



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

Обозначим  $a_i, b_i, c_i$  - ~~каждый~~ максимальная степень простого множителя  
и на которого делится  $a, b, c$ .

Тогда  $a_2 + b_2 \geq 9$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + c_2 \geq 13$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \rightarrow \text{или } abc$$

аналог делится на  $2^{21}$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_3 + c_3 \geq 13$$

$$a_3 + c_3 \geq 13$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21 \rightarrow \text{или } abc: 3^{21}$$

$$a_5 + b_5 \geq 10$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 10$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27 \rightarrow \text{или } abc: 5^{27}$$

Получаем, что  $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ , но  $abc: bc \Rightarrow abc: 5^{30}$ , так что

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$ , проверим  $a, b, c$  когда получаем при  $abc = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}, \text{ получаем } ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{10} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим  $EF$  до пересечения с  $CB(N)$ .

Обозначим  $AB$  за  $3x$ ,  $DB$  за  $x$ . Тогда

и.и.  $EN \parallel AB$ .  $EF = 3y$ ,  $FN = y$ .

Тогда по свойствам касательной и секущей:

$$FN \cdot NE = NB^2$$

$$y \cdot 4y = NB^2 \Rightarrow NB = 2y$$

( $D$  - высота окружности  $\Delta$ )  $CD^2 = AD \cdot DB$

$$CD = \sqrt{3}x$$

$$(F = \frac{y}{x} \cdot CD = \sqrt{3}y \Rightarrow FD =$$

$$= \sqrt{3}(x-y) \text{ и т.д.}$$

$$(\sqrt{3}(x-y))^2 + (x-y)^2 = (2y)^2$$

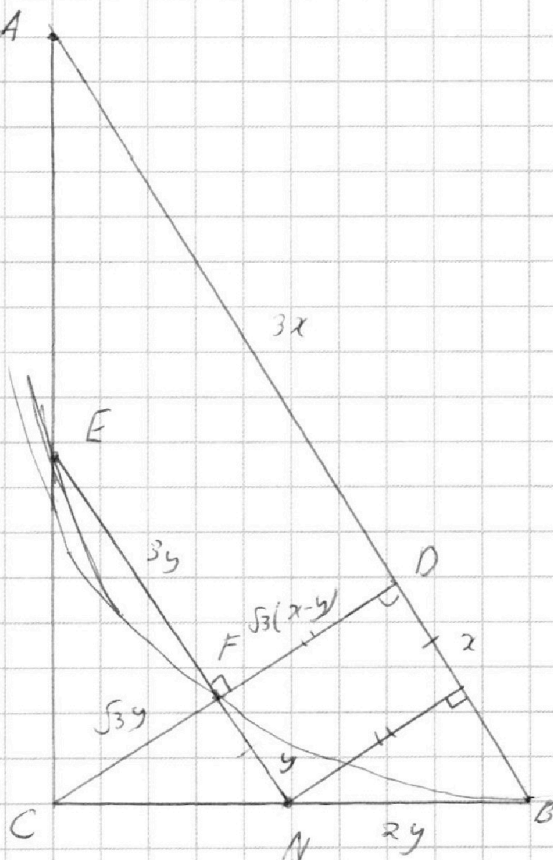
$$4(x-y)^2 = 4y^2$$

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4y^2 \Rightarrow 4x^2 - 8xy = 0$$

$$4x = 8y, \quad x = 2y, \quad S_{APC} = \frac{3S_{ABC}}{4}$$

$$S_{ECF} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3S_{ABC}}{16}$$

$$\text{Ответ: } S_{APC} : S_{ECF} = 16 : 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$5 \arcsin(\cos x) = \frac{x + \pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{x + \pi}{2}, \text{ заменим } \arcsin(\sin(x)) = x + 2\pi k,$$

$\downarrow$   
тогда, что  $x + 2\pi k \in [0, 2\pi]$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \frac{x + \pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = \frac{x + \pi}{2}$$

$$6x = 9\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}; \text{ тогда } \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi + 11\pi k}{3} \in [0, 2\pi]$$

$\downarrow$   
проверяем только  $k=0$

$$x = \frac{\pi}{3} - \text{единственный ответ}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч

