



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - четырехзначное число из одинаковых цифр $\Rightarrow$ оно либо 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999, заметим, что все эти числа - произведения 1111 на цифру:

$$1111 = 1111 \cdot 1; 2222 = 1111 \cdot 2; 3333 = 1111 \cdot 3; 4444 = 1111 \cdot 4; 5555 = 1111 \cdot 5; 6666 = 1111 \cdot 6; 7777 = 1111 \cdot 7; 8888 = 1111 \cdot 8; 9999 = 1111 \cdot 9 \Rightarrow \text{раз } 1111 = 101 \cdot 11 =$$

число A всегда кратно 101 или 101 - простое число и 11 - простое число

Это же произведение A·B·C - было в квадратах, надо чтобы в нем было четное количество простых множителей.

Т.к C - двузначное, оно не делится на 101, значит B делится на 101, а раз в нем есть хотя бы единица, значит

B = 101 (т.к. другие трехзначные числа кратные 101 не содержат единиц: 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909)

Теперь в A·B·C два множителя 101, но только 1 множитель 11 $\Rightarrow$ число C кратно 11 (т.к. B ни разу не 11, а в A только один раз 11 (1111 = 101 · 11)). Раз в C есть 5 $\Rightarrow$ C = 55 (единственный делитель C 5, кратное 11)

Теперь в A·B·C есть 2 множителя 101, 2 множителя 11, 1 множитель 5 $\Rightarrow$ A : 5 $\Rightarrow$ A = 5555

$$A = 5555 = 101 \cdot 11 \cdot 5$$

$$B = 101 = 101$$

$$C = 55 = 11 \cdot 5$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5^2 - \text{подходит.}$$

другой трюк из нашего багажа (т.к. 1111 = 101 · 11, B - трехзначное с 1; C - двузначное с 5, A: 1111 всегда) (см. выше)

Ответ: A = 5555 B = 101 C = 55



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

~~$$K_2 = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$~~

$$K_1 = K_2 \text{ (по условию)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{x-3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

~~$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$~~

~~$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$~~

Т.к. $x+y+1 > 0$ (т.к. x и y - полож.)

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$xy + 3x - 3y - 9 = xy$$

$$x = y+3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = (y+3-y)((y+3)^2 + y(y+3) + y^2) - 9(y+3)y = 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y =$$

$$= 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - 27y = 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$M = 27 \Rightarrow M = 27 \text{ верна}$$

Ответ: ~~27~~

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

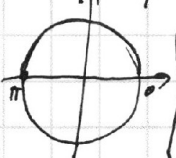
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

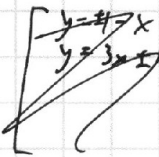
$$\begin{aligned} (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\ \cos^2 \pi x - \sin \pi x &= -(\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x) \\ + \cos 2\pi x &= -\cos(\pi y - \pi x) \\ \cos 2\pi x &= \cos(\pi y - \pi x) \quad \cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x + \pi) = \cos(\pi y - \pi x + \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi y + \pi x \\ 2\pi x = \pi + \pi y - \pi x \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + \pi \\ 2\pi x = \pi y + \pi x - \pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -1 - y + x \\ 2x = 1 + y - x \\ 2x = y - x + 1 \\ 2x = -y + x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

а) Ответ: $(k; 1-k) (k; 3k+1) (k; 3k-1) (k; -k-1)$

б) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$



$$\begin{cases} -1 < \frac{x}{4} < 1 \\ -1 < \frac{y}{9} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 < x < 4 \\ -9 < y < 9 \end{cases}$$


$$\begin{cases} y = 1-x \\ y = 3x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ -9 < -x < 9 \\ -9 < -1-x < 9 \\ -9 < 1+3x < 9 \\ -9 < -1+3x < 9 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 < x < 4 \\ 10 > x \geq 8 \\ 8 > x \geq 10 \\ -10 < 3x < 8 \\ -8 < 3x < 10 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 < x < 4 \\ 10 > x \geq -8 \\ 8 > x \geq -10 \\ -\frac{10}{3} < x < \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in (-10; 10)$
↓
19 решений

в) Ответ: 19



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 билета - в начале, x в конце, y - кол-во сгорающих лампочек

