10 \arcsin(\sin d) = 10d, \text{ значит } 10d = 2d \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

II. Если $d \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

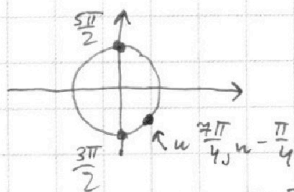
$$10 \arcsin(\sin d) = 10(\pi - d), \text{ значит } 10\pi - 10d = 2d \Leftrightarrow d = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$



(м.к. аргументы в сумме дают π)

III. Если $d \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$:

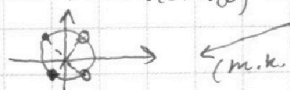
$$10 \arcsin(\sin d) = 10(d - 2\pi), \text{ значит } 10d - 20\pi = 2d \Leftrightarrow d = \frac{20\pi}{8} = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow x = -2\pi$$



(м.к. один аргумент преобразовывается кругом назад в нулевой)

IV. Если $d \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$:

$$10 \arcsin(\sin d) = 10(-\pi - d), \text{ значит } -10\pi - 10d = 2d \Leftrightarrow d = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$



(м.к. аргументы в сумме дают $-\pi$)

V. Если $d \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}]$:

$$10 \arcsin(\sin d) = 10(d + 2\pi), \text{ значит } 10d + 20\pi = 2d \Leftrightarrow d = -\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow x = 3\pi$$

аналогично III, только нужно сдвинуть круг вперед

3) Все случаи разобраны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Ответ: $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; -2\pi; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

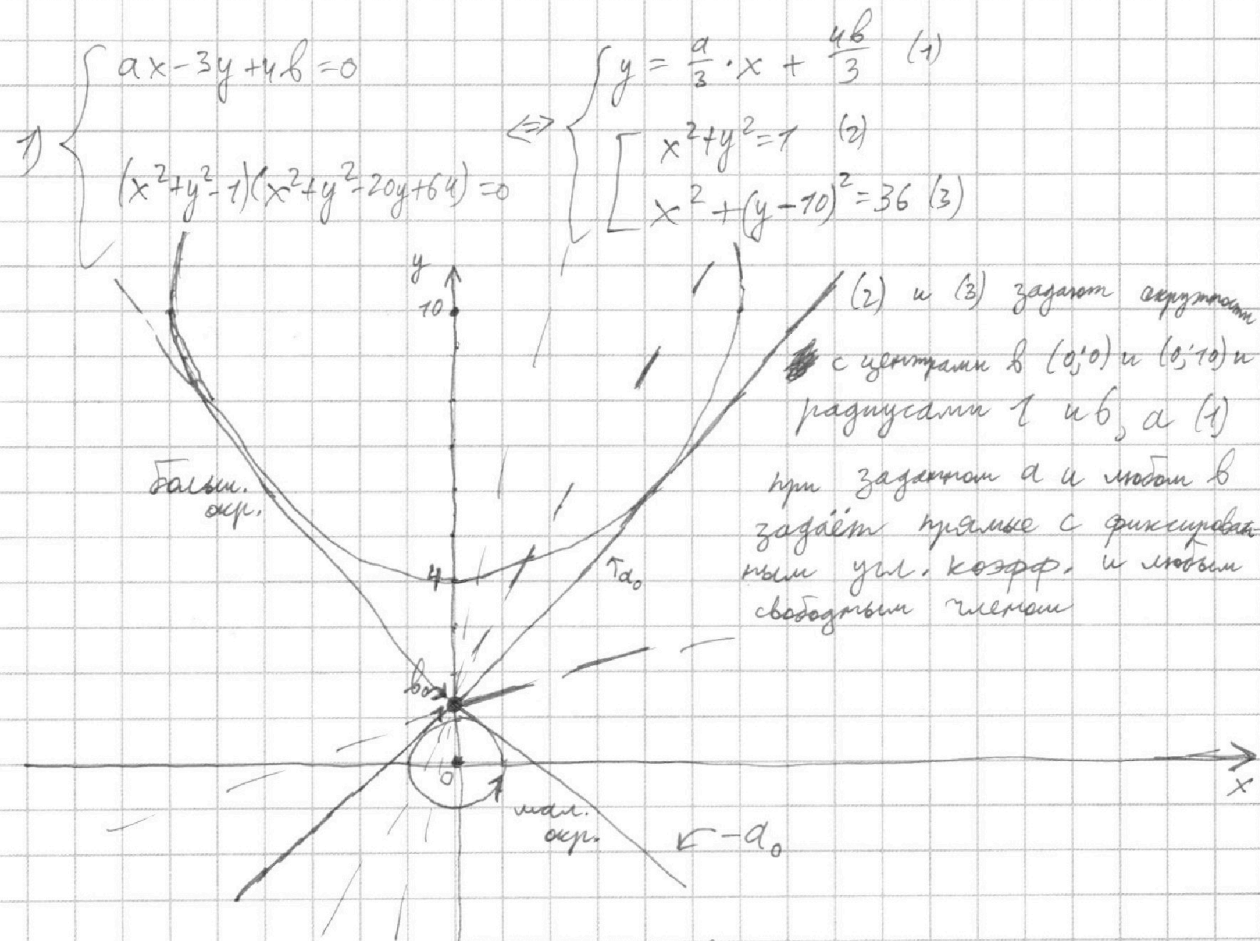
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) Тогда от нас требуется найти все такие угл. коэфф., что найдётся 4 пересечения с окружностями (хотя бы при каком-то свободном члене), т.е. мы должны два раза пересечь обе окружности

