МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть число A состоит из цифры a, т.е. $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$.
Заметим, что 101 - простое, $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, при этом $A \cdot B \cdot C \vdots 101 \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 101^2$; заметим, что $C \not\vdots 101$, т.к. оно $C < 101$ (C - двузначное) $\Rightarrow$
$\Rightarrow B \vdots 101$, т.к. $A \not\vdots 101^2$ ($a \leq 9$, $a \cdot 11 \leq 99$, т.е. $11a \not\vdots 101$) $\Rightarrow$ B это либо 101, либо 202, либо 303, либо 404, либо 505, либо 606, либо 707, либо 808, либо 909, потому что это все трехзначные числа, кратные 101. Но у числа B хотя-бы одна 1 в записи, и это только у $101 \Rightarrow B = 101$.

$A \vdots 11$, но $A \not\vdots 11^2$, т.к. $101 \not\vdots 11$, $a \not\vdots 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 11^2$, но $A \cdot B \not\vdots 11^2$, потому что $B \not\vdots 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow C = x \cdot 11$, где $x \leq 9$, $x \geq 1$, т.к. $C \leq 99 \Rightarrow C$ это либо 11, либо 22, либо 33, либо 44, либо 55, либо 66, либо 77, либо 88, либо $99 \Rightarrow C = 55$, т.к. должна быть 5 в записи числа $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot 101 \cdot 55 = 5a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5a$ - квадрат натурального числа $\Rightarrow a \vdots 5 \Rightarrow a = 5$, т.к. a - цифра, $a \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$.

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x>0,\ y>0$

$K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{y+x+1}{xy}$. Известно, что если $x_0=x-3,\ y_0=y+3$, то

$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{x_0y_0}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{x_0+y_0+1}{x_0y_0}=\frac{x+y+1}{xy}$

Заметим, что $x_0+y_0=(x-3)+(y+3)=x+y \Rightarrow x_0+y_0+1=x+y+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x_0+y_0+1}{x_0y_0}=\frac{x+y+1}{xy} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x_0y_0=xy \end{array}\right.$, но $x+y>0 \Rightarrow x+y+1>0+1=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x+y+1\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0y_0=xy$.

$(x-3)(y+3)=xy$

$xy+3x-3y-9=xy$

$3x-3y-9=0$

$x=y+3 \Rightarrow M=x^3-y^3-9xy=(y+3)^3-y^3-9(y+3)y=$

$=(y^3+9y^2+27y+27)-y^3-9y^2-27y=27$. Заметим, что $y\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow$ $x_0=x-3\neq 0$. $y_0>y>0 \Rightarrow y_0\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,\ y\neq 0,\ x_0\neq 0,\ y_0\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M=27$, т.к. $K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$ – имеет смысл.

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin \pi x - \sin \pi y)\cdot \sin \pi x = (\cos \pi y + \cos \pi x)\cdot \cos \pi x$.

$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$.

$0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y)$

$0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) \iff \cos\left(\frac{2\pi - (\pi x - \pi y)}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{2\pi x + (\pi x - \pi y)}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x+y \text{ - нечётное} \\ 3x-y \text{ - нечётное.} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: подходят все пары (x, y), для которых либо $x+y$ - нечётное, либо $3x-y$ - нечёт.

б) x, y - целые $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \text{ - нечёт.} \\ 3x-y \text{ - нечёт} \end{array}\right. \iff x$ и y разной чётности.

Функция arccos имеет значение от 0 до π включительно, при этом $\left|\frac{x}{4}\right| \le 1$, $\left|\frac{y}{9}\right| \le 1 \Rightarrow |x| \le 4$, $|y| \le 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} \le 2\pi$ (равенство при $\arccos\frac{x}{4} = \arccos\frac{y}{9} = \pi$, т.е. $\frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1$, т.е. $x = -4$, $y = -9$ – единственное решение для равенства) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ количество пар целых (x, y) это (кол-во чётных X умножить на кол-во нечёт. Y) + (кол-во нечётных X умножить на кол-во чётных Y) $- 1 = 5\cdot 10 + 4\cdot 9 - 1 =$
$= 50 + 36 - 1 = 85$.

