



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_4^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1
 $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$; $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$; $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$
где $d_1, d_2, d_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - целые неотрицательные.
Т.к. нас просят найти минимальное значение abc ,

то другим чисел в разложении быть не может

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow d_1 + d_2 \geq 7; \beta_1 + \beta_2 \geq 11; \gamma_1 + \gamma_2 \geq 14$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow d_2 + d_3 \geq 13; \beta_2 + \beta_3 \geq 15; \gamma_2 + \gamma_3 \geq 18$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow d_1 + d_3 \geq 14; \beta_1 + \beta_3 \geq 17; \gamma_1 + \gamma_3 \geq 43$$

Складывая условия для степеней двоек получаем:

$$+ d_1 + d_2 \geq 7$$

$$+ d_2 + d_3 \geq 13$$

$$+ d_1 + d_3 \geq 14$$

$$2d_1 + 2d_2 + 2d_3 \geq 34;$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 17.$$

Приведём пример, когда $d_1 + d_2 + d_3 = 17$

Пусть $d_1 = 4; d_2 = 3; d_3 = 10$. Тогда:

$$4 + 3 \geq 7$$

$$3 + 10 \geq 13$$

$$4 + 10 \geq 14,$$

$$\Rightarrow d_{\min} = 17$$

Продолжая аналогичную операцию со степенями тройки, получаем:

$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 43$. Т.к. степени, очевидно, целые неотрицательные, то минимальное значение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 44 \quad (\text{т.к. } 43 - \text{нечётное})$$

Приведём пример, где $p_1 + p_2 + p_3 = 22$

Пусть $p_1 = 6$; $p_2 = 5$; $p_3 = 11$. Тогда

$$6 + 5 \geq 11$$

$$5 + 11 \geq 15$$

$$6 + 11 \geq 17$$

$$\Rightarrow p_{\min} = 22$$

Аналогично для r_1, r_2, r_3 получаем

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq 75 \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 38$$

Однако $r_1 + r_3 \geq 43$. Значит $r_1 + r_2 + r_3 \geq 43$,

ведь $r_2 \geq 0$ (т.к. a, b, c натуральные по усло-

вию). Приведём пример, где $r_1 + r_2 + r_3 = 43$

Пусть $r_1 = 14$; $r_2 = 0$; $r_3 = 29$. Тогда:

$$14 + 0 \geq 14$$

$$0 + 29 \geq 18$$

$$14 + 29 \geq 43$$

$$\Rightarrow r_{\min} = 43$$

Значит, наименьшее значение abc будет

$$2^{p_{\min}} \cdot 3^{r_{\min}} \cdot 5^{s_{\min}} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$FE \parallel AD, \text{ то } \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{CE} \right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 10}{7\sqrt{30}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{30}}{7} \right)^2 = \frac{30}{49}$$

Ответ: $\frac{30}{49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

Т.к. $\frac{AD}{BD} = \frac{13}{10}$

$\frac{BD + AD}{BD} = \frac{13}{10}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$

Пусть $AD = 3x$,

$BD = 10x$ Тогда $CD^2 = AD \cdot BD$

$CD^2 = 30x^2$; $CD = \sqrt{30}x$; $AC = \sqrt{21}x$, $BC = \sqrt{130}x$

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{130}}$; $\cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{130}}$

По т. косинусов

~~$169x^2 + BF^2 - 2 \cdot 6x \cdot BF \cdot \frac{10}{\sqrt{130}} = 21x^2 + (\sqrt{130}x - BF)^2$~~

~~$169x^2 + BF^2 - 2 \cdot 6x \cdot BF \cdot \frac{10}{\sqrt{130}} = 21x^2 + 130x^2 - 2\sqrt{130}x \cdot BF + BF^2$~~

