



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Найдем a_1, b_1, c_1 - ~~какие~~ максимальные степени простого множителя

типа.

и на какую сумму a, b, c .

$$\text{Тогда } a_2 + b_2 \geq 9$$

$$b_2 + c_2 \geq 14 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$(a_2 + b_2 + c_2 \geq 21) \rightarrow \text{число } abc$$

запись делится на 2^{21} .

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$b_3 + c_3 \geq 13 \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$(a_3 + b_3 + c_3 \geq 21) \rightarrow \text{число } abc : 3^{21}$$

$$a_5 + b_5 \geq 10$$

$$b_5 + c_5 \geq 13 \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27 \rightarrow \text{число } abc : 5^{27}$$

$$a_5 + c_5 \geq 30$$

Получаем, что $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но $abc : bc \Rightarrow abc : 5^{30}$, так что

$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$, поэтому a, b, c можно записать в виде $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{20}, \text{ получим } ab = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{23}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{16} \cdot 5^{30} \cdot 2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Однако: } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

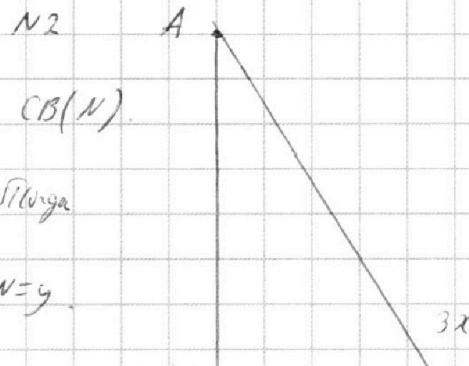


- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2



Продолжение EF до пересечения с $(B(N))$.

Однозначно $AD = 3x$, $DB = 3y$. Решение

и. $EN \parallel AB$. $EF = 3y$, $FN = y$.

Решение по способу исключения и подстановки.

$$FN \cdot NE = NB^2$$

$$y \cdot 4y = NB^2 \Rightarrow NB = 2y$$

$$(D \text{ - высота } \triangle ABC \Rightarrow AD = DB)$$

$$AD = \sqrt{3}x$$

$$\begin{aligned} CF &= \frac{y}{2x} \cdot AD = \sqrt{3}y \Rightarrow FD = \\ &= \sqrt{3}(x-y) \text{ решение.} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{3}(x-y))^2 + (x-y)^2 = (2y)^2$$

$$4(x-y)^2 = 4y^2$$

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4y^2 \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{2}$$

$$4x = 8y, \quad x = 2y; \quad S_{APC} = \frac{3S_{ABC}}{4}$$

$$S_{ECF} = \left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3S_{ABC}}{16}$$

$$\text{Отношение: } S_{ABC} : S_{CEB} = 16 : 3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$, значит что $\arcsin(\sin(a)) = a + 2\pi k$,
 $\forall a$, то $x + 2\pi k \in [0, 2\pi]$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}; \text{ тогда } \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi + 11\pi k}{3} \in [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \text{одинственный корень}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

Анализ уравнений можно решить уравнением. Тогда первое уравнение -

- прямая линия $kx+d=y$, т.е. $0,5x+2y-3=0$

$$y = -0,5x + 1,5; k = -0,5; d = 1,5.$$

Второе уравнение симметрии из двух окружностей: общее уравнение $x^2+y^2=9=0$

$x^2+y^2=3^2$ - с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом 3 и еще одна общая окружность

$$x^2+y^2-12x+32=0, x^2-6^2 \cdot x+6^2+y^2=2^2$$

Первый касательный:

$$(x-6)^2+y^2=2^2 - \text{с центром } B(6,0) \text{ и радиусом } 2.$$

y

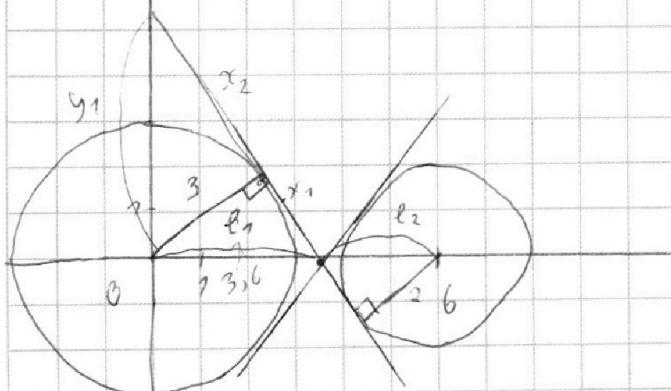
Тогда радиус касания имеет форму k ,

или конспект ходят наклонные прямые касательных (общих),

такие что k не делил. Видимо, что это k

общий

Между k есть симметрии координатных, как показано
на рисунке.



