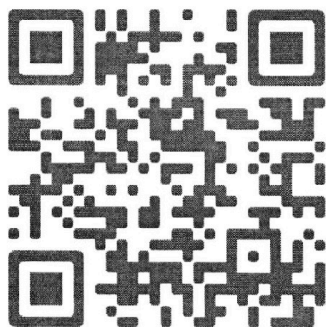




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, необходимо: $B = 606$
 $C = 33$

$$\frac{11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11}{6 \cdot 3} = n^2$$

$$6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$a : 2$ тоже необходимо

$a = 2$ — ок,

$a = 4$ — не ок, ст. вх. 2 равна 3

$a = 6$ — не ок, ст. вх. 3 равна 3

$a = 8$ — ок, ст. вх. 2 равна 4

$a = 0$ — не ок

Итак, необх. $\begin{cases} a = 2 \\ a = 8 \end{cases}$, но ~~оба~~ оба подх, видно из разложения

$$A = 2222 \vee A = 8888$$

Всего 2 тройки чисел

Ответ: $(2222, 606, 33)$ и $(8888, 606, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N1

$$A = \overline{aaaa}, B = \overline{bcd} \begin{cases} b=6 \\ c=6 \\ d=6 \end{cases}, C = \overline{ef} \begin{cases} e=3 \\ f=3 \end{cases}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : ABC = n^2$$

$$A : 11, A : a \quad (\overline{A = \overline{aaaa}}) \quad (A = \overline{aaa} \cdot 11)$$

$$11 \cdot \overline{aaa} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2 \Rightarrow \begin{cases} \overline{ef} : 11 & 1 \text{ сл.} \\ \overline{bcd} : 11 & 2 \text{ сл.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \text{ сл.} & \overline{3f} : 11 \Rightarrow f=3 \\ \overline{e3} : 11 \Rightarrow e=3 & \text{т.е. } \overline{ef} = 33 \end{cases}$$

$$\overline{aaa} = 101 \cdot a, \quad 101 - \text{простое}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2$$

$$\Rightarrow \overline{bcd} : 101 \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{hoh} = h \cdot 101 \quad (h \in \{1, 9\})$$

$$\text{Итак, 1 сл.: } \overline{ef} = 33$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 33 \cdot \overline{bcd} = n^2$$

$$\text{Тогда } 11 \cdot a \cdot 101 \cdot h \cdot 101 \cdot \overline{ef} = n^2$$

a, h - цифры (не 0)

$\Rightarrow \overline{ef} : 11$, т.е. $a, h \not\equiv 11$ (мы руководствуемся тем, что степени вх. простых чисел в точный квадрат четны)

$$\text{но } \begin{cases} e=3 \vee f=3 \Rightarrow \overline{ef} = 33 \\ \overline{ef} : 11 \end{cases}$$

$$\text{ещё в } \overline{bcd} \text{ есть } 6 \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{606}, \text{ т.е. } h=6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = (p+1)^3 - (p-1)^3 - 6(p+1)(p-1) \wedge p > 1$$

$$M = (p-4)^3 - (p-1)^3 - 6(-p-4)(p-1) \wedge p \neq -4 \wedge p < -4 \wedge p > 1$$

~~171~~
~~171~~ но нижний случай невозможен, т.к. $p < -4 \wedge p > 1$

$$\begin{cases} M = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 6p^2 + 6 \\ p > 1 \end{cases}$$

$E_M - ?$

$$\begin{cases} M = 6p^2 - 6p^2 + 8 = 8 \\ p > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} M = 8 \\ p > 1 \end{cases}$$

~~3~~ ~~x, y~~ $p = 2, t = 2 \Rightarrow x = 3, y = 1$

$$\underbrace{\frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3}}_{k(x=3, y=1)} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}}_{k'(x=3, y=1)} - ok$$

$$M = 27 - 1 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 26 - 18 = 8$$

Итак, $M = 8$ - необх., но $M = 8$ при $(x, y) = (3, 1)$ оно достигается, при этом условие на $x, y > 0$ и на $k = k'$ вып. $\Rightarrow 8$ - ответ (единств.)