$3,5 P_1 = P_2$ ~~$P_1 = \frac{4}{y} \cdot \frac{4-1}{y-1} = \frac{12}{y(y-1)}$~~ $P_1 = \frac{4}{y} \cdot \frac{4-1}{y-1} = \frac{12}{y(y-1)}$

$P_2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x-1}{y-1}$

~~$3,5 \cdot \frac{12}{y(y-1)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x-1}{y-1}$~~ $3,5 \cdot 12 = x(x-1)$

$42 = x^2 - x$

$x^2 - x - 42 = 0$

$D = 1 + 42 \cdot 4 = 169 = 13^2$

$x = \frac{1 \pm 13}{2}$, $x > 0 \Rightarrow x = 7$, в конце стало 7 билетов

Ответ: 7 билетов в конце месяца



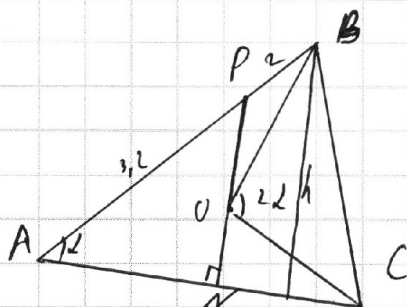
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AP = 3,2$$

$$PB = 2$$

$$AC = 4$$

$$BO = OC = R$$

$$AB = AP + PB = 5,2$$

$$BO = OC \Rightarrow \angle CBO = \angle BCO ; \text{ так как } \angle BAC = 2 \Rightarrow \angle COB = 2 \angle \text{ как центральный}$$

$$\angle OBC = \frac{1}{2}(180 - 2\angle) = 90 - \angle$$

$$\angle CPO = \angle OBC \text{ (т.к. отстоят на одну дугу)} = 90 - \angle$$

$$\angle BPC = \angle BOC \text{ (т.к. отстоят на одну дугу)} = 2\angle \Rightarrow \angle OPB = 90 - \angle + \angle = 90 + \angle$$

$$\angle OPA = 180 - \angle OPB = 180 - 90 - \angle = 90 - \angle \Rightarrow \angle PNA = 180 - (90 - \angle) - \angle = 90^\circ$$

Т.О лежит на пересечении серединных перпендикуляров $\Rightarrow$ прямая PN - перпендикулярна AC $\Rightarrow$ она - медиана $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AN = NC = \frac{AC}{2} = 2$$

$$PN = \sqrt{AP^2 - AN^2} \text{ (по т. Пиф)} = \sqrt{3,2^2 - 4} = \sqrt{6,24}$$

$$\frac{PN}{h} \text{ , где } h - \text{ высота } \frac{PN}{h} = \frac{AP}{AB} = \frac{3,2}{5,2} \Rightarrow h = \frac{PN}{3,2} \cdot 5,2 = \frac{\sqrt{6,24} \cdot 5,2}{3,2}$$

$$S = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{6,24} \cdot 5,2}{2 \cdot 3,2} = \frac{\sqrt{6,24} \cdot 5,2}{10 \cdot 16,84} = \frac{\sqrt{6,24} \cdot 13}{4 \cdot 10} = \frac{\sqrt{78} \cdot 13}{10}$$

$$S = 1,3 \sqrt{78}$$

Ответ: $1,3 \sqrt{78}$



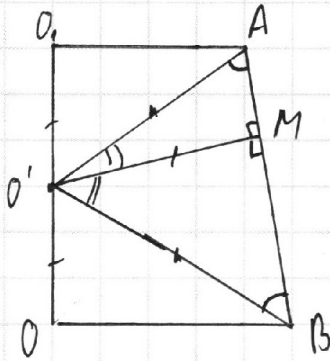
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть O - центр нижней грани, O_1 - центр верхней грани, AB - ребро, параллельное сечению усеченной пирамиды по OO_1 и AB



O_1 - центр Ω , заметим, что O_1 является и центром ω , т.к. радиус Ω равен радиусу ω . Следовательно, центр сечения на пересечении OO_1 и AB - O_1 - центр сечения ω .