$$\text{Тогда } l_1+l_2=6, \frac{l_1}{l_2}=\frac{3}{2}, l_1=1,5l_2$$

$$1,5l_2=6, l_2=\frac{6}{1,5}, l_2=\frac{1,5 \cdot 6}{2,5}=$$

$$=\frac{18}{5}=3,6$$

$$x_1^2=3,6^2-3^2=$$

$$=9,6 \cdot 6,6 \Rightarrow$$

$$x_1=\sqrt{9,6 \cdot 6,6}, x_2=\frac{3}{2}$$

$$k_1=\frac{y_1}{x_1}=\frac{x_2}{3}=\frac{3}{x_1}=\frac{3}{\sqrt{9,6 \cdot 6,6}}=\frac{5}{\sqrt{71}} \Rightarrow k_1=\frac{-5}{\sqrt{71}} - \text{коэффициент наклона } k \text{ симметрии}$$

саму симметрии.



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.л. при $k \in \left[-\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}\right]$ - когда выше 4 решения уравнения
методом В. $k=0,5a$, значит при $a \in \left[-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right]$ - выше
 $a = -2k$ 4.

Ответ: $a = (-\infty, -\frac{10}{\sqrt{11}}) \cup (\frac{10}{\sqrt{11}}, +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

По свойству логарифма $\log_3 x = \frac{1}{\log_3 3}$, $\log_3 5y = \frac{1}{\log_3 5}$, заменим
 $\log_3 x$ на t_x

получим:

$\log_3 5y$ на t_y .

$$t_x^4 + \frac{6}{t_x} = \frac{5}{2t_x} - 8 \quad ; \quad t_y^4 + \frac{2}{t_y} = \frac{11}{2t_y} - 8$$

$$t_x^5 + 6 = 2,5 - 8t_x \quad ; \quad t_y^5 + 2 = 5,5 - 8t_y$$

$$t_x^5 + 8t_x = -3,5 \quad ; \quad t_y^5 + 8t_y = -3,5$$

$$\left(t_x^5 + t_y^5 + 8(t_x + t_y) \right) = 0$$

можно разложить на

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4)$$

так как это число всегда > 0

тогда

$$(t_x + t_y)(t_x^4 - t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4 + 8) = 0$$

или

также $t_x + t_y = 0$

$$t_x + t_y = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$3^0 = 5xy \Rightarrow 1 = 5xy \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $xy = 0,2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

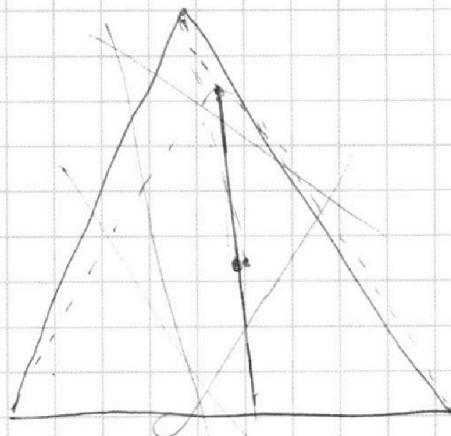
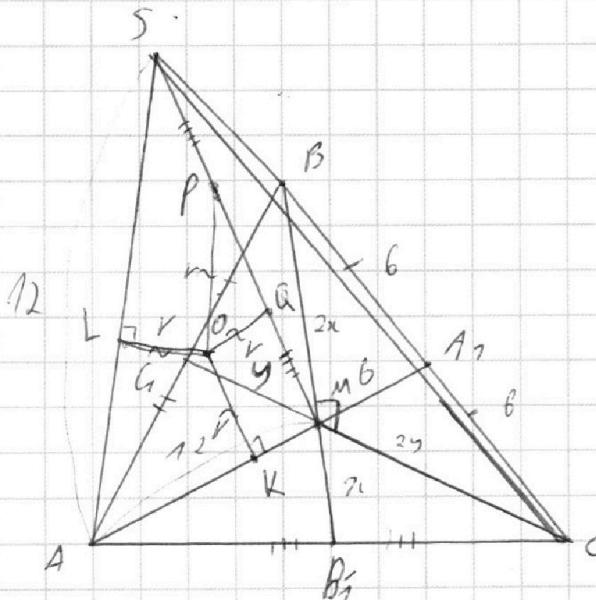


