



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}; \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — целые неотрицательные.

Т.к. нас просят найти минимальное значение  $abc$ ,

то других чисел в разложении быть не может

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \geq 7; \quad \beta_1 + \beta_2 \geq 11; \quad \gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \geq 13; \quad \beta_2 + \beta_3 \geq 15; \quad \gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14; \quad \beta_1 + \beta_3 \geq 17; \quad \gamma_1 + \gamma_3 \geq 43$$

Складывая условия для степеней двоек получаем:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 7$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \geq 34;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17.$$

Приведём пример, когда  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$

Пусть  $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = 3; \alpha_3 = 10$ . Тогда:

$$4 + 3 \geq 7$$

$$3 + 10 \geq 13$$

$$4 + 10 \geq 14,$$

$$\Rightarrow \alpha_{\min} = 17$$

Продолжая аналогичную операцию со степенями троек, получаем:

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 43. \quad \text{Т.к. степени, очевидно,}$$

целые неотрицательные, то минимальное значение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 44 \quad (\text{т.к. } 43 - \text{нечётное})$$

Приведём пример, где  $p_1 + p_2 + p_3 = 22$

Пусть  $p_1 = 6$ ;  $p_2 = 5$ ;  $p_3 = 11$ . Тогда

$$6 + 5 \geq 11$$

$$5 + 11 \geq 15$$

$$6 + 11 \geq 17$$

$$\Rightarrow p_{\min} = 22$$

Аналогично для  $r_1, r_2, r_3$  получаем

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq 75 \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 38$$

Однако  $r_1 + r_3 \geq 43$ . Значит  $r_1 + r_2 + r_3 \geq 43$ ,

ведь  $r_2 \geq 0$  (т.к.  $a, b, c$  натуральные по условию)

Приведём пример, где  $r_1 + r_2 + r_3 = 43$

Пусть  $r_1 = 14$ ;  $r_2 = 0$ ;  $r_3 = 29$ . Тогда:

$$14 + 0 \geq 14$$

$$0 + 29 \geq 18$$

$$14 + 29 \geq 43$$

$$\Rightarrow r_{\min} = 43$$

Значит, наименьшее значение  $abc$  будет

$$2^{\min} \cdot 3^{\min} \cdot 5^{\min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☒

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$FE \parallel AD, \text{ то } \frac{S_{AED}}{S_{CEF}} = \left( \frac{AD}{CE} \right)^2 = \left( \frac{10-3}{7} \right)^2 =$$
$$= \left( \frac{3 \cdot 10}{7 \sqrt{30}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{30}}{7} \right)^2 = \frac{30}{49}$$

Ответ:  $\frac{30}{49}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$T.K. \frac{AD}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{BD + AD}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

Рисунок  $AD = 3,2$

$BD = 10 \times$       Tetapi  $CD^2 = AD \cdot BD$

$$ED^2 = 30x^4; CD = \sqrt{30}x; AC = \sqrt{21}x; BC = \sqrt{130}x$$

Tогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{30}{130}}$ ;  $\cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{130}}$

По т. ~~костяков~~

~~$$169x^2 + BF^2 - 26x \cdot BF \cdot \frac{10}{\sqrt{130}} = 21x^2 + (\sqrt{130}x - BF)^2$$~~

$$169x^2 + BF^2 - 26x \cdot BF - \frac{10}{\sqrt{130}} = 21x^2 + 130x^2 - 2\sqrt{130}x \cdot BF + BF^2$$

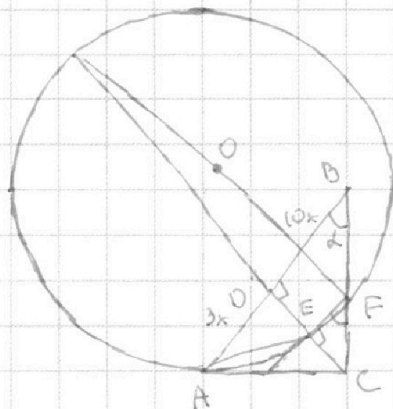
~~$$\left( \frac{260}{\sqrt{130}} x - 2\sqrt{130} x \right) BF = 18x^k$$~~