~~$(\frac{260}{\sqrt{130}}x - 2\sqrt{130}x)BF = 18x^2$~~

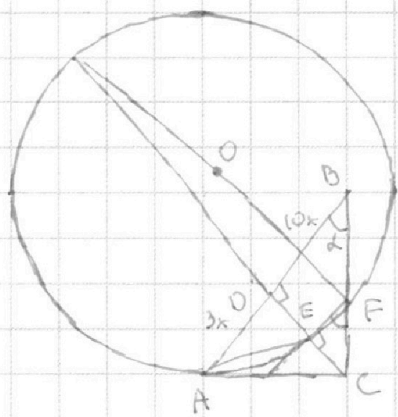
ΔADE и ΔBDC - они подобны по двум

углам ($\angle DAE$ и $\angle DBC$) Тогда из подобия

$\frac{10x}{3x} = \frac{CD}{DE}$, $DE = \frac{3}{10}CD$; $DE = \frac{3\sqrt{30}}{10}x \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = \frac{10\sqrt{30}}{10} - \frac{3\sqrt{30}}{10} = \frac{7\sqrt{30}}{10}$ Тогда, раз

$\Delta CEF \sim \Delta ADC$ по углам $\angle ACD$ и $\angle CFE$ (т.к.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\cos(5 \arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

П.к. $\cos 5d = 16 \cos^5 d - 20 \cos^3 d + 5 \cos d$, а также

$$\cos(\arccos(x)) = x, \text{ то:}$$

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x = \sin x$$

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 4 \sin x = 0$$

$$4 \sin^5 x - 5 \sin^3 x + \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{или } 4 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 1 = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Положим } d = \sin^2 x$$

$$1) \sin^4 x = 1$$

$$4d^2 - 5d + 1 = 0$$

$$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$d_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = 1$$

$$2) \sin^4 x = \frac{1}{4};$$

$$i) \sin x = +\frac{1}{2}; \quad x = \begin{cases} 2\pi n + \frac{\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n + \frac{5\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$ii) \sin x = -\frac{1}{2}; \quad x = \begin{cases} 2\pi n - \frac{\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n - \frac{5\pi}{6}; & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

То есть, объединив в одну серию корней,

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Однако, т.к. из равенства косинусов не следует равенство аргументов, проверим полученные корни.

1) $\sin x = 0$;

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x ;$$

$$x = \pi$$

2) $\sin x = -1$

$$5\pi = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

3) $\sin x = 1$

$$0 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{20\pi}{6} - \frac{9\pi}{6}$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

5) $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{11\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{2} ; \frac{7\pi}{2} ; \pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0; \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0; \end{cases}$$

Второе уравнение системы — две окружности
(т.к. либо $x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$, либо $x^2 + y^2 - 9 = 0$,
либо оба сразу). Преобразуем $x^2 + 14x + y^2 + 45$

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4$$

$(x + 7)^2 + y^2 = 2^2$. Нарисуем это в коорд. XY

Преобразуем

первое

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$3ay = 7b - x$$

При $a = 0$ 4

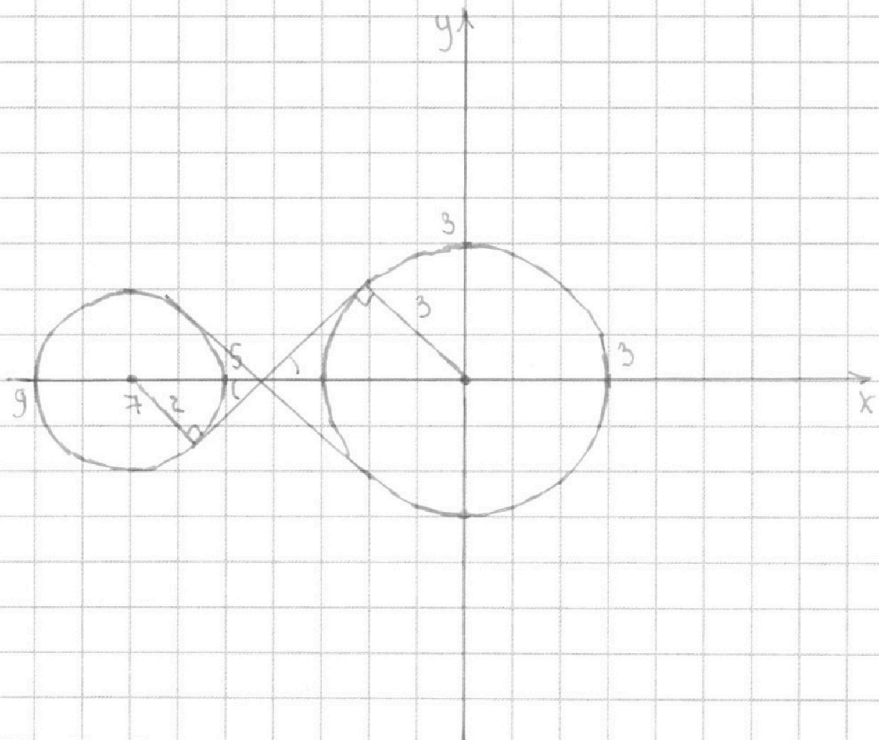
решений быть

не может, т.к.