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N2

$$x, y > 0 \quad K \quad K'$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \right) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \right)$$
~~$$\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \right)$$~~

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = ?$$

3. n. $x = t+1, y = p-1$

$$\frac{1}{t+1} + \frac{1}{p-1} + \frac{5}{(t+1)(p-1)} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{p+1} + \frac{5}{(t-1)(p+1)}$$

$$- \frac{2}{t^2-1} + \frac{2}{p^2-1} = 5 \cdot \frac{(t+1)(p-1) - (t-1)(p+1)}{(t^2-1)(p^2-1)}$$

$$5 \cdot \frac{tp + p - t - 1 - tp + p - t + 1}{(t^2-1)(p^2-1)} - \frac{2}{p^2-1} + \frac{2}{t^2-1} = 0$$

$$\frac{20p - 10t - 2(t^2-1) + 2(p^2-1)}{(t^2-1)(p^2-1)} = 0$$

$$\frac{-2t^2 - 10pt + 2p^2 + 10p}{(t^2-1)(p^2-1)} = 0 \quad (*) \quad \boxed{t^2, p^2 \neq 1, \text{ т.к. } x > 0}$$

$$M = (t+1)^3 - (p-1)^3 - 6(t+1)(p-1) =$$

$$= \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 6tp - 6p + 6t + 6}{1} =$$

$$= t^3 + 3t^2 + 9t - p^3 - 3p^2 - 9p - 6tp + 8$$

но $\begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases}$

$$\boxed{p^2 + 5p = t^2 + 5t}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = p \neq -1, \text{ т.к. } x > 0 \\ t = -p - 5 \\ t^2, p^2 \neq 1 \end{cases}$$

еще усл. на $x, y > 0$ $\begin{cases} t+1 > 0 \rightarrow t \neq -1 \\ p-1 > 0 \rightarrow p \neq 1 \end{cases}$ - ok

Посчитаем M с учетом $t > -1, p > 1, t \neq -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

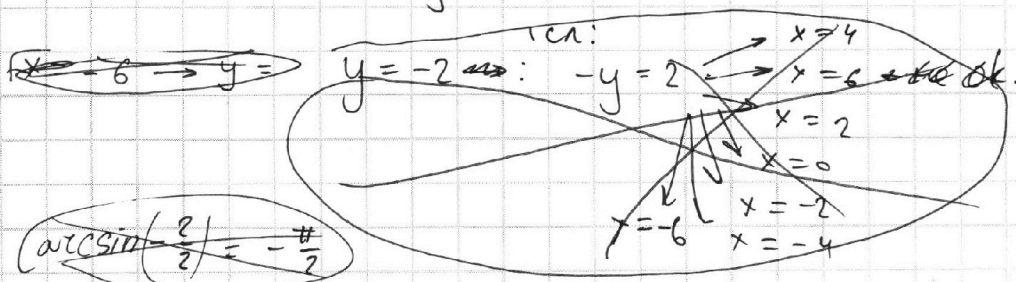
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

$$\text{ОДЗ: } \frac{x}{6} \in [-1; 1], \frac{y}{2} \in [-1; 1]$$

$$x \in [-6; 6], y \in [-2; 2]$$

$$(*) \begin{cases} x = -y - 2k & \text{1 сл.} \\ x = \frac{y - 2k}{3} & \text{2 сл.} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{но } E_{\arcsin t} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \text{не погх. только}$$

$$\text{те пары, где } \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{6} = 1, \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x = 6, y = 2$$

Итак, из ОДЗ, уг. (*) погх. все пары, кроме (6; 2)

$$x = -6 \rightarrow \begin{cases} y = 6 + 2k \\ y = -18 + 2k \end{cases}, \text{но } y \in [-2; 2] \Rightarrow 3 \text{ пары} \\ (k \in \mathbb{Z}) \quad (-6; -2), (-6; 0), (-6; 2)$$

в силу (Δ) чётность $y =$ чётность x ,

$$\text{но из ОДЗ 3 чёт. } y: -2, 0, 2 \\ \text{и 2 неч. } y: -1, 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{где } x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4\} \quad 3 \text{ пары} \\ \text{где } x = 6 \quad 2 \text{ пары (нельзя } y = 2) \\ \text{где } x \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} \quad 2 \text{ пары}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого пар

$$6 \cdot 3 + 2 + 6 \cdot 2 = 18 + 2 + 12 = 32$$

Ответ: а) $\{(x; -x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$
 $\{(x; 3x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$

б) 32



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N3

a) $(x; y) - ?$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = 0$$

$$(\sin \pi x - \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi x) + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{2} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

3-н. $\pi x = \alpha, \pi y = \beta$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta \quad / + \sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = 1$$

$$2\sin^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$1 - \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha$$