2.  $\triangle ADE$  и  $\triangle BDC$  - они подобны по двум углам ( $\angle DAE$  и  $\angle DBC$ ) Тогда из подобия

$$\frac{10x}{3x} = \frac{CD}{DE}, \quad DE = \frac{3}{10} CD, \quad DE = \frac{3\sqrt{30}}{10} \quad x = ?$$

$$\Rightarrow EC = \frac{10\sqrt{30}}{10} - \frac{3\sqrt{30}}{10} = \frac{7\sqrt{30}}{10} \quad \text{To you, pag 3}$$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$  по углам  $\angle ACD$  и  $\angle CFE$  (т.к.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\cos(5 \arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

Т.к.  $\cos 5d = 16 \cos^5 d - 20 \cos^3 d + 5 \cos d$ , а также

$$\cos(\arccos(x)) = x, \text{ то:}$$

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x = \sin x$$

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 4 \sin x = 0$$

$$4 \sin^5 x - 5 \sin^3 x + \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{или } 4 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 1 = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Положим } d = \sin^2 x$$

$$1) \sin^4 x = 1$$

$$4d^2 - 5d + 1 = 0$$

$$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$d_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = 1$$

$$2) \sin^4 x = \frac{1}{4};$$

$$i) \sin x = +\frac{1}{2}; x = \begin{cases} 2\pi n + \frac{\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n + \frac{5\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$ii) \sin x = -\frac{1}{2}; x = \begin{cases} 2\pi n - \frac{\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n - \frac{5\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

То есть, объединяя в одну серию корней,

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Однако, т.к. из равенства косинусов не следует равенство аргументов, проверим полученные корни.

1)  $\sin x = 0$ ;

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x;$$

$$x = \pi$$

2)  $\sin x = -1$

$$5\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

3)  $\sin x = 1$

$$0 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

4)  $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{10\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{20\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

5)  $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ:  $x \in \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0; \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0; \end{cases}$$

Второе уравнение системы — две окружности  
(т.к. либо  $x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$ , либо  $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ,  
либо оба сразу). Преобразуем  $x^2 + 14x + y^2 + 45$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 2^2. \text{ Нарисуем это в коорд. } XY$$

Преобразуем

первое

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$3ay = 7b - x$$

При  $a = 0$  4

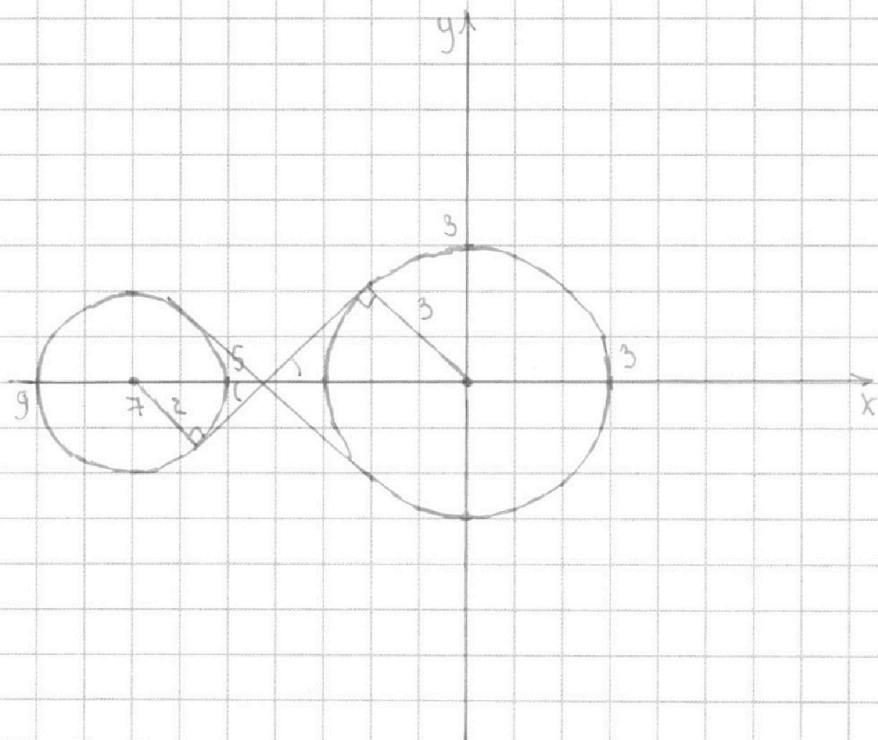
решений быть

не может, т.к.