это получается

ся вертикаль

ная прямая. Значит можно делить на 3a



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = kx + 4,2k; \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \quad \text{должна иметь одно решение}$$

$$x^2 + k^2(x^2 + 8,4kx + 17,64) = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 8,4k^2x + (17,64k^2 - 9) = 0$$

$$D = 70,56k^4 - 4(k^2 + 1)(17,64k^2 - 9) =$$

$$= 70,56k^4 - 4(17,64k^4 + 8,64k^2 - 9) = 36 - 8,64k^2 \cdot 4$$

$$\text{П.к. реш. одно, то } k^2 = \frac{36}{8,64}; \quad k = \pm \frac{30}{12\sqrt{6}} =$$

$$= \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}. \quad \text{Это и есть угловые коэфф. наших}$$

внут. касательных. А они подходят все прямые,

у которых угловой коэффициент лежит в пределах

$$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right). \quad \text{То есть } 1) -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}, \quad |$$

$$4 - 5a\sqrt{6} = 0$$

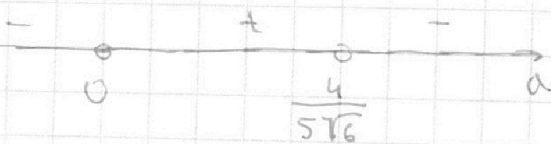
$$5a\sqrt{6} = 4$$

$$a = \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$\frac{12 - 15a\sqrt{6}}{36a} < 0$$

$$\frac{4 - 5a\sqrt{6}}{12a} < 0$$

методом интервалов:



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

Найдем ОДЗ:

$$6x > 0; x > 0$$

$$6x \neq 1; x \neq \frac{1}{6}$$

$$y > 0;$$

$$y \neq 1;$$

ОДЗ:

$$x > 0; x \neq \frac{1}{6}$$

$$y > 0; y \neq 1$$

Тогда на области ОДЗ равносильны следующие преобразования:

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$(\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \cdot \log_7 6x} - 4$$

Пусть $\log_7 6x = d$

$$d^4 + 4 = \frac{3}{2d} + \frac{2}{d}$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d};$$

$$2d^5 + 8d - 7 = 0 \quad (1)$$

Преобразуем второе

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7 \text{сб } m = \log_7 y$$

$$m^4 + \frac{6}{m} = \frac{5}{2m} - 4$$

$$m^4 + 4 = -\frac{7}{2m}$$

$$2m^5 + 8m = -7 \quad (2)$$

Занесём (1) и (2) в систему

$$\begin{cases} 2d^5 + 8d = 7; \\ + \\ 2m^5 + 8m = -7; \end{cases}$$

$$d^5 + m^5 + 4(d+m) = 0$$

$$(d+m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4) + 4(d+m) = 0$$

$$(d+m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4 + 4) = 0$$

Вторая строка всегда равна -4 при $d+m \neq 0$,

ведь:

$$d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4 = -4 \frac{d+m}{d+m} = -4$$

А значит единственное решение при $d+m=0$

$$\text{Значит } \log_7(6x) + \log_7 y = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0; \quad 6xy = 1; \quad xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: Единственное возможное значение xy :

$$: \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1 2 3 4 5 6 7
-

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{arccos}(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \quad \ominus$$

$$\cos 3x \quad \ominus \quad (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$- 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$

$$= \boxed{4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x}$$

$$\cos 5x = \cos(3x+2x) = (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) -$$

$$- (3\sin x - 4\sin^3 x)2\sin x \cos x = 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x -$$

$$(6\cos x - 6\cos^3 x - 4\cos x + 8\cos^3 x - 4\cos^5 x) \quad \ominus$$

$$\sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$6\cos x(1 - \cos^2 x) - 4\cos x(1 - \cos^2 x)^2 = 6\cos x - 6\cos^3 x - 4\cos x$$