3) Рассмотрим $a \geq 0$: если a такое, как угол наклона общей внешней касательной, ≤ 2 (при касании 2, при больших b чем b касания не пересекаем мал. окр., при меньших b не пер. больш. окр.) (пусть это a_0), если $a < a_0$, то тоже решений ≤ 2 (во-первых такое b , что и при касании (b_0) , и тогда при $b > b_0$ не пересекаем мал. окр., при $b < b_0$ не пересекаем больш. окр., а при $b = b_0$ не пересекаем ничего), а если $a > a_0$ то оставим $b = b_0 \Rightarrow$ теперь получим 4 решения

4) Тогда осталось это a_0 найти и сказать, что при $a < 0$ всё аналогично (в силу симметрии картинки относ. $x=0$) и там будут подходить $a < -a_0$!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \end{cases}$$

II на ОДЗ

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3 \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{3\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

ОДЗ.1

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

используем $t = \log_5(2x) \neq 0$ (м.к. $2x \neq 1$)
и $u = \log_5(y) \neq 0$ (м.к. $y \neq 1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ перейдем снова равносильный переход на ОДЗ.1

$$\begin{cases} t^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3t \\ u^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \quad (1) \\ 3u^5 + 9u + 13 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) Если $f(t) = 3t^5 + 9t - 13$, то $f'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает на всей области определения
и ~~при~~ $t=1$ $f(t) < 0$, а при ~~при~~ $t=2$ $f(t) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корни уравнения $f(t) = 0$ между $t=1$ и $t=2$ и он единственный, м.к. $f'(t) > 0$ (значит $1 < t < 2$)

(2) Аналогично если $f(u) = 3u^5 + 9u + 13$, то $f'(u) = 15u^4 + 9 > 0$ и
в $u = -1$ $f(u) > 0$, а в $u = -2$ $f(u) < 0 \Rightarrow$ корни уравнения $f(u) = 0$ между $u = -1$ и $u = -2$ и аналогично (1) он единственный (значит $-2 < u < -1$)

2) ~~при~~ $\Rightarrow 3t^5 + 9t + 3u^5 + 9u = 0 \Leftrightarrow t^5 + u^5 + 3(t+u) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (t+u)(t^4 - ut^3 + u^2t^2 - u^3t + u^4 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} I: t+u=0 \\ II: t^4 - ut^3 + u^2t^2 - u^3t + u^4 + 3 = 0 \end{cases}$$

но II не выполняется, м.к. в левой части каждое слагаемое > 0 (м.к. $t > 0$, а $u < 0$), а
 $\pm \Rightarrow \log_5(2xy) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$, а раз это эквивалентное соотношение получившееся
значения x и y и это точно есть, м.к. x и y удовлетворяют исходным равенствам, то это и ответ. Ответ: $\frac{1}{2}$.