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17



Этот метод называется М.И. Все исходящие
точки лежат на одной прямой ASM
а самое среднее - вспомогательное.

То же самое о четырех уравнениях: $MK^2 = MQ \cdot MP; MK^2 = MA \cdot (PA + QA)$

также $\Delta OLA = \Delta AKO$ (из-за симметрии).

$$AL = AK; AL + SL = AK + KM$$

$$SA = AM = 12$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ; SL^2 = MQ \cdot (MA + PA) \\ (SP = QM)$$

$$MK^2 = SL^2$$

тогда по свойству медианы точки M делят ее дв. в $\Rightarrow MA_1 = 6 = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \Delta BMC$ - прямоугольный. Тогда $BK = 2x; CM = 2y; MB_1 = x$
 $CM_1 = y$

Заменим, что $SMBC = \frac{S_{BMC}}{3} = 30 = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2}$

✓

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot 3x \cdot 3y =$$

$$xy = 15'$$

$$= 18 \cdot 9 \cdot 15 = 2430$$

$$\text{Ответ: } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$$
$$2 \cdot 6x \quad (x^2 - 6)^2 + y^2$$
$$28 + 14 = 38 + 4 = 42$$
$$a_2 + b_2 \geq 9$$
$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$
$$23 + 18 = 41$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$21$$

$$a_2 + c_2 \geq 19$$

arcsin cos

arcsin

$$23 + 30 = 53$$

$$b \cdot \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$27$$

A

3x²

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(0)$$

$$(x^2 + y^2 - 3)^2 = 0$$

3y

18

x

y

(x-y)

2y

B

2y

3x²

5x²

3y

5x²

3y

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z = \frac{y}{x+y}$$

$$z^2 = 2 \cdot y^2 / 12y^2$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \frac{2y^2}{x+y}$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$3x^2$$

$$3x - 2y$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$3$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$B \cdot z^2 \left(\frac{x}{y} - 1 \right)^2 = 4y^2 + (x-y)^2$$

$$60^\circ$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{6}$$

$$3$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{-x}{2} + 7,56$$

$$2$$

$$3$$

$$4$$

$$5$$

$$6$$

$$7$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1/9

$$\log_3 2 \cdot 243 = 15$$

$$t_{xy} (t_x t_y - t_x^2 - t_y^2)$$

$$- t_x t_y ($$

21 21 21
2 · 3 · 5

$$a = 2^{7 \cdot 3} \cdot 5^{10} \cdot 2^2$$

$$2 \log_2 27 = \log_2 243 = 8$$

a = 2²

$$b = 2^{2 \cdot 3} \cdot 10 \cdot 5^{12} \cdot 3 \log_2 3$$

b = 2²

$$c = 2^{12 \cdot 3} \cdot 5^{12}$$

c = 2¹²

x²

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_2 3}$$

$$115 + 7 = \frac{122}{3}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_2 3}$$

$$\log_2 5 \log_2 4 =$$

$$= \log_2 20 =$$

5

$$\log_3 x + \frac{6}{\log_2 x} = 5 \log_2 3^8 - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 x \cdot 5y =$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5 \arcsin \frac{16 \sqrt{2}}{3}}{3}$$

$$2 \log$$

$$\frac{7 \pi \sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{3}$$

3

$$\log_2 z = \log_2 2$$

$$2,5 - 6 = 3,5$$

$$\log_2 t_x^4 + \frac{6}{t_x} = \frac{5t_x}{2} - 8 ; \quad t_y^4 + \frac{2}{t_y} = \frac{11}{2t_y} - 8$$

$$t_x^3(t_x - t_y) + t_y^3(t_y - t_x) = \frac{5}{2} - 8t_x ; \quad t_y^5 + 2 = \frac{5,5}{2} - 8t_y$$

$$(t_x^3 - t_y^3)(t_x - t_y) + t_y^3(t_y - t_x) = -3,5 ; \quad t_y^5 + 8t_y = 3,5$$