$$- 4\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

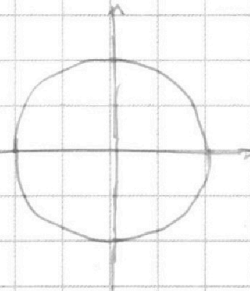
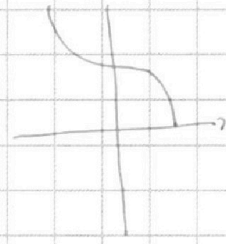
$$\ominus 10\cos^5 x - 12\cos^3 x + \cos x$$

$$\uparrow$$
$$f) \sin x - 4\sin^3 x) 2\sin x \cos x = 6\cos x(1 - \cos^2 x) - 8\cos x(1 - \cos^2 x)^2 =$$

$$= 6\cos x - 6\cos^3 x - 8\cos x + 16\cos^3 x - 8\cos^5 x$$

$$8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 6\cos x + 6\cos^3 x + 8\cos x - 16\cos^3 x + 8\cos^5 x =$$

$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x + 2ay - 7b = 0$$

$$2ay = 7b - x \quad (a \neq 0)$$

$$y = \frac{7b}{2a} - \frac{1}{2a}x$$

$$y = -\frac{1}{2a}x + \frac{7b}{2a}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = kx + L$$

$$5k = 7$$

$$x = 1,4$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 27 \\ \hline 224 \\ 6 \cdot 4 \\ \hline 864 \end{array}$$

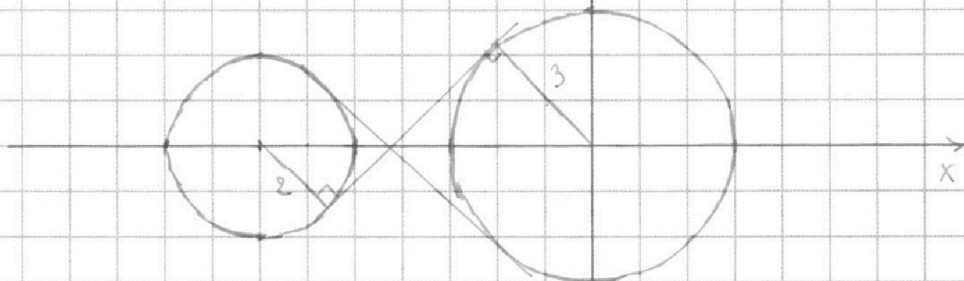
$$8 \cdot 108 =$$

$$= 27 \cdot 4 \cdot 8$$

$$264 = 108 \cdot 8 =$$

$$= 27 \cdot 32 =$$

=



$$42$$

$$42$$

$$84$$

$$168$$

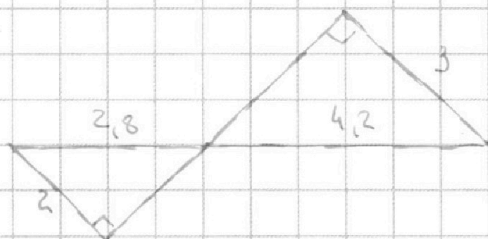
$$1764$$

$$2 \cdot$$

$$1764$$

$$4$$

$$7056$$



$$k^2(x^2 + 8,4x + 17,64) + x^2 = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 8,4k^2(x)$$