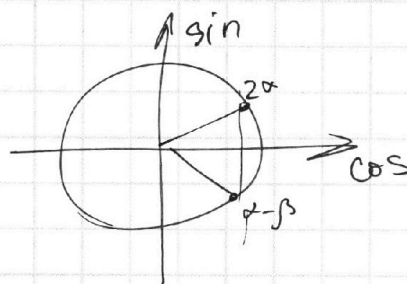
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha - \beta = -2\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{в плане множеств } \alpha, \beta$$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = 3\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi y = -\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = 3\pi x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\Delta) \quad \begin{cases} y = -x + 2k \\ y = 3x + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$U_{k \in \mathbb{Z}}, (x, y) \in \{(x, -x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$$

$$\cup \{(x, 3x + 2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4
и одинадцатиклассников

$$P_1 = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$$

A - Вася попал в кв. , B - Петя

P_1 - вер-ть в кв. месяца.

X - оказалось выдано. X - ?

P_2 - вер-ть или обоим попасть в конце мес.

$$P_2 = \frac{X}{n} \cdot \frac{X-1}{n-1} = \frac{X(X-1)}{n(n-1)}$$

$$P_2 = 6P_1 : \frac{X(X-1)}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 12}{n(n-1)}$$

$$n \in \mathbb{N}, n > 1$$

$$X^2 - X = 6 \cdot 12$$

$$X^2 - X - 6 \cdot 12 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1 + 288 = 289 = 17^2$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{2} \quad \text{с "-" - это н.к.}$$

$$X = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

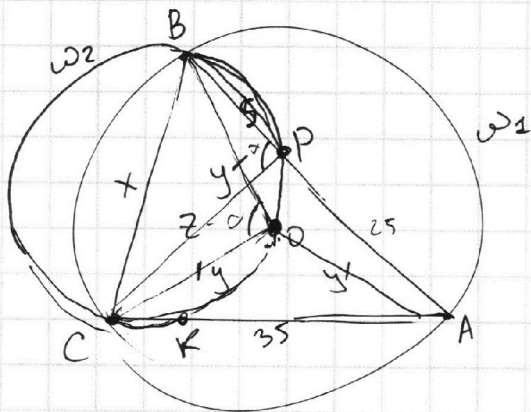
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

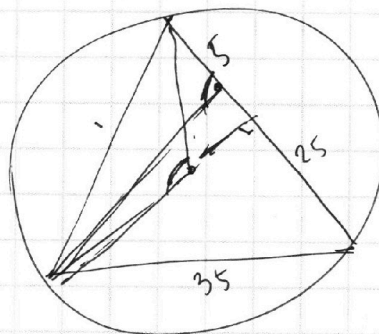
Задача N5



$S_{ABC} = ?$

$AP = 25$
 $BP = 5$
 $AC = 35$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ + 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

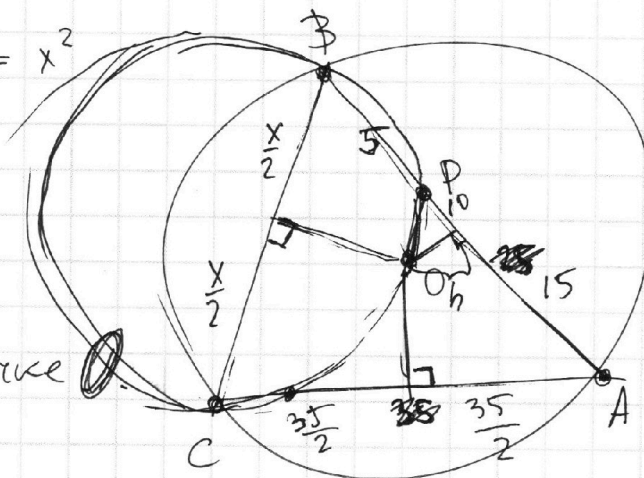


$$\deg(A, \omega_2) = 25 \cdot 30 = 750$$

$$x^2 = 2y^2(1 - \cos \alpha)$$

$$5^2 + z^2 = 2 \cdot 5 \cdot z \cos \alpha = x^2$$

Принимая
инверсию
с центром в точке





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

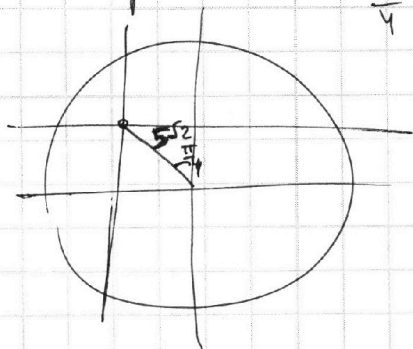
$$\frac{d(d_1+d_2)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\alpha}}$$

или ~~или~~ $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$ — при обоих 1 и т. же

периметр, равный $13\pi + 26 + \sqrt{119}$

почему мы нашли max?