Систему уравнений можно решить графически. Тогда первое уравнение - прямая вида  $kx+d=y$ , где  $ax+2y-3b=0$

$$y = -0,5ax + 1,5b; k = -0,5a; d = 1,5b$$

Второе уравнение можно из двух частей: окружность  $x^2+y^2-9=0$

$x^2+y^2=3^2$  - с центром в  $(0,0)$  и радиусом 3. и еще окружность  $x^2+y^2-12x+32=0$

$$x^2+y^2-12x+32=0; x^2-6 \cdot 2x+6^2+y^2=2^2$$

Получим так:

$$(x-6)^2+y^2=2^2 \text{ с центром в } (6,0) \text{ и радиусом } 2.$$

Тогда нам нужно найти тангенс  $k$ ,

при котором касательная к окружности с центром в  $(6,0)$  и радиусом 2,

касается обеих окружностей. Очевидно, что это  $k$

выпуклота.

Между  $k$  двумя другими касательными, как показано

на рисунке:

$$\text{Тогда } l_1+l_2=6, \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{2}, l_1=1,5l_2$$

$$1,5l_2=6, l_2 = \frac{6}{1,5}, l_1 = \frac{1,5 \cdot 6}{1,5}$$

$$= \frac{18}{1,5} = 3,6$$

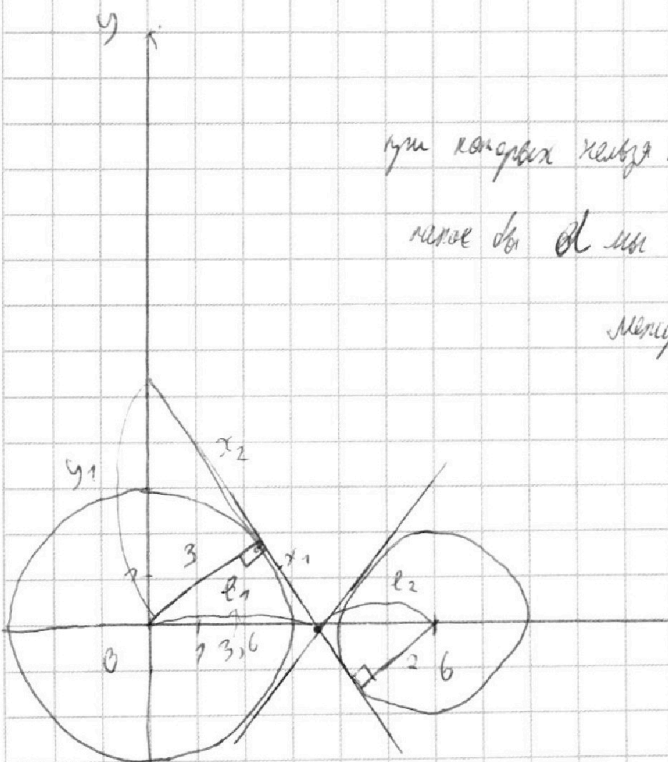
$$x_1^2 = 3,6^2 - 3^2 =$$

$$= 0,6 \cdot 6,6 \Rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{0,6 \cdot 6,6}, x_2 = \frac{3}{2}$$

$$k_1 = \frac{y_1}{3,6} = \frac{x_2}{3} = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{\sqrt{0,6 \cdot 6,6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow k_1 = \frac{5}{\sqrt{11}} \text{ - касат. отрезана линиями в}$$

одну окружность.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

м.е. при  $k \in \left[ -\frac{5}{\sqrt{11}}; +\frac{5}{\sqrt{11}} \right]$  - дуга несе 4 решениям при

точка в.  $k = 0,5a$ , значит при  $a \in \left[ -\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right]$  - несе 4.

Ответ:  $a = \left( -\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}} \right) \cup \left( \frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty \right)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



NS

По свойству логарифмов  $\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$ ,  $\log_3 5y = \frac{1}{\log_{5y} 3}$ , заменим  
 $\log_3 x$  на  $t_x$

тогда:

$\log_3 5y$  на  $t_y$

$$t_x^4 + \frac{6}{t_x} = \frac{5}{2t_x} - 8, \quad t_y^4 + \frac{2}{t_y} = \frac{11}{2t_y} - 8$$

$$t_x^5 + 6 = 2,5 - 8t_x, \quad t_y^5 + 2 = 5,5 - 8t_y$$

$$t_x^5 + 8t_x = -3,5, \quad t_y^5 + 8t_y = -3,5$$

$$t_x^5 + t_y^5 + 8(t_x + t_y) = 0$$

можно разложить на

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4)$$

группа эта всегда  $> 0$

тогда

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4 + 8) = 0$$

⇓

группа эта всегда  $> 0$

$$t_x + t_y = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$3^0 = 5xy, \quad 1 = 5xy \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $xy = 0,2$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