$$y = kx + L$$

$$L = 4,2k$$

$$y = k(x + 4,2)$$



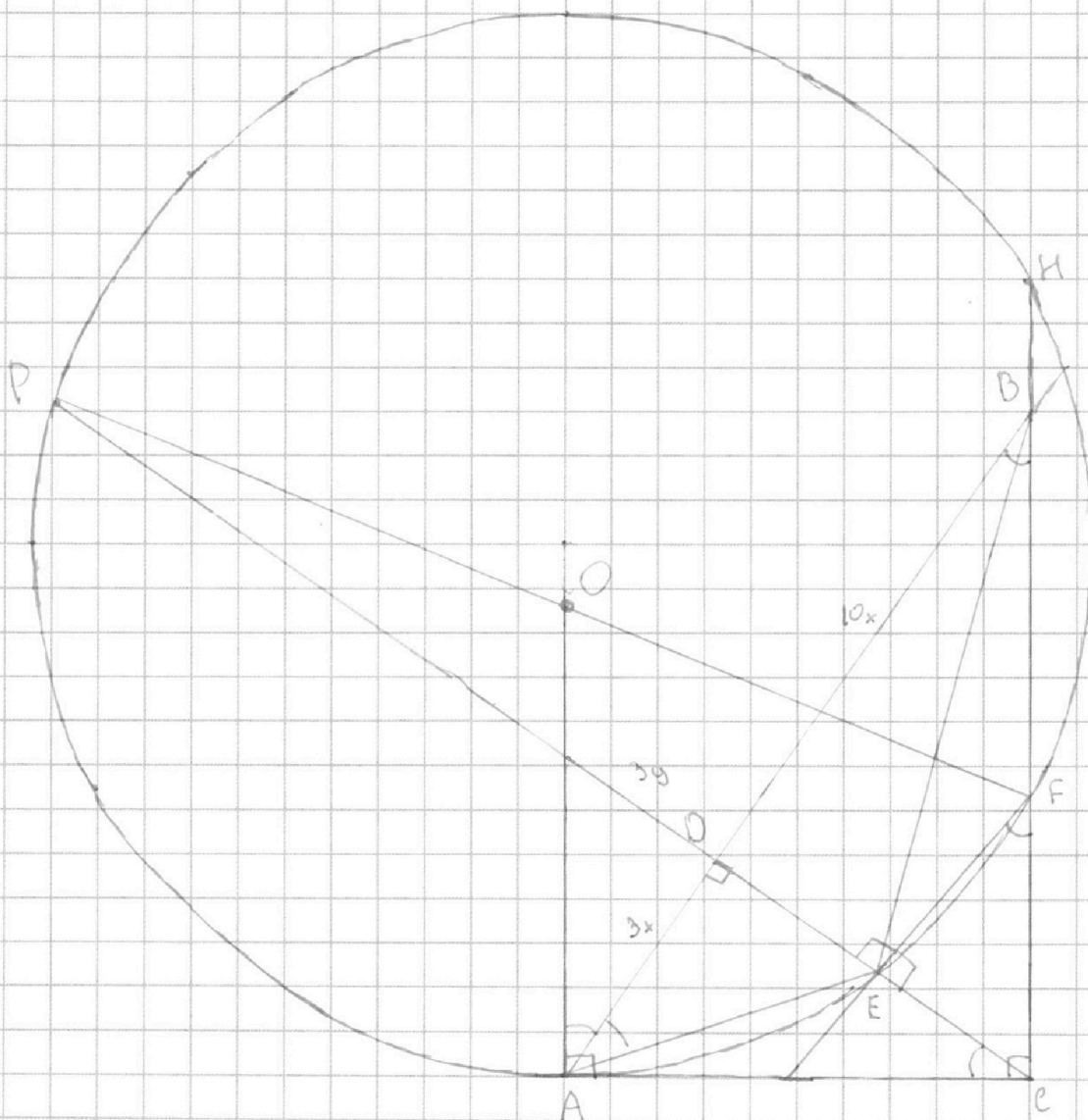
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD^2 = 30x^2$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10};$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AFE}} = 21$$

$$AC^2 = CF \cdot (CF + CH)$$

$$30d^2 + 100d^2 = 1$$

$$\left(\frac{AE}{CF}\right)^2 = \frac{EH}{CF}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{130}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_1 = d_2 + 1$$

d

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 7 \\ d_1 + d_3 = 14 \\ d_2 + d_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_3 = 7 + d_2 \\ d_1 = 1 + d_2 \\ d_3 = 6 + d_1 \end{cases}$$

$$d_3 = 6 + 1 + d_2$$

Пусть $d_1 + d_2 + d_3 = 14 \Rightarrow d_2 = 0; d_3 = 13$

~~2d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 34~~ ; $d_1 + d_2 + d_3 \geq 17$

$d_2 = 3; d_1 = 4; d_3 = 10;$

$\beta_1 = 5; \beta_2 = 11; \beta_3 = 16$

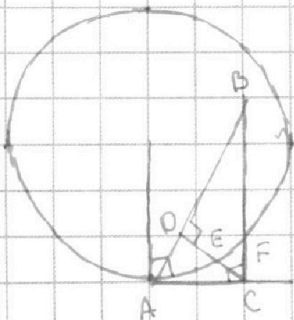
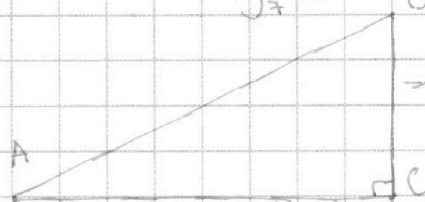
$r_1 + r_2 + r_3 \geq 38; r_1 + r_3 \geq 43$