$O_1O_1 = O_1O = O_1M$, где O_1M - перпендикуляр к AB :

т.к. AB - хорда окружности ω

$O_1B = O_1A = R_\omega$

$\triangle AOB$ и $\triangle A_1O_1B_1$ - равнобедренные, т.к. $\angle A = \angle B$ и $\angle A_1 = \angle B_1$. $AO = BO$, $A_1O_1 = B_1O_1$. $AO_1 = BO_1$ (т.к. AO_1 - медиана равнобедренного $\triangle AOB$). $\Rightarrow AM = MB$. $\Rightarrow O_1M$ - средняя линия трапеции AO_1B_1 $\Rightarrow O_1M \parallel OB \parallel O_1A \Rightarrow O_1M \perp AB$ по 7. признаку $\Rightarrow \angle ABO = 90^\circ$ - угол между ребрами пирамиды и плоскостью основания (т.к. AB - ребро, OB - лежит в основании, и проекция A на основание лежит на OB) $\Rightarrow 90^\circ$

Ответ: 90°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

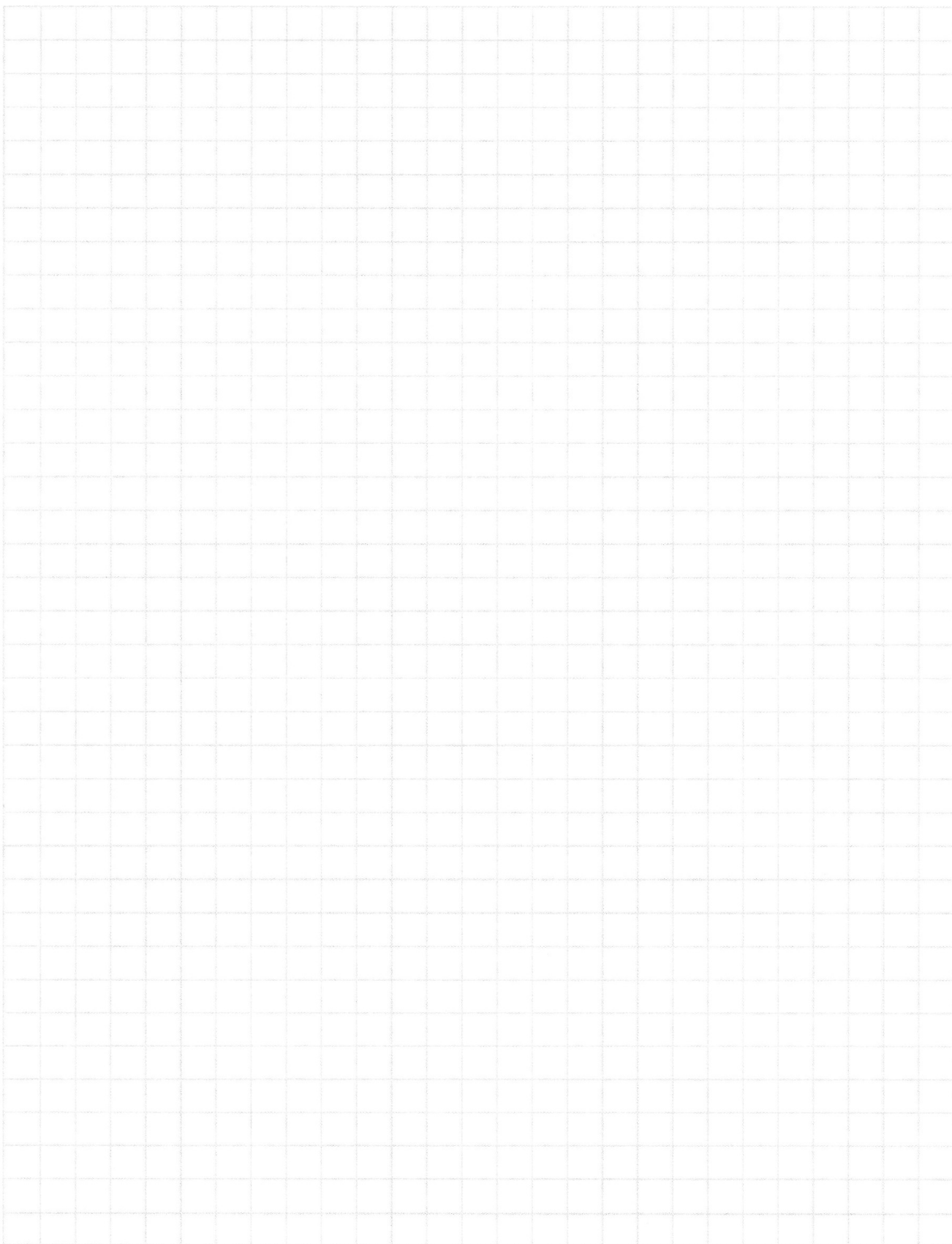
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