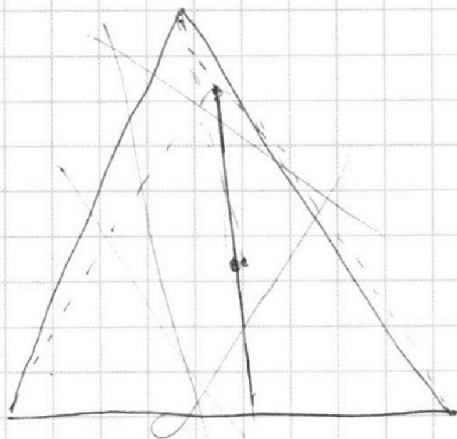
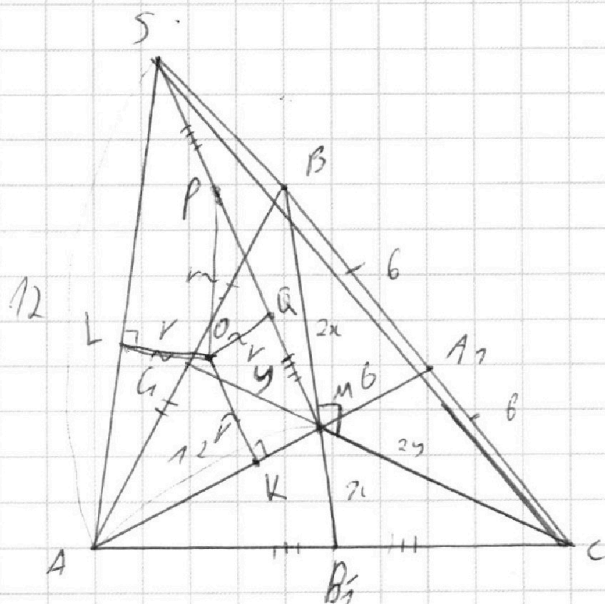
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Все линии восстановлены т.к. все стороны точки лежат на стороне плоскости ASM и стороны сферы - сферичность.

По теореме о секущей и касательной:  $MK^2 = MQ \cdot MP$ ;  $MK^2 = MQ \cdot (PQ + MQ)$

также  $\triangle OLA = \triangle AKO$  (углы же сферич.).

$AL = AK$ ;  $AL + SL = AK + KM$

$SA = AM = 12$

$SL^2 = SP \cdot SQ$ ;  $SL^2 = MQ \cdot (MQ + PQ)$   
( $SP = QM$ )

$MK = SL$

по свойствам медианы т.к.  $AA_1$  угол ее  $2\alpha:1 \Rightarrow MA_1 = 6 = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \triangle BMC$  - прямоугольный. Пусть  $BM = 2x$ ;  $CM = 2y$ , тогда  $MB_1 = x$   
 $CB_1 = y$

Заметим, что  $S_{MBC} = \frac{S_{BC}}{3} = 30 = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot 3x \cdot 3y =$   $xy = 15$