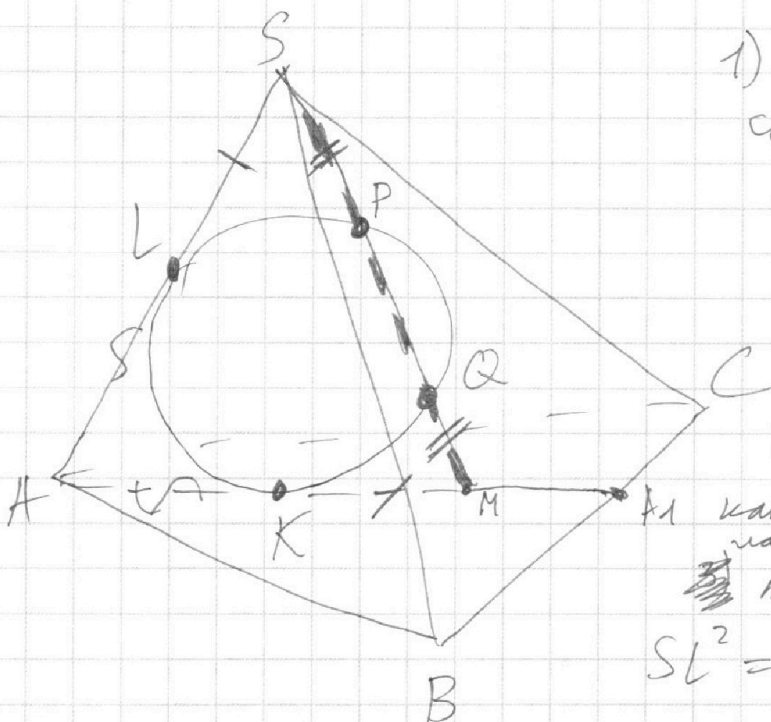
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим сечение
сферы плоскостью AMS :
получим окружность и
точки L, K, P и Q , т.к.
лучи $AS, AM, SM \in ASM$

2) $HL = AK$ как отрезки
касательных (если сфера конту-
гальна, то в сечении окружность
тоже касается),
 $SL^2 = SP \cdot SQ$ и $MK^2 = MQ \cdot MP$

по т. о касат. и секущей, но $SP = MQ$, а $SQ = MP$,
(по усл.)
т.к. они состоят из равных отрезков $\Rightarrow SL = MK \Rightarrow$

$\Rightarrow AS = AM = 76$, но т.к. M — т. пересеч. медиан, то $A_1M =$
 $\frac{AM}{2} = 8 \Rightarrow AA_1 = AM + A_1M = 24 \Rightarrow$ значит еще, что $BA_1 = A_1C = 8$,
т.к. $BC = 16$

3) $S'_{ABC} = 2 \cdot S'_{AA_1C}$ (т.к. медиана делит треугольник на два равновеликих) =
 $= 2 \cdot AA_1 \cdot A_1C \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle AA_1C \Rightarrow \sin \angle AA_1C = \frac{S'_{ABC}}{AA_1 \cdot A_1C} = \frac{100}{24 \cdot 8} = \frac{50}{96} =$
 $= \frac{25}{48}$

4) Это формула для медианы; $m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$, где a, b соседние стороны,
а c — сторона, на которую она опущена $\Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1^2 \cdot BB_1^2 \cdot CC_1^2 = 24^2 \cdot \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4} \cdot \frac{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}{4}$ (и заметим,

что от перестановки BC и AC значение выражения
не меняется, поэтому без ограничений общности

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



можем ~~при~~ принять, что $\angle AA_1C \geq \angle BA_1A$ (в этом случае, переменив буквы C и B местами и тогда ничего не меняется) $\Rightarrow AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C$ и $AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 - 2AA_1 \cdot BA_1 \cdot \cos \angle BA_1A$ (по т. косинусов),

но с добавлением на угол $\angle AA_1C$ тогда $\cos \angle AA_1C$

$$-\sqrt{1 - \frac{25^2}{48^2}} = -\frac{1}{48} \sqrt{23 \cdot 73} \text{ и } \cos \angle AA_1B = \frac{1}{48} \sqrt{23 \cdot 73} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4} = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 + 3BC^2 - 3AC^2}{4} = \left(24^2 + \frac{3BC^2 - 3AC^2}{4} \right)$$

$$\text{и } \frac{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}{4} = \frac{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2 + 3BC^2 - 3AB^2}{4} = \left(24^2 + \frac{3BC^2 - 3AB^2}{4} \right)$$

$$\text{т.е. } BB_1^2 = \left(24^2 + 192 - \frac{3}{4}AA_1^2 - \frac{3}{4}A_1C^2 + 6\sqrt{23 \cdot 73} \right), \text{ а}$$