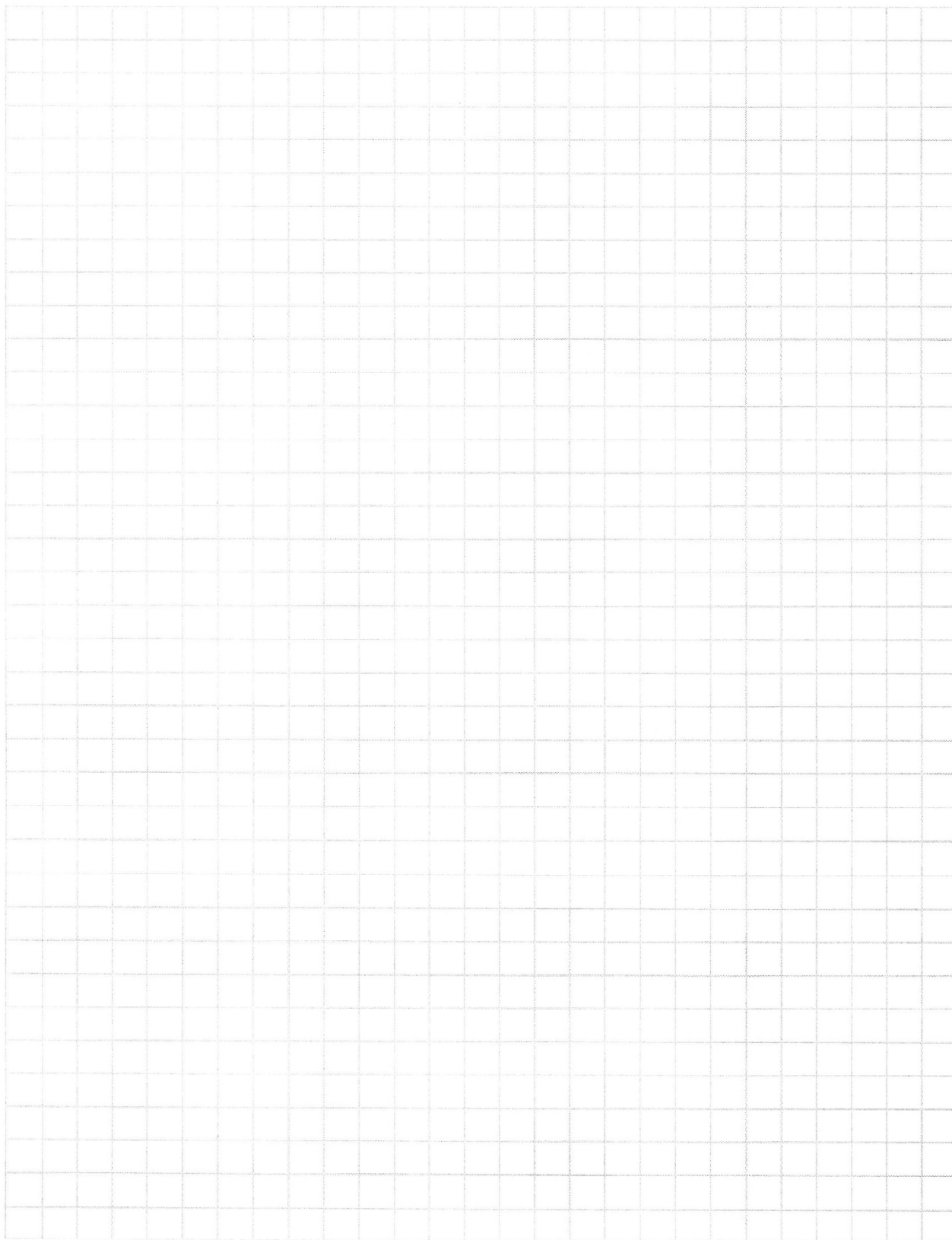
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos 2)(y-2\sin 2) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases} \text{р. 3}$$