$= 18 \cdot 9xy = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 2430$

Ответ:  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

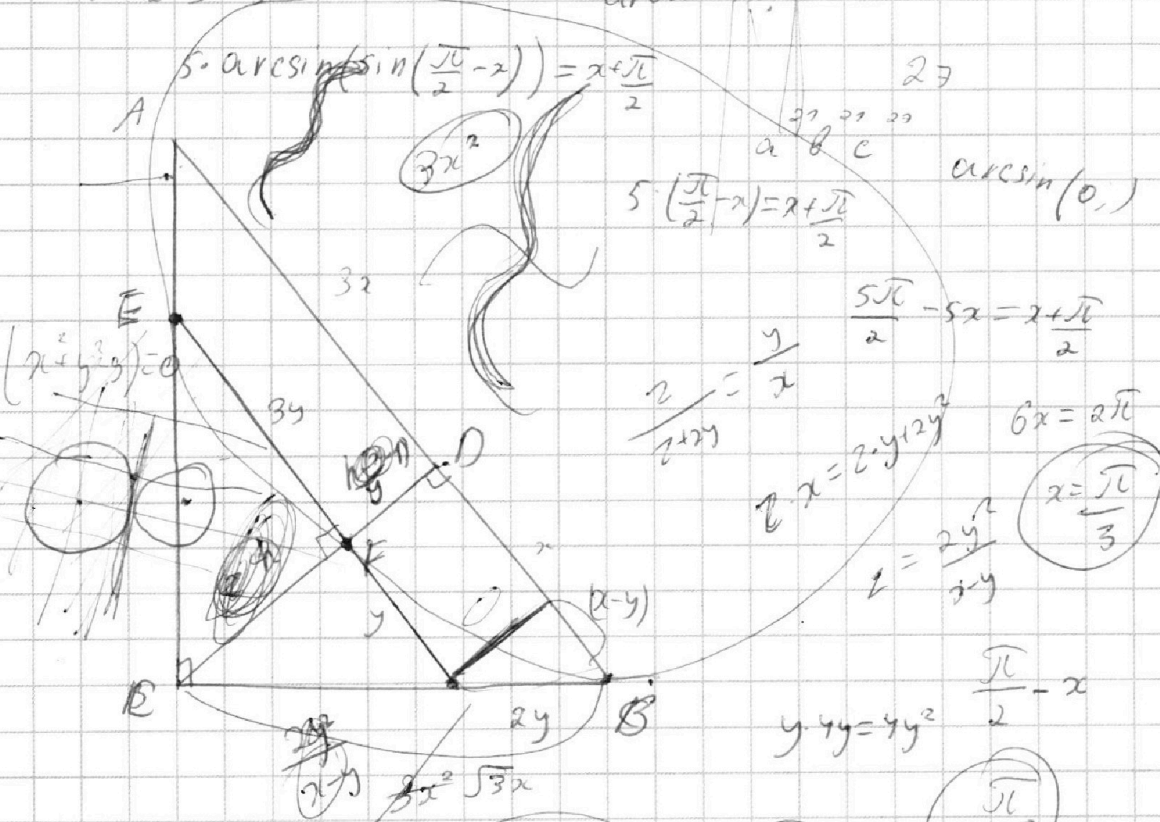
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$        $28 + 14 = 38 + 4 = 42$   
 $2 \cdot 6 \cdot x \cdot (x^2 - 6)^2 + y^2$   
 $a_2 + b_2 \geq 9$        $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$   
 $b_2 + c_2 \geq 14$        $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$        $23 + 18 = 41$   
 $a_2 + c_2 \geq 19$        $23 + 30 = 53$



$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$   
 $ax - 3b = 2y$   
 $60^\circ$   
 $\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}$   
 $\sqrt{3}x \left( \frac{x}{y} - 1 \right)^2 = 4y^2 + (x-y)^2$   
 $\frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



log

$$\log_3 243 = 5$$

$$txy (txy - tx^2y - ty^2) - txy$$

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{16}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^5$$

$$2 \log_x 27 = \log_x 243$$

$$2 \cdot \log_2 256 = 2 \cdot 4$$

$$a = 2^2$$

$$b = 2^2$$

$$c = 2^{22}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\log_3 2$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_2 5^{1024} = \log_2 1024 = 5$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 2} = \frac{5 \log_3 3^9}{2} - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 x \cdot 5y = 3$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{5\pi k}{3} + \frac{6\pi k}{3}$$

$$\frac{7\pi k}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\log_x z = \frac{1}{\log_z x}$$

$$2,5 - 6 = 3,5$$

$$tx^4 + \frac{6}{tx} = \frac{5}{2tx} - 8; \quad ty^4 + \frac{2}{ty} = \frac{11}{2ty} - 8$$

$$tx^3(tx - ty) + ty^3(ty - tx) = \frac{5}{2} - 8tx; \quad ty^3 + 2 = \frac{11}{2} - 8ty$$