Ответ: 85 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего одиннадцатиклассников X => вероятность получить билет у каждого ученика $\frac{4}{X}$. Вероятность и Пете, и Васе получить билет, это тоже самое, что вероятность Васе получить билет, если Пете уже получил, т.е. $\frac{4}{X}\cdot\frac{4-1}{x-1}=\frac{12}{x(x-1)}$. Скажем, что учеников больше 4, потому что иначе у Пети и Васи изначально вероятность попасть на концерт равна 1, т.к. ~~билет~~ для каждого билет есть, но тогда в конце месяца их вероятность попасть на концерт равна 3,5, но вероятность не может быть больше 1.

Пусть y - кол-во билетов, на которое увеличилось в конце месяца, тогда вероятность и Пети, и Васи попасть на концерт это $\frac{4+y}{x}\cdot\frac{4+y-1}{x-1}=\frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$.

По условию: $\frac{12}{x(x-1)}\cdot 3,5=\frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$, $x(x-1)\neq 0$, т.к. $x\neq 0$, $x\neq 1$ =>

=> $42=y^2+7y+12$ => $y^2+7y-30=0$

$(y+10)(y-3)=0$ => $y=-10$ или $y=3$, но

$y=-10$ не подходит, т.к. билетов стало больше => $y=3$ =>

=> в конце месяца выделено было $4+3=7$ билетов.

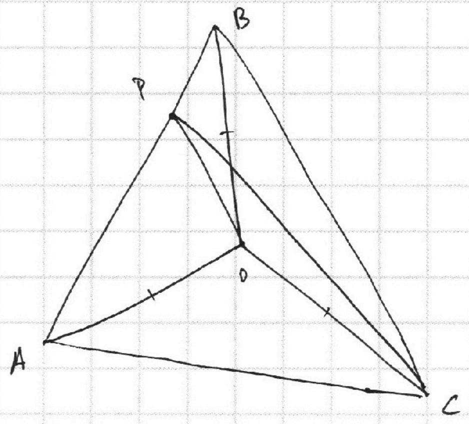
Ответ: 7 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: O - центр опис. окр. около $\triangle ABC$,
P - пересечение опис. окр. $\triangle BOC$ и ~~стороны~~ отрезка AB.
$AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

Найти: $S_{\triangle ABC} = ?$

Решение:

$OPBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle POC = 180° - \angle ABC$, $\angle OCB = \angle OPA$, т.к. $\begin{cases} \angle OPA + \angle BPO = 180° \\ \angle OCB + \angle BPO = 180° \end{cases}$,

$AO = OB$ - радиусы опис. окр. около $\triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AO}{\sin\angle APO} = \frac{OB}{\sin\angle OCB} \Rightarrow$ радиусы окружностей, описанных около $\triangle OPA$ и $OPBC$ равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{\sin\angle POA} = \frac{PC}{\sin\angle POC}$; $\angle OCB = \angle OBC$, т.к. $\triangle BOC$ - р/б (OB, OC - радиусы ω_1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OPA = \angle OCB = \angle OBC$. $\triangle AOB$ - р/б, т.к. $AO = OB \Rightarrow \angle PAO = \angle ABO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APO + \angle PAO = \angle ABO + \angle OBC = \angle ABC \Rightarrow \angle POA = 180° - \angle APO - \angle PAO = 180° - \angle ABC = \angle POC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle POA = \angle POC \Rightarrow \sin\angle POA = \sin\angle POC \Rightarrow AP = PC$, т.к. $\frac{AP}{\sin\angle POA} = \frac{PC}{\sin\angle POC} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5} = 3,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APC$:

по т. косинусов: $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC \Rightarrow \cos\angle APC = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC} =$

$= \frac{10,24 + 10,24 - 16}{2 \cdot 10,24} = \frac{4,48}{20,48} = \frac{448}{2048} = \frac{7}{32} \Rightarrow \cos(180 - \angle APC) = -\frac{7}{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BPC = -\frac{7}{32} \Rightarrow \triangle BPC$:

по т. косинусов:

$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos\angle BPC$

$BC^2 = 4 + 10,24 - 2 \cdot 3,2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{7}{32}\right) = 17,04 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. косинусов для $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC \Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{27,04 + 16 - 17,04}{41,6} =$

$= \frac{26}{41,6} = \frac{260}{416} = \frac{65}{104}$

$$\cos\angle BAC = \frac{65}{104} \Rightarrow \sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} = \sqrt{\frac{10816-4225}{10816}} = \frac{\sqrt{6591}}{104} =$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{104}$$, т.к. $\angle BAC$ - острый, ~~[illegible]~~

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC}{2} = \frac{5{,}2\cdot 4\cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{\frac{26}{5}\cdot 4\cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{65\sqrt{39}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{65\sqrt{39}}{2}$.

Поймём, что в любую правильную пирамиду можно вписать шар, который будет касаться всех граней: центр сферы будет лежать в силу симметрии на перпендикуляре из вершины пирамиды на плоскость основания, причём в вершине пирамиды расстояние от центра шара до плоскости основания больше 0, а до боковых граней равно нулю, а в центре правильного n-угольника в плоскости основания наоборот $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ где-то на перпендикуляре найдётся точка, равноудалённая от всех граней $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ она и будет центром шара.

Центр шара, который касается всех рёбер также будет лежать на перпендикуляре из вершины на плоскость основания ~~из~~ пирамиды. В вершине пирамиды расстояние ~~до~~ ~~рёбер~~ основания не 0, а до ~~рёбер~~ боковых рёбер 0. Восстановим перпендикуляр в вершинах пирамиды плоскости основания в плоскости биссектрисы двугранного угла между плоскостями соседних боковых граней. Они пересекутся где-то на перпендикуляре пирамиды из вершины к основанию, причём эта точка не лежит в плоскости основания. Но тогда в треугольнике из нашей новой точки и двух соседних в основании, расстояние от новой тчк до ребра основания это высота треугольника, а расстояние от новой вершины до вершин основания это смежная сторона треугольника $\Rightarrow$ расстояние от точки до ~~рёбер~~ боковых рёбер больше чем до рёбер основания $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ где-то на ~~высоте~~ отрезке из вершины пирамиды и новой точка будет лежать ~~другая точка~~, равноудалённая от ~~рёбер~~ всех рёбер пирамиды $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ под условие задачи попадает любая правильная усечённая пирамида $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ угол между боковым ребром и плоскостью основания $\in (0^\circ; 90^\circ)$.

Ответ: любой угол $\in (0^\circ; 90^\circ)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

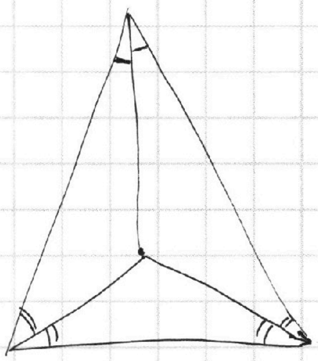
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

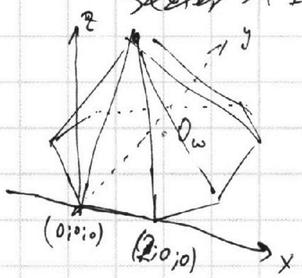
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$S(1; y_s; z_s)$



$O_\omega(1; y_s; z_0)$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$0 + 0 + 0 + D = 0 \qquad D = 0$

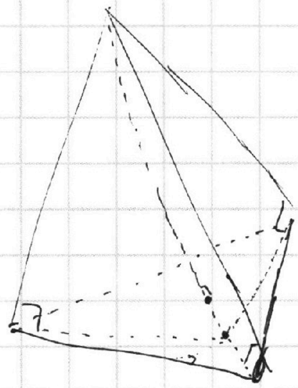
$2x + 0 + 0 + 0 = 0 \qquad A = 0.$

$A \cdot 1 + B \cdot y_s + Cz_s + 0 = 0$

$B \cdot y_s + Cz_s = 0. \qquad B = -\frac{C \cdot z_s}{y_s}$

$$\frac{|A \cdot 1 + B \cdot y_s + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = y_s.$$