это получает-

ся вертикаль

ная прямая. Значит можно делить на  $3a$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = kx + 4,2k; \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \quad \text{должны иметь одно решение}$$

$$x^2 + k^2(x^2 + 8,4kx + 17,64) = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 8,4k^2x + (17,64k^2 - 9) = 0$$

$$D = 70,56k^4 - 4(k^2 + 1)(17,64k^2 - 9) =$$

$$= 70,56k^4 - 4(17,64k^4 + 8,64k^2 - 9) = 36 - 8,64k^2$$

$$\text{Т.к. реш. одно, то } k^2 = \frac{36}{8,64}; \quad k = \pm \frac{30}{12\sqrt{6}} =$$

$$= \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}. \quad \text{Это и есть угловые коэфф. касат.$$

внут. касательных. А нам подходят все прямые,

у которых угловой коэффициент лежит в пределах

$$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right). \quad \text{То есть } 1) -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}, \quad 1$$

$$4 - 5a\sqrt{6} = 0$$

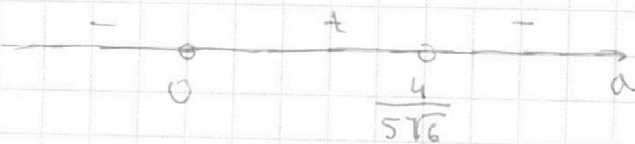
$$5a\sqrt{6} = 4$$

$$a = \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$\frac{12 - 15a\sqrt{6}}{36a} < 0$$

$$\frac{4 - 5a\sqrt{6}}{12a} < 0$$

методом интервалов:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N5 \quad \log_x^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_x^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

Найдём ОДЗ:

$$6x > 0; \quad x > 0$$

$$6x \neq 1; \quad x \neq \frac{1}{6}$$

$$y > 0;$$

$$y \neq 1;$$

ОДЗ:

$$x > 0; \quad x \neq \frac{1}{6}$$

$$y > 0; \quad y \neq 1$$

Тогда на области ОДЗ равносильны следующие преобразования:

$$\log_x^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$(\log_x(6x))^4 - \frac{2}{\log_x 6x} = \frac{3}{2 \cdot \log_x 6x} - 4$$

Пусть  $\log_x 6x = d$

$$d^4 + 4 = \frac{3}{2d} + \frac{2}{d}$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d};$$

$$2d^5 + 8d - 7 = 0 \quad (1)$$

Преобразуем второе

$$\log_x^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\log_x^4 y + \frac{6}{\log_x y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_x y} - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{\text{сб}} m = \log_7 y$$

$$m^4 + \frac{6}{m} = \frac{5}{2m} - 4$$

$$m^4 + 4 = -\frac{7}{2m}$$

$$2m^5 + 8m = -7 \quad (2)$$

Занесём (1) и (2) в систему

$$\begin{cases} 2d^5 + 8d = 7; \\ + \\ 2m^5 + 8m = -7; \end{cases}$$

$$d^5 + m^5 + 4(d+m) = 0$$

$$(d+m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4) + 4(d+m) = 0$$

$$(d+m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4 + 4) = 0$$

Второе слагаемое всегда равно  $-4$  при  $d+m \neq 0$ ,

верно:

$$d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4 = -4 \frac{d+m}{d+m} = -4$$