8x²
8

3y²
3

$$t_x^5 + t_y^5 + 8(t_x + t_y) = 0$$

$$(t_x^2 + t_y^2)(t_x^2 - t_x^2 t_y + t_x^2 t_y^2 - t_x t_y^3 + t_y^4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

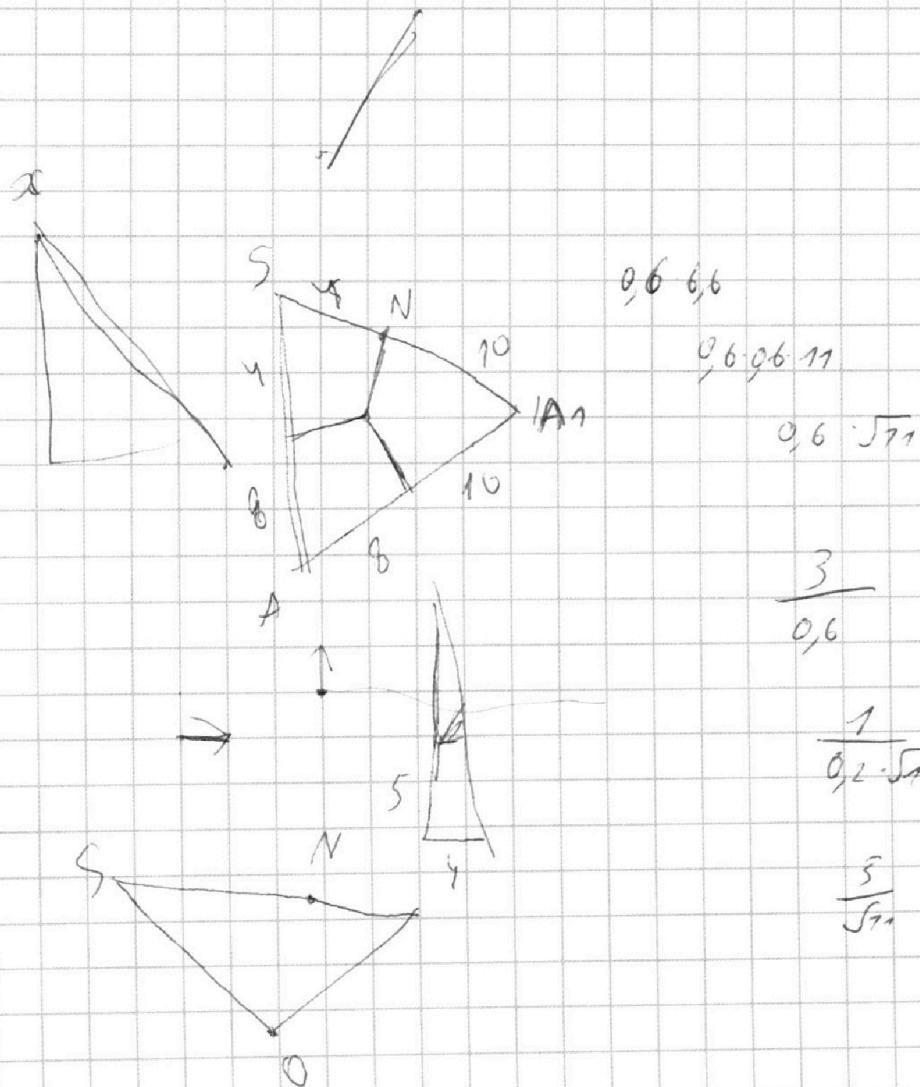
N5

Систему уравнений можно решить геометрически. Тогда первое уравнение