$$(tx^3 - ty^3)(tx - ty) + tx^5 + 8tx = -3,5; \quad ty^5 + 8ty = 3,5$$

$$tx^5 + ty^5 + 8(tx + ty) = 0$$

$$(tx + ty)(tx^4 - tx^3ty + tx^2ty^2 - txty^3 + ty^4)$$

2B + 7 = 1  
3B = 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



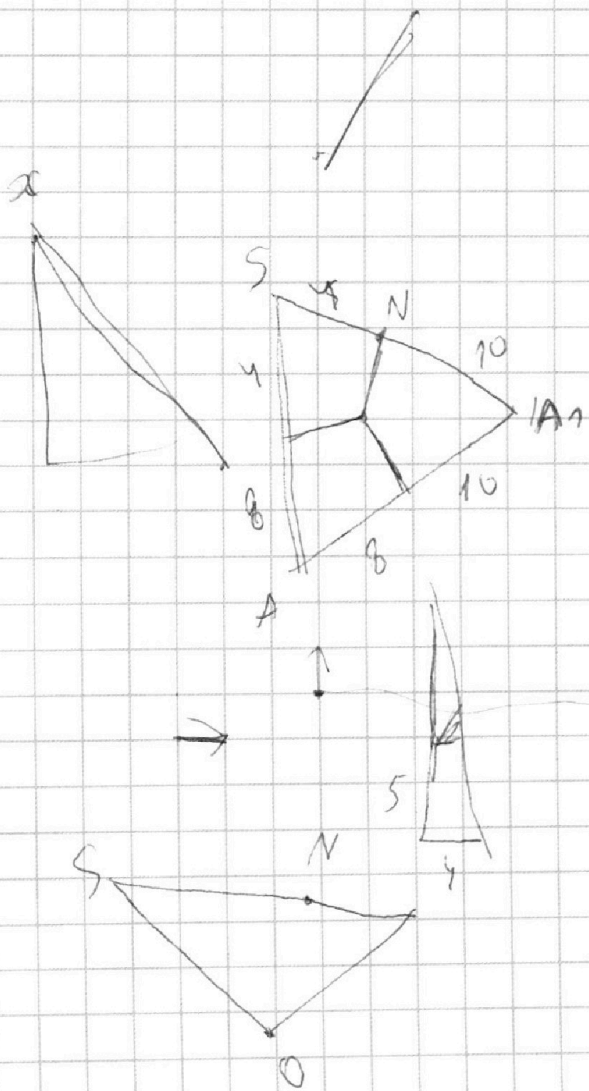
MS

~~систему уравнений можно решить графически. Тогда первая прямая~~

~~прямая будет  $y = kx + b$ , где  $ax + 2y - 3b = 0$~~

$$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b \rightarrow k = -\frac{a}{2}, d = 1,5b$$

~~а вторая прямая совпадает~~



0,6 6,6  
 0,6 0,6 11  
 0,6 · 5,71  
 $\frac{3}{0,6}$   
 $\frac{1}{0,2 \cdot 5,71}$   
 $\frac{5}{5,71}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem. The solution includes several diagrams of triangles and a tetrahedron, along with various equations and calculations.

**Diagrams:**

- Top left: A triangle with a vertical line segment labeled 'd' and an angle  $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))$ .
- Top right: A triangle with a point 'M' and lines to vertices 'L' and 'B'. A circle is drawn around 'M'.
- Middle left: A vertical line with a horizontal segment, labeled with 'cos' and 'sin'.
- Middle right: A triangle with a point 'S' and lines to vertices 'L' and 'Q'. A circle is drawn around 'S'.
- Bottom left: A triangle with a point 'M' and lines to vertices 'L' and 'B'. A circle is drawn around 'M'.
- Bottom center: A tetrahedron with vertices 'A', 'B', 'C', and 'L'. Points 'K', 'H', 'I', 'J' are marked on its edges.

**Equations and Calculations:**

- $(x-y)^2 = 4y^2$
- $\sqrt{3x(1-\frac{y}{2})}$
- $87 \cdot 2 = 162$
- $1620 + 810$
- $4x \cdot y = 30 \Rightarrow$
- $3y \cdot 3x \cdot 18 = 9xy \cdot 18 = 9 \cdot 30 \cdot 18 = 4860$
- $9x^2 + 9y^2 = 144 + 12 \cdot 12 = 144 + 144 = 288$
- $2^2 y^2 = 36$
- $\frac{30}{4} = 7.5$
- $\frac{18 \cdot 30}{2} = 15 \cdot 18 = 270$
- $90 + 90 = 180$

**Tables:**

3	10
6	9
9	8
12	7
15	6
18	5
21	4
24	3
27	2
30	1

**Other notes:**

- $\frac{\pi}{2} - x$
- $\frac{\pi}{2} - x$
- $ML \cdot MB =$
- $MK^2 = MQ \cdot MP$
- $SL^2 = SP \cdot SQ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1      2      3      4      5      6      7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!