А значит единственное решение при  $d+m=0$

$$\text{Значит } \log_7(6x) + \log_7 y = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0; \quad 6xy = 1; \quad xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: Единственное возможное значение  $xy$ :

$$: \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \quad \ominus$$

$$\cos(3x) \quad \ominus \quad (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$

$$= \boxed{4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x}$$

$$\cos 5x = \cos(3x+2x) = (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) -$$

$$- (3\sin x - 4\sin^3 x)2\sin x \cos x = 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x -$$

$$(6\cos x - 6\cos^3 x - 4\cos x + 8\cos^3 x - 4\cos^5 x) \quad \ominus$$

$$\sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$6\cos x(1 - \cos^2 x) - 4\cos x(1 - \cos^2 x)^2 = 6\cos x - 6\cos^3 x - 4\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= 6\cos x - 6\cos^3 x - 4\cos x + 8\cos^3 x - 4\cos^5 x$$

$$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

$$\quad \ominus \quad 10\cos^5 x - 12\cos^3 x + \cos x$$

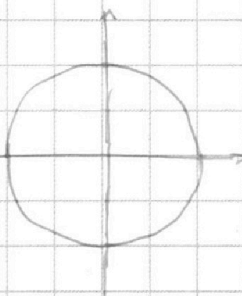
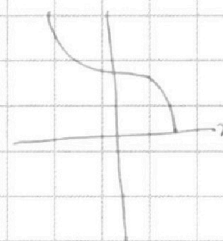
$$\uparrow$$

$$(3\sin x - 4\sin^3 x)2\sin x \cos x = 6\cos x(1 - \cos^2 x) - 8\cos x(1 - \cos^2 x)^2 =$$

$$= 6\cos x - 6\cos^3 x - 8\cos x + 16\cos^3 x - 8\cos^5 x$$

$$8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos x + 6\cos^3 x + 8\cos x - 16\cos^3 x + 8\cos^5 x =$$

$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$3ay = 7b - x, (a \neq 0)$$

$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x$$

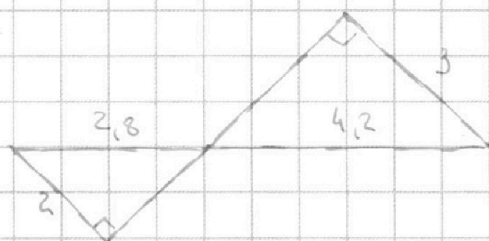
$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = kx + L$$

$$5k = 7$$

$$x = 1,4$$



$$k^2(x^2 + 8,4x + 17,64) + x^2 = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 8,4k^2(x)$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 27 \\ \hline 224 \\ 64 \\ \hline 864 \end{array}$$

у х

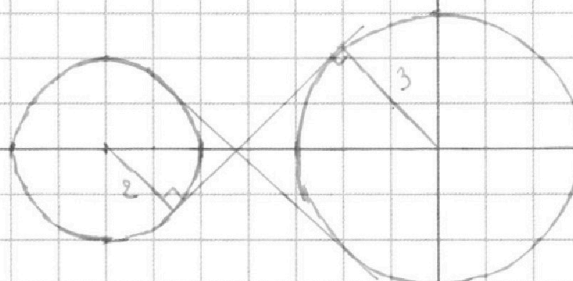
$$8 \cdot 108 =$$

$$= 27 \cdot 4 \cdot 8$$

$$264 = 108 \cdot 8 =$$

$$= 27 \cdot 32 =$$

=



$$\begin{array}{r} 42 \\ - 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot \\ 17,64 \\ - 4 \\ \hline 70,56 \end{array}$$