Пусть $r_1 = 14; r_3 = 29; r_2 = 0$

$$-\frac{7}{2} \log_7 y = 4 + \log_7^4 y$$

$$2d^5 + 8d = -7$$

$$= \log_7^4 x + \log_7^4 y = \log_7^4 xy$$



$$d(2d^4 + 8)$$

$$\frac{BD + AD}{BP} = \frac{13}{10}$$

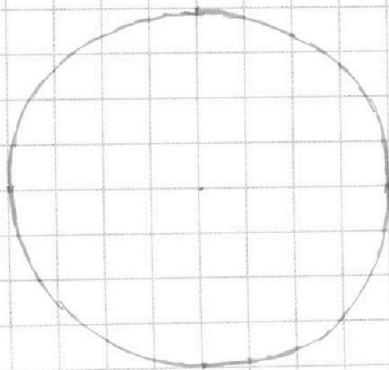
$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

$$d^4 + \frac{6}{d} = \frac{5}{2 \cdot d} - 4$$

$$d^4 + 4 = -\frac{7}{2d}$$

$$2d^5 + 8d = -7$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d = \log_7 6x$$

$$d^4 + 4 = \frac{3}{2d} + \frac{2}{d}$$

$$d^4 + 4 = \frac{7}{2d}$$

$$2d^5 + 8d = 7$$

$$m = \log_7 y$$

$$m^4 + 4 = -\frac{7}{2m}$$

$$2m^5 + 8m = -7$$

$$+ \frac{2d^5 + 8d = 7}{2d^5 + 8d = 7}$$

$$2(d^5 - m^5) + 8(d - m) = 14 \quad 2(m^5 + d^5) + 8(m + d) = 0$$

$$d^5 - m^5 + 4(d - m) = 7$$

$$\rightarrow (d - m)(d^4 + md^3 + m^2d^2 + m^3d + m^4) =$$

$$= d^5$$

$$(d - m)(d^4 + d^3m + d^2m^2 + dm^3 + m^4 + 4) = 7$$

$$m^5 + 4m + d^5 + 4d = 0$$

$$m(m^4 + 4) = -d(d^4 + 4)$$

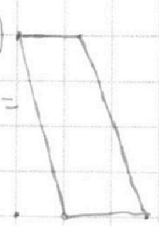
$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40 \quad (-17; 68)$$