посмотрим $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ тогда $M = M_2$



$$h = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$\begin{aligned} d_1+d_2 &= 2 \cdot 2 \sqrt{R^2 - 5^2} = 4 \sqrt{(13-5)(13+5)} \\ &= 4 \sqrt{8 \cdot 18} = 4 \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \end{aligned}$$

$$M_2 = 13\pi + 24$$

$$22 > \sqrt{119} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow M_1 \neq \max M.$

$$\text{Тогда 2 сл.: } \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\alpha}}$$

$$R^2 - r^2 \sin^2\alpha = R^2 - r^2 \cos^2\alpha$$

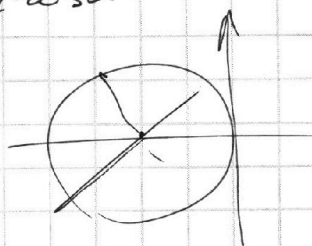
$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\begin{aligned} \tan^2\alpha &= 1 \\ \begin{cases} \tan\alpha = 1 \\ \tan\alpha = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Тогда мы $M_2 > M_1$ и то, что

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \text{ даёт 1 сл. и 2 сл. (1 сл. } \rightarrow M_1, 2 \text{ сл. } \rightarrow M_2)$$



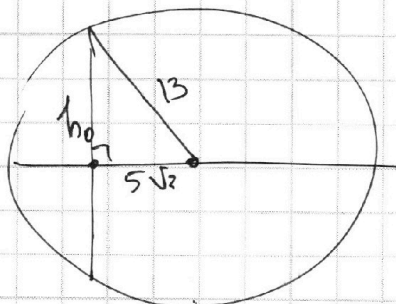


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h_0^2 = 13^2 - 25 \cdot 2 = 169 - 50 = 119$$

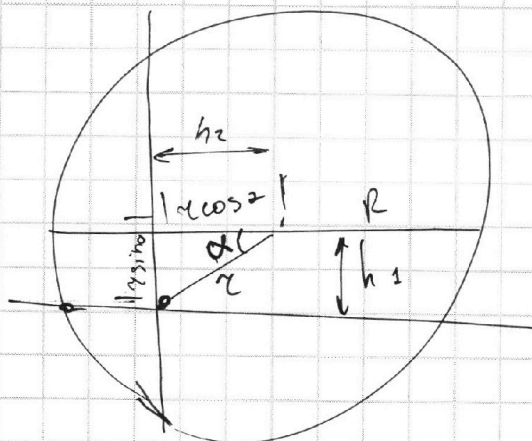
$$h_0 = \sqrt{119}$$

$$M_1 = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$$

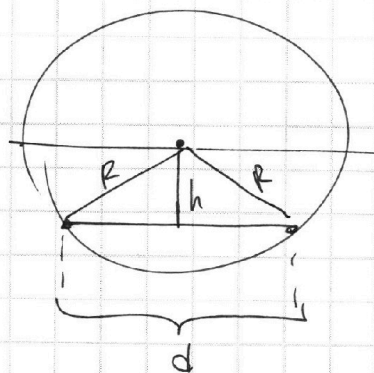
~~Ответ: $M = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$
 $\alpha \in \mathbb{R}$~~

$$R = 13$$

$$r = 5\sqrt{2}$$



Найдем d , если дано h :



$$d = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

$$h_1 = r \sin \alpha, \quad h_2 = r \cos \alpha$$

$$d_1 + d_2 = 2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{d(d_1 + d_2)}{d\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-r^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{+r^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \min M$$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \max M$$

Итак,

$$\text{Ответ: } M = 13\pi + 48$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N6

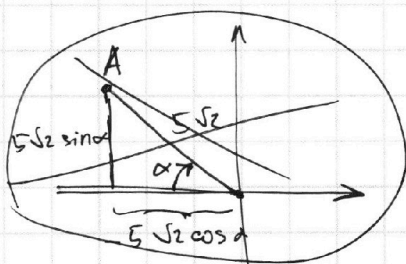
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 & (2) \end{cases}$$