$$y = kx + L$$

$$L = 4,2k$$

$$y = k(x + 4,2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

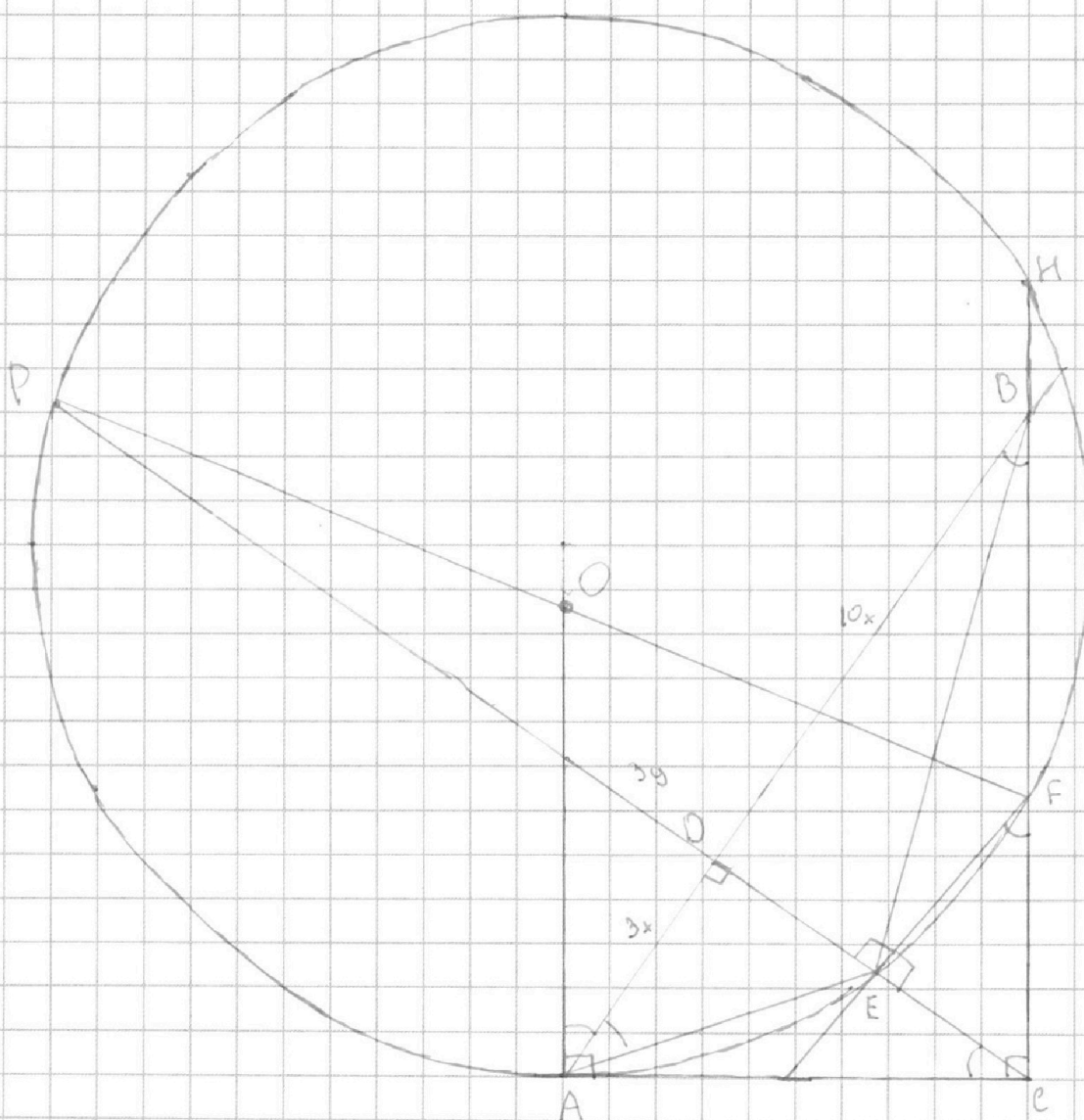
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



**МФТИ**



$$CD^2 = 30x^2$$

$$CD = \sqrt{30} \times$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$AC^L = CF \cdot (CF + CN)$$

$$\left(\frac{Ae}{CF}\right)^2 = \frac{eH}{CF}$$

$$30d^2 + 600d = 1300$$

$$d \approx \frac{1}{\sqrt{130}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_1 = d_2 + 1$$

$d$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 7 \\ d_1 + d_3 = 14 \quad (-) \\ d_2 + d_3 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} d_3 = 7 + d_2 \\ d_1 = 1 + d_2 \\ d_3 = 6 + d_1 \end{cases}$$

$$d_3 = 6 + 1 + d_2$$

Пусть  $d_1 + d_2 + d_3 = 14 \Rightarrow d_2 = 0; d_3 = 13$

~~154~~  $2d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 34; d_1 + d_2 + d_3 \geq 17$

$$d_2 = 3; d_1 = 4; d_3 = 10;$$

$$p_1 = 5; p_2 = 11; p_3 = 16$$

$$p_1 + p_2 + p_3 \geq 38; p_1 + p_3 \geq 43$$

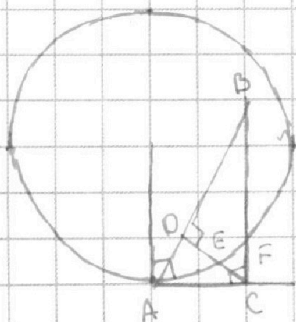
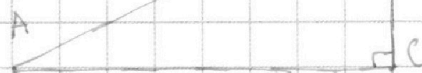
Пусть  $p_1 = 14; p_3 = 29; p_2 = 0$