$$xy \geq x-2\sin 2-2\cos 2y$$

$$\min_{\text{min}} (x-2\cos 2)(y-2\sin 2)$$

$$(x-2)(y) \geq 0$$

$$xy-2y \geq 0$$

$$x(y-2)$$

$$(x-2)(y-2) \geq 0$$

$$xy-2x-2y+4 \geq 0$$

$$y(x-2) \geq 2x+4$$

$$y \geq \frac{2x+4}{x-2}$$

$$\text{Take } \sqrt{AK} = a$$

$$AK^2 = a^2$$

$$2\pi K \quad 4a$$

$$2\pi K \quad 4\sqrt{2}R$$

$$(x-2)(y-$$

$$xy-2\cos 2y-2\sin 2x+4\cos 2\sin 2 \geq 0$$

$$y(x-2\cos 2)-2\sin 2(x-2\cos 2) \geq 0$$

$$y \geq \frac{2\sin 2(x-2\cos 2)}{(x-2\cos 2)}$$

$$x-2\cos 2 \neq 0$$

$$y \geq 2\sin 2$$

$$AB+CD = AD+BC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

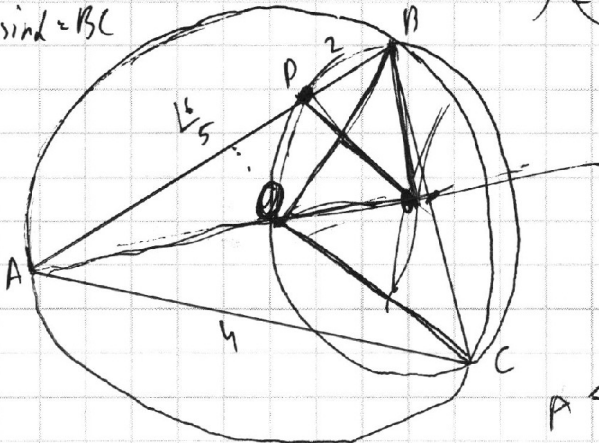
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ABC

$$BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$2R \sin 2\alpha = BC$$

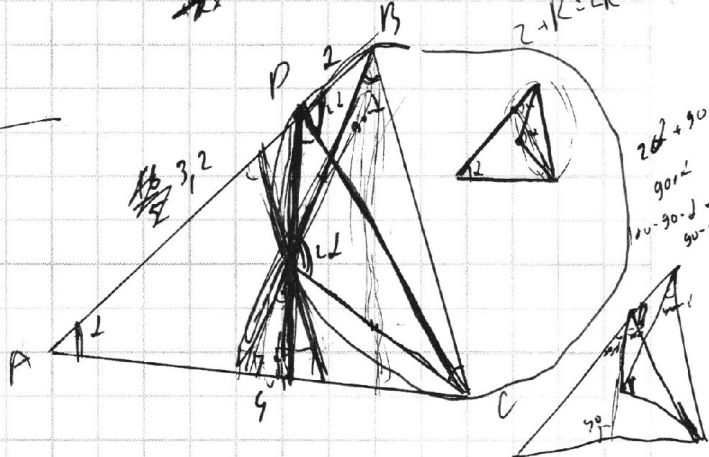


$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{3,2 \cdot \sin 2\alpha \cdot 4}{2} = 6,4 \sin 2\alpha$$

$$2R \cos 2\alpha \cdot 2^2 + x^2 = 16$$

$$2R = BC + PO$$

$$2R = 2R \cdot 4$$

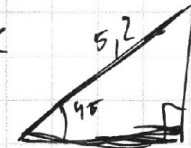


$$2\alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

$$90^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

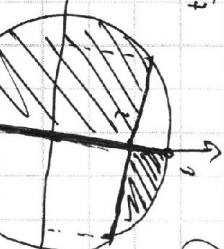
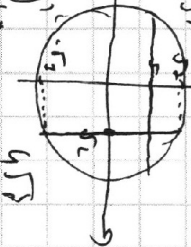
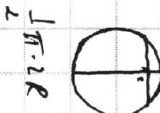
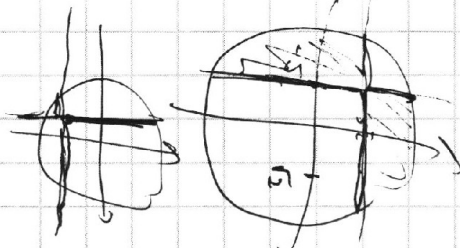
$$AB = 5,2$$

$$2R \cos 2\alpha = PO + BC$$



$$\frac{x}{5,2} = \sin 45^\circ$$

$$x = 5,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - 1 1 1 1
2 2 2 2 - 2.1111
3 3 3 3 - 3.1111
4 4 4 4 - 4.1111
5 5 5 5 - 5.1111
6 6 6 6 - 6.1111
7 7 7 7 - 7.1111
8 8 8 8 - 8.1111
9 9 9 9 - 9.1111