$$CC_1^2 = \left(24^2 + 192 - \frac{3}{4}AA_1^2 - \frac{3}{4}BA_1^2 + 6\sqrt{23 \cdot 73} \right), \text{ т.е.}$$

$$BB_1^2 = (144 + 192 - 48 + 6\sqrt{23 \cdot 73}) = (288 + 6\sqrt{23 \cdot 73}), \text{ а } CC_1^2 =$$

$$= (288 - 6\sqrt{23 \cdot 73}) \Rightarrow BB_1^2 \cdot CC_1^2 = 288^2 - 36 \cdot 23 \cdot 73 =$$

$$= 36 \cdot (50^2 - 14^2 - 48^2 - 25^2) = 36 \cdot (50^2 - 14^2 - 48^2 - 25^2) =$$

$$= 36 \cdot ((50-48)(50+48) + (25-14)(25+14)) = 36 \cdot (492 + 429) = 36 \cdot 969 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{24^2 \cdot 36 \cdot 969} = 24 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{69} = 432\sqrt{69}$$

ответ



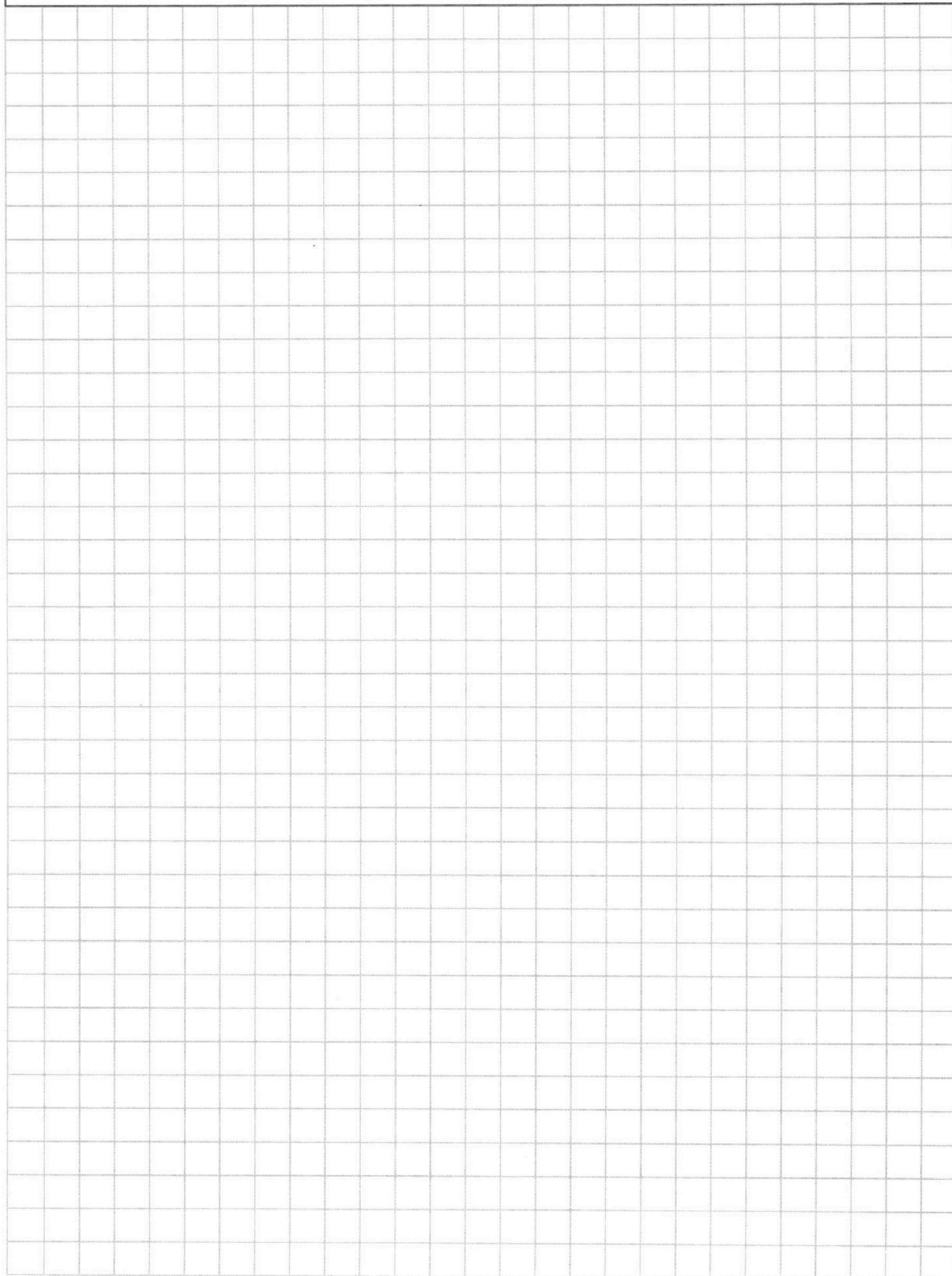
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background, featuring various equations, diagrams, and calculations.