$$-\frac{7}{2} \log_7 7 = 4 + \log_7^4 y$$

$$2d^5 + 8d = -7$$

$$d + m =$$

$$= \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy$$



$$d(2d^4 + 8)$$

$$\frac{BD + AD}{BP} = \frac{13}{10}$$

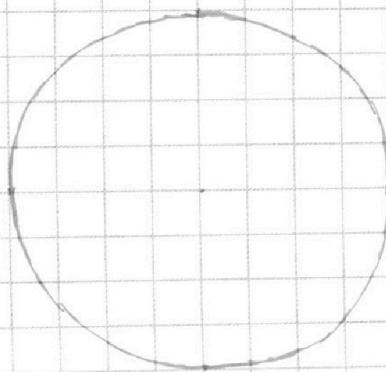
$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

$$d^4 + \frac{6}{d} = \frac{5}{2 \cdot d} - 4$$

$$d^4 + 4 = -\frac{7}{2d}$$

$$2d^5 + 8d = -7$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$d = \log_7 6x$$

$$d^4 + 4 = \frac{3}{2d} + \frac{2}{d}$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d}$$

$$2d^5 + 8d = 7$$

$$2(d^5 - m^5) + 8(d - m) = 14 \quad 2(m^5 + d^5) + 8(m + d) = 0$$

$$d^5 - m^5 + 4(d - m) = 7$$

$$(d - m)(d^4 + md^3 + m^2d^2 + m^3d + m^4) =$$

$$= d^5$$

$$(d - m)(d^4 + d^3m + d^2m^2 + dm^3 + m^4 + 4) = 7$$

$$m^5 + 4m + d^5 + 4d = 0$$

$$m(m^4 + 4) = -d(d^4 + 4)$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40 \quad (-11; 68)$$