глобальной линии $y = kx + b$, где $ax + 2y - 3b = 0$

$$y = \frac{-a}{2}x + 1,5b \Rightarrow k = \frac{-a}{2}, d = 1,5b$$

— второе уравнение составлено



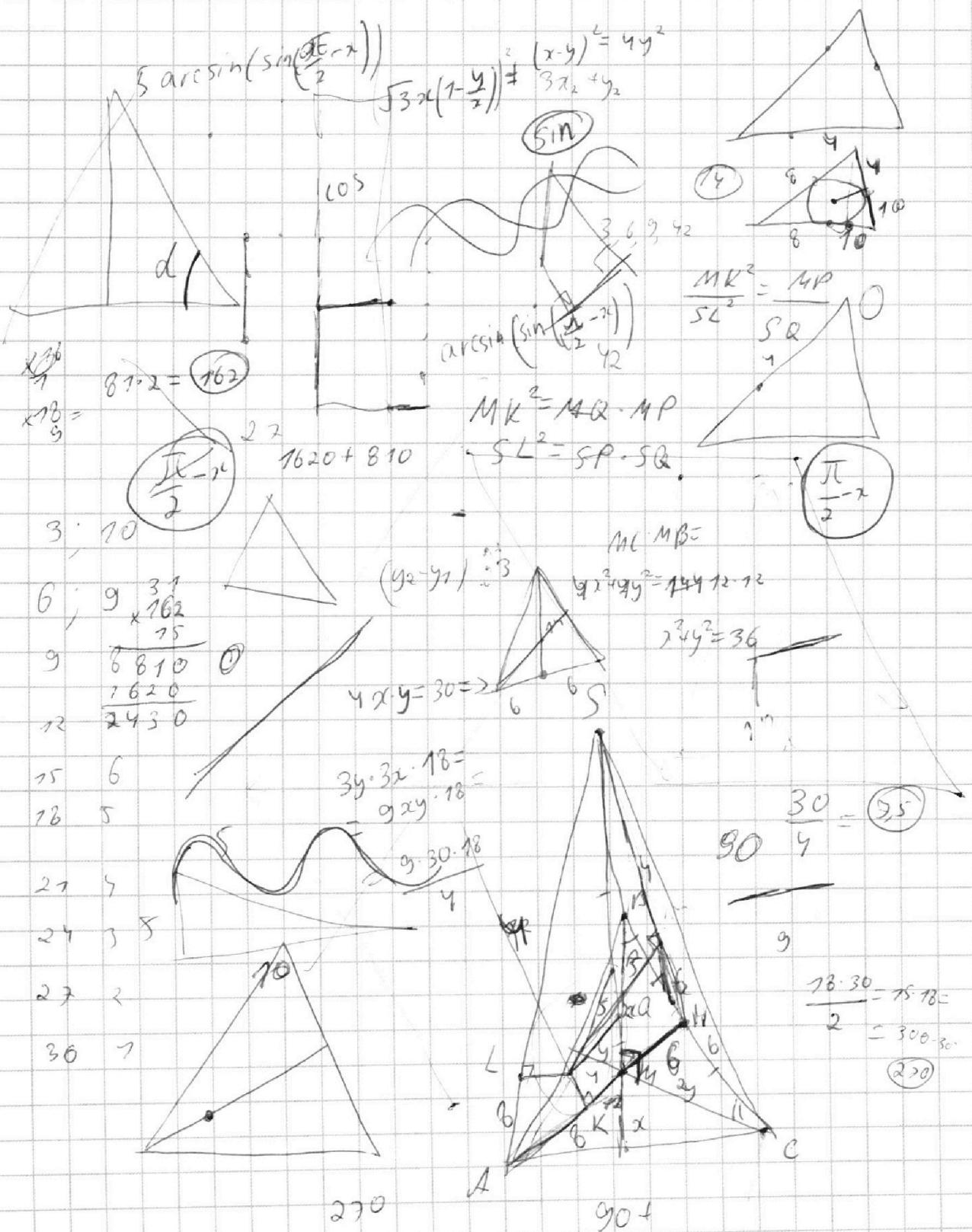


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!