Top Left: QR code.

Top Right: MFТИ logo.

Equations and Calculations:

- $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} k, k \in \mathbb{N}$
- $bc = 2^{12} \cdot 3^{80} \cdot 5^{14} n, n \in \mathbb{N}$
- $ac = 2^{14} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39} q, q \in \mathbb{N}$
- $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} knq, k=3 \Rightarrow n=1, q=1$
- $abc = 2^{17} \cdot 3^{34} \cdot 5^{70}$
- $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}, b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^7$
- $c = 2^9 \cdot 3^{18} \cdot 5^{27}$
- $3t^5 + 9t - 13 = 0$
- $t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3 \cdot \frac{1}{t}$
- $x^2 + y^2 = 1$
- $x^2 + (y-10)^2 = 36$
- $\Delta y = 45 - 5\Delta x$
- $u^4 + \frac{4}{u} = \frac{13}{3u}$
- $u^4 + \frac{13}{3u} = \frac{1}{t} - \frac{3}{3t}$
- $3u^5 + 9u + 13 = 0$
- $3t^5 + 9t = 13$
- $t^5 + u^5 + 3t + 3u = 0$
- $13(t+u) = 3t(4(t-u)(t+u)(t^2+u^2))$

Diagrams:

- A circle with center at (0, 10) and radius 6.
- A coordinate system with x and y axes.
- A geometric diagram showing a triangle with vertices labeled E, F, and C, and various lines and angles.

Other Notes:

- $\log_5(2xy) = 0$
- $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$
- $8x^3 > 0$
- $8x^3 \neq 1$
- $\log_5 2x$
- $\frac{7}{6}k \geq 0, k \geq \frac{6}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



64 /

$$288 = 36 \cdot 8$$

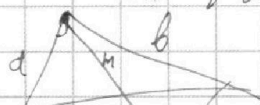
$$288^2 = 36^2 \cdot 64$$

496

625

$$11 \cdot 39 = 429$$

$$= 404 \quad d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



$$148 \cdot 3 = 450 - 6 = 454$$

$$4m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$429 + 192 = 427 + 200 = 627 = 9 \cdot 69$$

$$m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot m_3^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \cdot \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 24^2 = 144$$

48

$$\frac{(48-25)(48+25)}{48^2}$$

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2) \cdot (2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$= 2a^2(2c^2 - b^2) + 2a^2(2b^2 - c^2) + (2b^2 - c^2)(2c^2 - b^2)$$

$$2AB^2 + 2BC^2 - AC^2 =$$

$$= 2 \cdot AB^2 + 3AC^2 - BC^2 + 3BC^2 - 3AC^2 \cdot 3$$

$$144 \cdot 2 =$$

$$12 \cdot 12 \cdot 2 = SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$= 24 \cdot 12 = MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$= 48 \cdot 6 =$$

$$= 8 \cdot 66$$

$$SA = 16$$

$$AM = 16$$

$$AA_1 = 24$$

$$\frac{h \cdot BC}{2} = 100$$

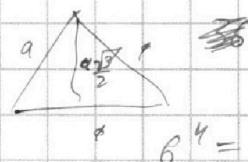
$$h = \frac{100}{8} = 12,5$$

$$\times \frac{73}{20} =$$

$$= 1460 + 73 \cdot 3 = 1460 + 219 = 1679$$

$$2 \cdot \frac{24 \cdot 8 \cdot \sin \alpha}{2} = 100$$

$$\sin \alpha = \frac{100}{24 \cdot 8}$$



$$6^4 =$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ \times 36 \\ + 216 \\ \hline 108 \end{array}$$