$|\cancel{B}\ -\frac{C \cdot z_s}{}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$

$17{,}04 = 27{,}04 + 16 - 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4 \cdot \cos\angle BAC$

$41{,}6 \cdot \cos\angle BAC = 26$

$\cos\angle BAC = \frac{26}{41{,}6} = \frac{260}{416} = \frac{65}{104} \Rightarrow \sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} = \frac{\sqrt{6591}}{104} = \frac{13\sqrt{39}}{104}.$

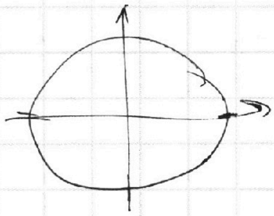
$10816 - 4225 = 6591$; $104 \cdot 104 = 10816$; $65 \cdot 65 = 4225$

$6591 : 3 = 2197$; $2197 : 13 = 169$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC}{2} = \frac{5{,}2 \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{13\sqrt{39}}{104}}{2} = \frac{65\sqrt{39}}{2}.$

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

$\frac{C_x^3}{C_{x+1}^4}$ $\quad C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$ $\quad C_x^4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$ $\quad \frac{4!}{3!(x-3)} = \frac{4}{x-3}$



$(\sin\pi x - \sin\pi y) \cdot \sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y) \cdot \cos\pi x$

$\sin^2\pi x - \sin\pi y \cdot \sin\pi x = \cos^2\pi x + \cos\pi x \cdot \cos\pi y$

$0 = (\cos^2\pi x - \sin^2\pi x) + (\cos\pi x \cdot \cos\pi y + \sin\pi x \cdot \sin\pi y)$

$0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi x - \pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$

$\cos z = 0, \quad z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$ $\quad \pi \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$ $\quad \pi \cdot \left(\frac{3x-y}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

$\frac{x+y}{2} = \frac{2k+1}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$ $\quad \frac{3x-y}{2} = \frac{2k+1}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$ x и y разной чётности.

$x = 0, \ y = 1.$ $\quad (\sin 0 - \sin\pi) \cdot \sin 0 = (\cos 0 + \cos\pi) \cdot \cos 0.$

$(0 - 0) \cdot 0 = (1 + (-1)) \cdot 1$

$0 = 0.$

$x + y$ – нечётное

$3x - y$ – нечётное.

$\arccos x \in [0; \pi]$

$\arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$

$\frac{x}{4} = -1$ и $\frac{y}{9} = -1.$

Нет.

$x \in [-4; 4]$

$y \in [-9; 9].$

если $x = -4$:,

$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$ – 9 штук.

если $x \vdots 2$, то $y = -9; 9$ – 10 штук.

если $x \not\vdots 2$: $y = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$ – 9 штук.

$4 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 9 = 40 + 36 + 9 = 85.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ $\quad ABC = k^2$ $\quad B = \{101; 202; 303; \dots; 909\} \Rightarrow B = 101.$

$C \vdots 11 \Rightarrow C = \{11; 22; \dots; 99\} \Rightarrow C = 55.$

$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = a \cdot 5 \cdot (11)^2 \cdot (101)^2 \Rightarrow a = 5.$

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy}$, если $x_0 = x-3$, $y_0 = y+3$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0 y_0}$

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x_0+y_0+1}{x_0 y_0} = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $x \neq 3$, $y \neq -3$.

$\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y-1 \\ xy = xy+3x-3y-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y-1 \\ 3x-3y-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y-1 \text{ — не подходит, т.к. } -y-1<0,\ x>0. \\ x=y+3 \end{array}\right.$

~~$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+1)y$~~

$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+1)y = y^3 + 3(y^2 \cdot 3) + 3 \cdot (y \cdot 3^2) + 27 - y^3 - 9(y^2+3y) =$
$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27.$

Пусть одиннадцатиклассников $x \Rightarrow$ в начале месяца вероятность получить билет $\frac{4}{x}$

в начале $\frac{16}{x^2}$, в конце $\frac{(4+y)^2}{x^2}$, где y - кол-во доп. билетов.