B - - 1
- 1 -
1 - -

C - 5 5
5 5

A · B · C - квадраты.
101
x 11
101
101
1111

по ABC - кв ~) по A: 101 ~) B: 101
B: 101
C: 11 ~) C: 55

101
202
303
404
505
606
707
808
909

55 = 11 · 5
101 = 101 · 1
101 11 5

1111 = 101 · 11
A = 101 · 11

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{\frac{x}{3}} + \frac{1}{y \cdot 3} \neq \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy} = \frac{3y}{3xy} + \frac{x}{3xy} + \frac{1}{xy} = \frac{3y+x+1}{3xy}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{3y+x}{3xy}$$

$$3x+3y = 3y+x$$

$$2x = 6y$$

$$x = 3y$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = 27y^3 - y^3 - 27y^2 =$$

$$= 26y^3 - 27y^2 = y^2(26y - 27)$$

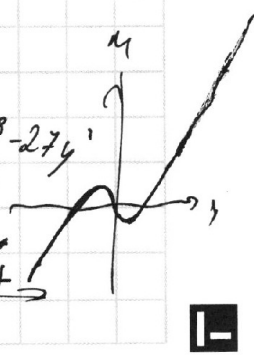
$$K = \frac{1}{3y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3y^2} + \frac{3y}{3y^2} + \frac{1}{3y^2} = \frac{4y+1}{3y^2}$$

$$M = 27y^3 - y^3 - 27y^2 = 27y^2(y-1) - 27y^2 = y^2(27(y-1)-27) = 26y^3 - 27y^2$$

$$= y^2(27y - 27 - 27) = y^2(27y - 54) = y^2 \cdot 27(y - 2)$$

$$y = 0$$

$$y = \frac{27-2}{26} = \left(\frac{9}{13}\right)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

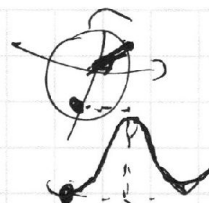
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(y+3)(x-3)}$$

$$2\pi x = -\pi y + \pi x$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(y+3)(x-3)}$$

$$x^2 + y^2 + xy^2 - y^2 - y^2$$



$$(y+3)(x-3) = xy$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$2x = y - x + 1$$



$$\cos \cos = \cos \cos$$

$$\sin^2 d = \sin^2 d \cos^2 d$$

$$\cos^2 d - \sin^2 d$$

$$\cos^2 d - \sin^2 d$$

$$x = y + 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = -1$$

$$= (y+3-y)((y+3)^2 + (y+3)y + y^2) - 9(y+3)y$$

$$= 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9(y^2 + 3y)$$

$$= 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - 27y = 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$\sin \pi x - \sin \pi y = \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$-\cos \pi x$$



$$\sin^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y - \cos^2 \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin^2 \pi y = \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y \cdot \cos^2 \pi x$$

$$-\cos^2 \pi x = \sin^2 \pi y \cdot \sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y \cdot \cos^2 \pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$-\cos^2 \pi x = +\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\pi - 2\pi x = \pi x - \pi y$$

$$\pi - 2\pi x = \pi y - \pi x$$

$$1 - 2x = x - y$$

$$1 - 2x = y - y$$

$$1 - 2x = x - y$$

$$1 - 2x = y - y$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = 1 - x$$

$$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$

$$0 < \arccos x < \pi$$

$$\arccos \frac{x}{y} < \pi$$

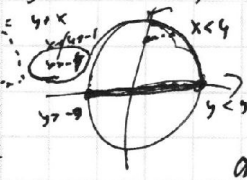
$$\arccos \frac{y}{x} < \pi$$

$$\arccos \frac{x}{y} < \pi$$

$$\arccos \frac{1-x}{y} < \pi$$

$$\arccos \frac{x}{y} < \pi$$

$$\arccos \frac{y}{x} < \pi$$



$$(k; 3k-1)$$

$$(k; 1-k)$$

$$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x}) > -1$$

$$x > -y$$

$$y > -x$$

$$x > -y$$

$$y > -x$$