$\Gamma(2)$ - ~~окр.~~ круг рад. 13 с центром в $O(0;0)$

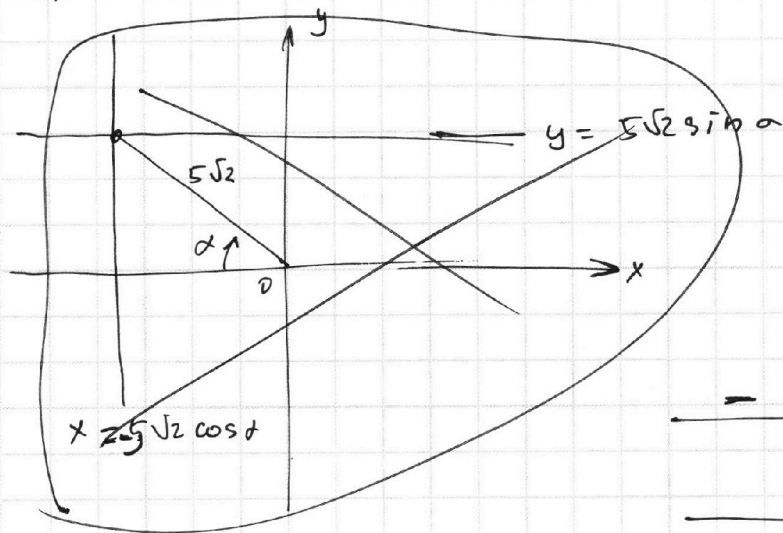
решим (1) методом областей

ОДЗ: $x, y \in \mathbb{R}$

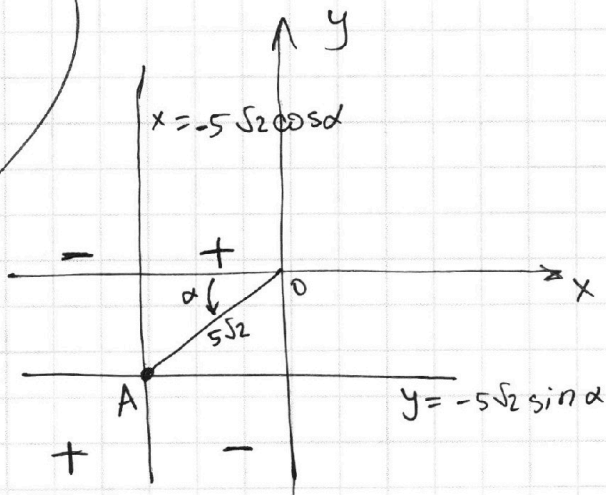
$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5\sqrt{2} \cos \alpha & (3) \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha & (4) \end{cases}$$



$\Gamma(3), \Gamma(4)$ - верт. и гор. прямые, прох. к/з A, где $|\vec{OA}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{OA}$ отложен от $-\vec{Ox}$ на α ~~по часовой стрелке~~ против ч/с



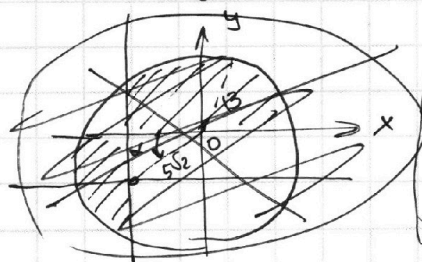
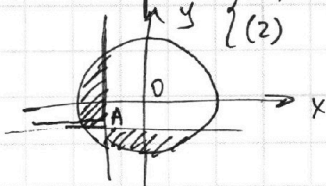
$5\sqrt{2} < 13$, кстати



в 4 полученных областях знаки f: $\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}$

~~не~~ реш. (1) - это области, где "-" (вкл. прямые)

Тогда реш. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$:



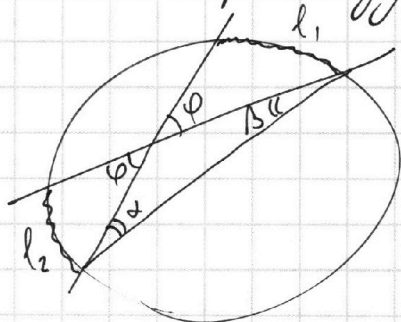
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть угол вел. φ и вертик. ему отсекают от некот. окр. 2 дуги: (дуги l_1 и l_2)



$$\check{l}_1 = 2\alpha, \check{l}_2 = 2\beta$$

$$\varphi = \alpha + \beta$$

$$\check{l}_1 + \check{l}_2 = 2\alpha + 2\beta = 2\varphi$$

независ.
от α .