$\frac{16 \cdot 3,5}{x^2} = \frac{(4+y)^2}{x^2}$ $\quad 16 \cdot 3,5 = 16 + 8y + y^2 \Rightarrow y^2 + 8y - 40 = 0$ $\quad 16 \cdot \frac{5}{2} = 8 \cdot 5 = 40$

$64 + 4 \cdot 40 = 224 = 32 \cdot (2+5) = 32 \cdot 7$

$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 3,5 = \frac{4+y}{x} \cdot \frac{3+y}{x-1} \Rightarrow 42 = y^2 + 7y + 12 \Rightarrow y^2 + 7y - 30 = 0$ $\quad D = 49 - 4 \cdot (-30) = 169$ $\quad y = \frac{-8 \pm 4\sqrt{14}}{2}$

$y = \frac{-7 \pm 13}{2} \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l} -10 \\ 3 \end{array}\right.$

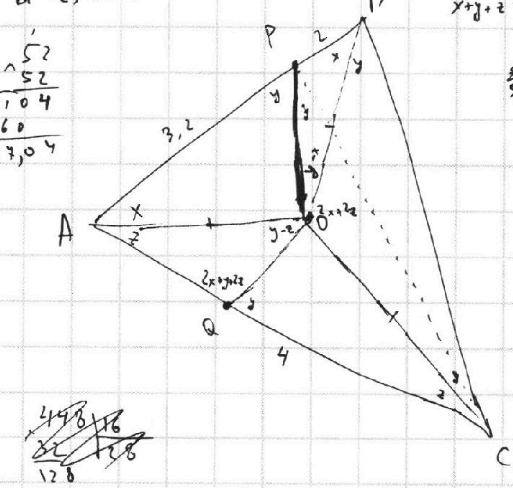
$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 3,5 = 1$ $\quad \frac{12}{x(x-1)} = 1 \Rightarrow x(x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$
$(x-4)(x+3) = 0$ $\quad x = 4.$ $\quad x = -3.$

$33 \cdot 31 = 1023$

$AP = \frac{16}{5}$

$BP = 2$, $AC = 4$

$52 \cdot 52 = 2704$; $27,04$



$x + y + z = 90°$

$\angle POA = 180 - (x+y)$
$\angle POC = 180 - (x+y)$

$BC = 3,2$

~~$AB = 3,2$; $BC = 3,2$; $AC = 4$.~~

~~$p = \frac{3,2+3,2+4}{2} = \frac{12,4}{2} = 6,2$~~

~~$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{6,2(1)(3)(2,2)} = \frac{\sqrt{1023}}{5}$~~

~~$6,2 = \frac{62}{10} \cdot \frac{66}{10} = \frac{31}{5} \cdot \frac{33}{5} = \frac{1023}{25}$~~

$\angle POA = 180 - (x+y)$
$\angle POC = 180 - (x+y)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow PC = 3,2.$

$PC = 3,2.$

$\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC$

$16 = 10,24 + 10,24 - 2 \cdot 10,24 \cdot \cos\angle APC.$

$\cos\angle APC = \frac{4,48}{20,48} = \frac{448}{2048} = \frac{7}{32}. \Rightarrow$

$448 : 16 = 28$

$448 : 32 = 14$

$64 \cdot 7$

$\frac{2^6 \cdot 7}{2^{11}}$

$\Rightarrow BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \cos\angle BPC = PB^2 + PC^2 + 2\, PB \cdot PC \cdot \cos\angle APC =$
$= 4 + 10,24 + 2 \cdot 3,2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{32} = 4 + 10,24 + \frac{28}{10} = 17,04$

$4 + 10,24 + 2,8$

$BC^2 = 17,04$