$$(d + m)(d^4 - d^3m + d^2m^2 - dm^3 + m^4) =$$

$$= d^5 + m^5$$

$$d^4 + d^3m + m^4 - d^2m^2 - dm^3 - d^2m^2 + 4 + d^2m^2$$

$$(d^2 + m^2)^2 + 4 - dm(m^2 + 2dm + d^2) +$$





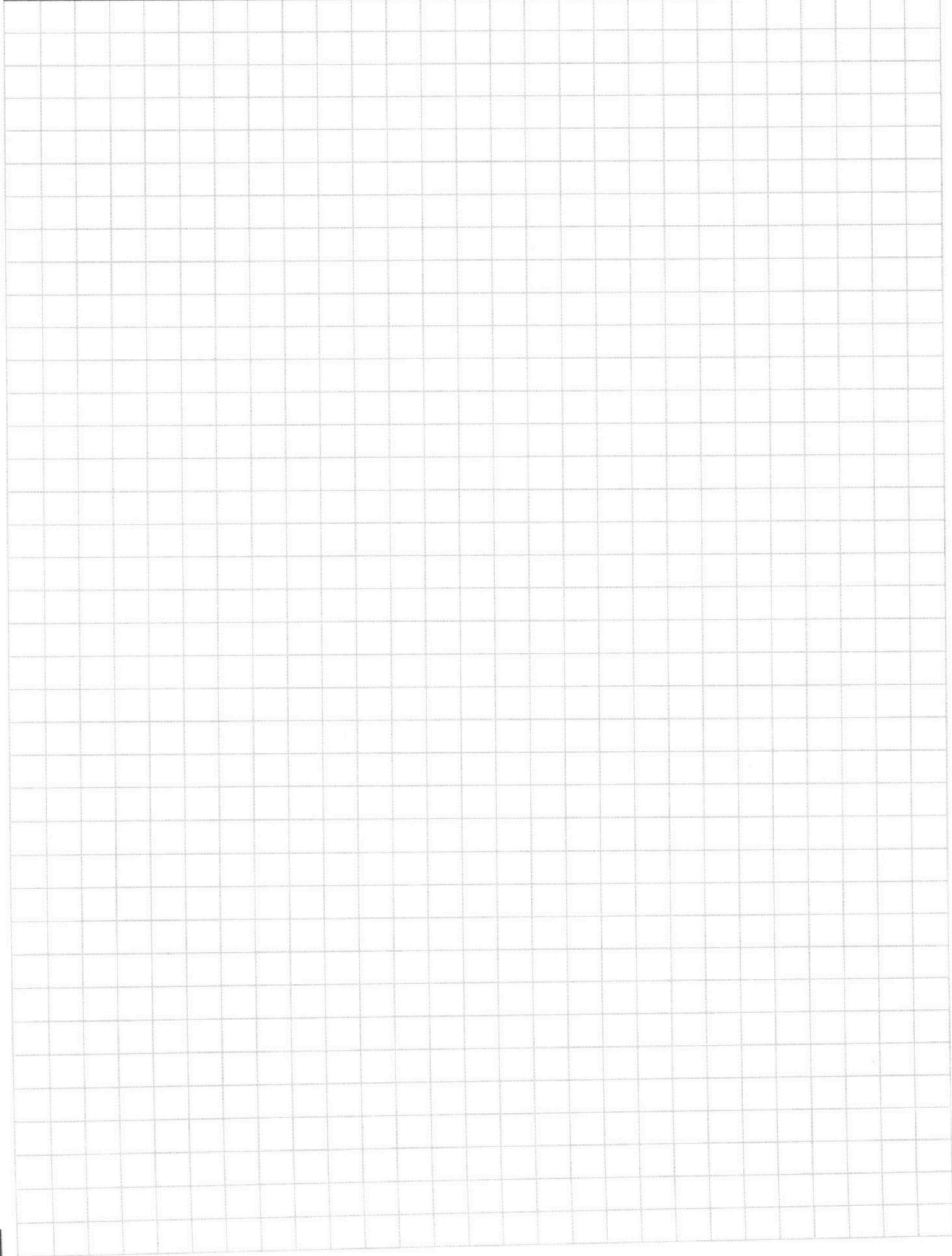
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$. Это прямая
Заметим, что от b зависит только свободный
член, а значит, используя b , мы можем только
двигать прямую вверх и вниз. Графически вид-
но, что для того, чтобы было 4 решения, нужно,
чтобы в момент, когда прямая пересекает
вторую окружность, она всё ещё пересекала
первую. (Т.к. у прямой с окруж. максимум
2 общие точки, то 4 точки \Rightarrow пересекает обе окруж.)

Рассмотрим 2 крайних случая - внутренние касательные.
Проведем радиусы в точки касания,
видим 2 подобных треугольника

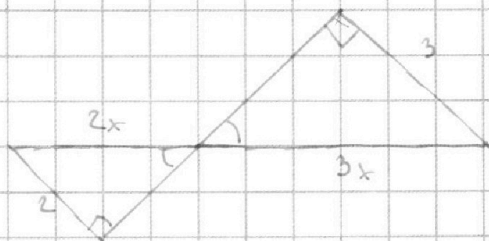
$$\text{Тогда } 2x + 3x = 7$$

$x = 1,4$, Значит, касательная проходит через

точку $(-4, 2; 0)$

$$y = kx + b; \quad 0 = -4,2k + b; \quad b = 4,2k$$

Т.к. одна точка, то система





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} >$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{12} + \frac{1}{3a} > 0$$

$$\frac{a \cdot 5\sqrt{6} + 4}{12a} > 0$$

$$5a\sqrt{6} + 4 = 0$$

$$a = -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$



Соединяя эти два промежутка, получаем

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{4}{5\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{4}{5\sqrt{6}}; +\infty\right)$$