$$(d + m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4) =$$

$$= d^5 + m^5$$

$$d^4 + d^3m + m^4 - d^2m^2 - dm^3 - d^3m + 4 + d^2m^2$$

$$(d^2 + m^2)^2 + 4 - dm(m^2 + 2dm + d^2) +$$





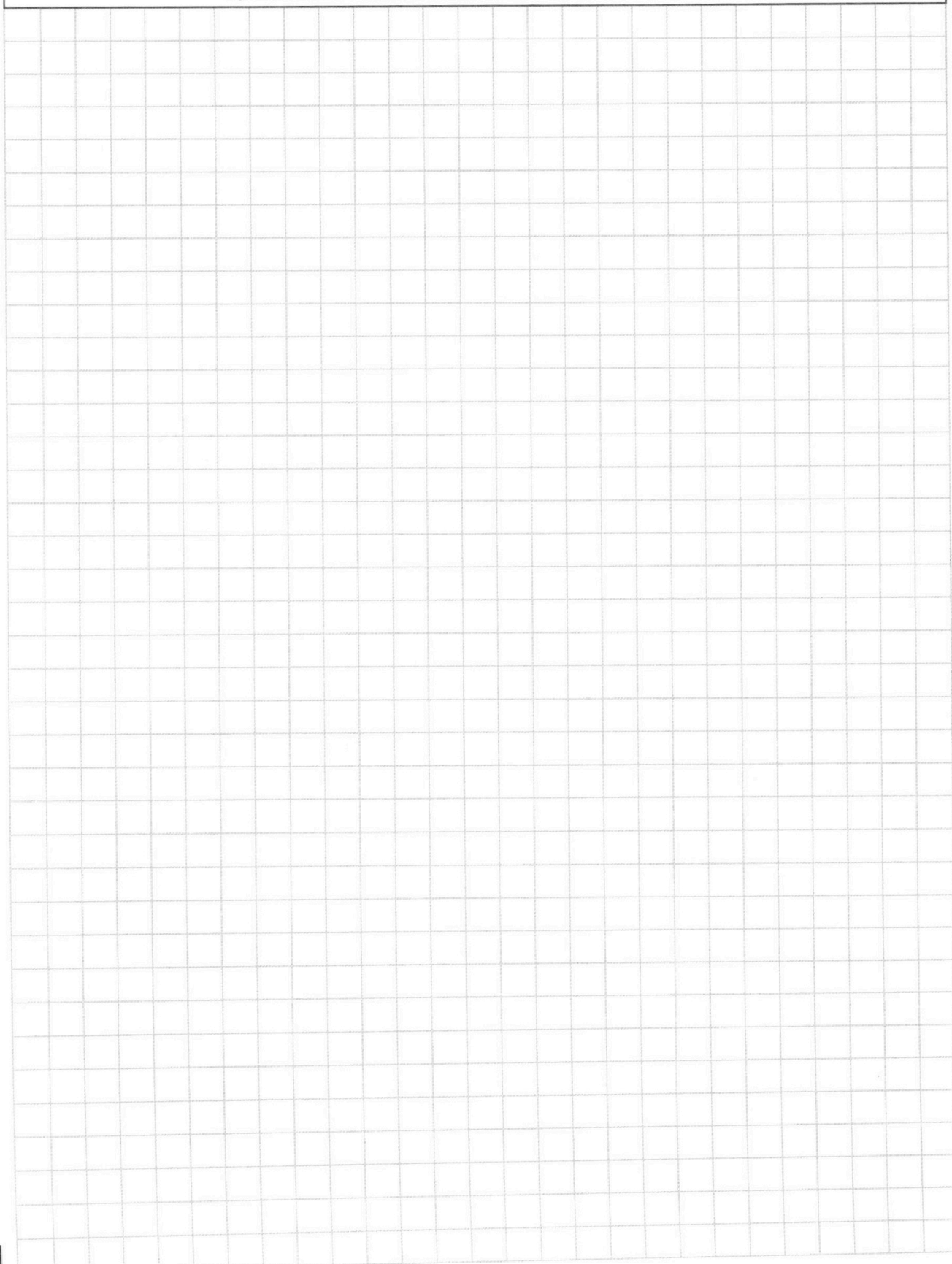
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}. \quad \text{Это прямая}$$

Заметим, что от  $b$  зависит только свободный член, а значит, используя  $b$ , мы можем только двигать прямую вверх и вниз. Графически видно, что для того, чтобы было 4 решения, нужно, чтобы  $b$  было таким, когда прямая пересекает вторую окружность, она всё ещё пересекала первую. (Т.к. у прямой с окруж. максимум 2 общие точки, то 4 точки  $\Rightarrow$  пересекает обе окруж.)

Рассмотрим 2 крайних случая — внутренние касательные. Проведем радиусы в точки касания, видим 2 подобных треугольника

$$\text{Тогда } 2x + 3x = 7$$

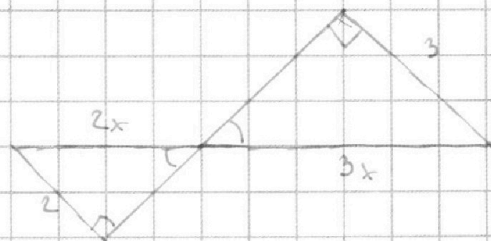
$$x = 1,4, \quad \text{Значит, касательная}$$

проходит через

точку  $(-4, 2; 0)$

$$y = k_1x + b_1; \quad 0 = -4,2k_1 + b_1; \quad b_1 = 4,2k_1$$

Т.к. одна точка, то система







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

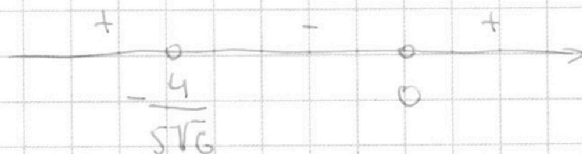
$$2) -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} >$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{12} + \frac{1}{3a} > 0$$

$$\frac{a \cdot 5\sqrt{6} + 4}{12a} > 0 ;$$

$$5a\sqrt{6} + 4 = 0$$

$$a = -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$



Соединяя эти два промежутка, получаем

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty\right)$$