В нашем случае $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \check{g}_1 + \check{g}_2 = \pi \Rightarrow$
суммарная длина дуг в $\varphi = \pi R = 13\pi$
($R=13$)

независ.
от α .

$M = 13\pi + d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — длины отрезков прямых (3), (4), сог-ная в φ .

$$d_1, d_2 \leq 2R = 26, \text{ т.к. } |хорда| \leq |диаметр|$$

$$\Rightarrow \max d_1 + d_2 = 26 + 26 = 52$$

$\max d_1 + d_2$ достигается, когда оба отрезка явл. диаметрами $\odot(O, 13)$

Вообще, $\exists R_0(\varphi(\alpha_1)) =$ Вообще, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\exists$ поворот отн. O : $\varphi(\alpha_1)$ переходит в $\varphi(\alpha_2)$
это R_Θ , где $\Theta = \alpha_2 - \alpha_1$, но поворот сохраняет длины $\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \quad M(\alpha_1) \equiv M(\alpha_2)$ (конгруэнтны)

$$\Rightarrow \forall \alpha \quad M(\alpha) = \max M$$

$$M = M(\alpha=0) = 13\pi + \cancel{26} + \cancel{26} + 2h, \text{ где } h:$$

сейчас

мы ищем M , когда $A \in$ одной из

$$M_1 = M(\alpha=0) = 13\pi + 26 + 2h_0 \text{ координат осей}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - кол-во
бок.
граней

Задача №7

R - рад. Ω (центр O_2)
 r - рад. ω (центр I)

$H = 2r$ - выс. усеч.
пирамиды

ω_1 рад. r_1 - выс.
окружность нижнего
основания

ω_2 рад. r_2 - ω - верхнего

θ - велич. двугр. угла м/у бок.
стороной и нижн. осн.

$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, т.к. Ω кас. рёбер

a - сторона нижн. осн.

b - сторона верхнего осн.

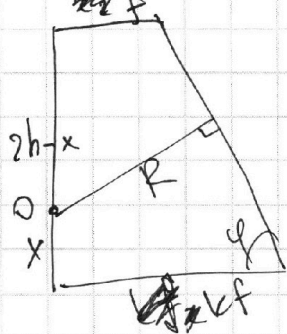
$$S_{\text{верх}} = R_2 \cdot r_2 = \frac{n b}{2} r_2$$

$$S_{\text{нижн}} = r_1 \cdot r_1 = \frac{n a}{2} r_1$$

Основания подобны, т.к. одно $\rightarrow$ другое гомотетией
отн. вершины неусечённой пирамиды.

$$f^2 = r_2^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

пусть $k > 1$: $r_1 = k r_2$
 k - ?





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

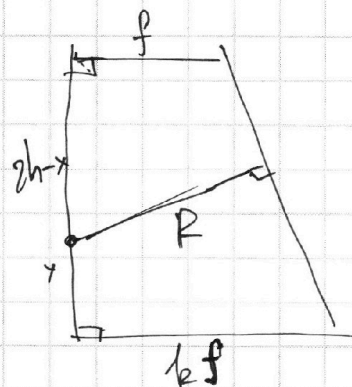
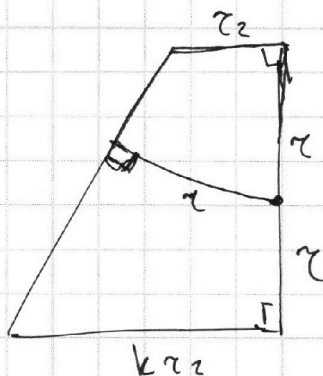
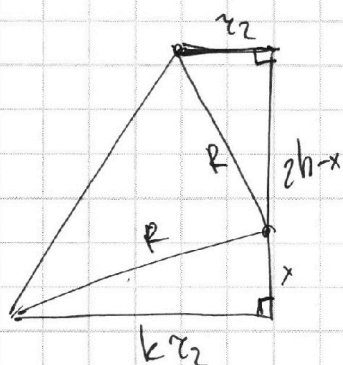
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

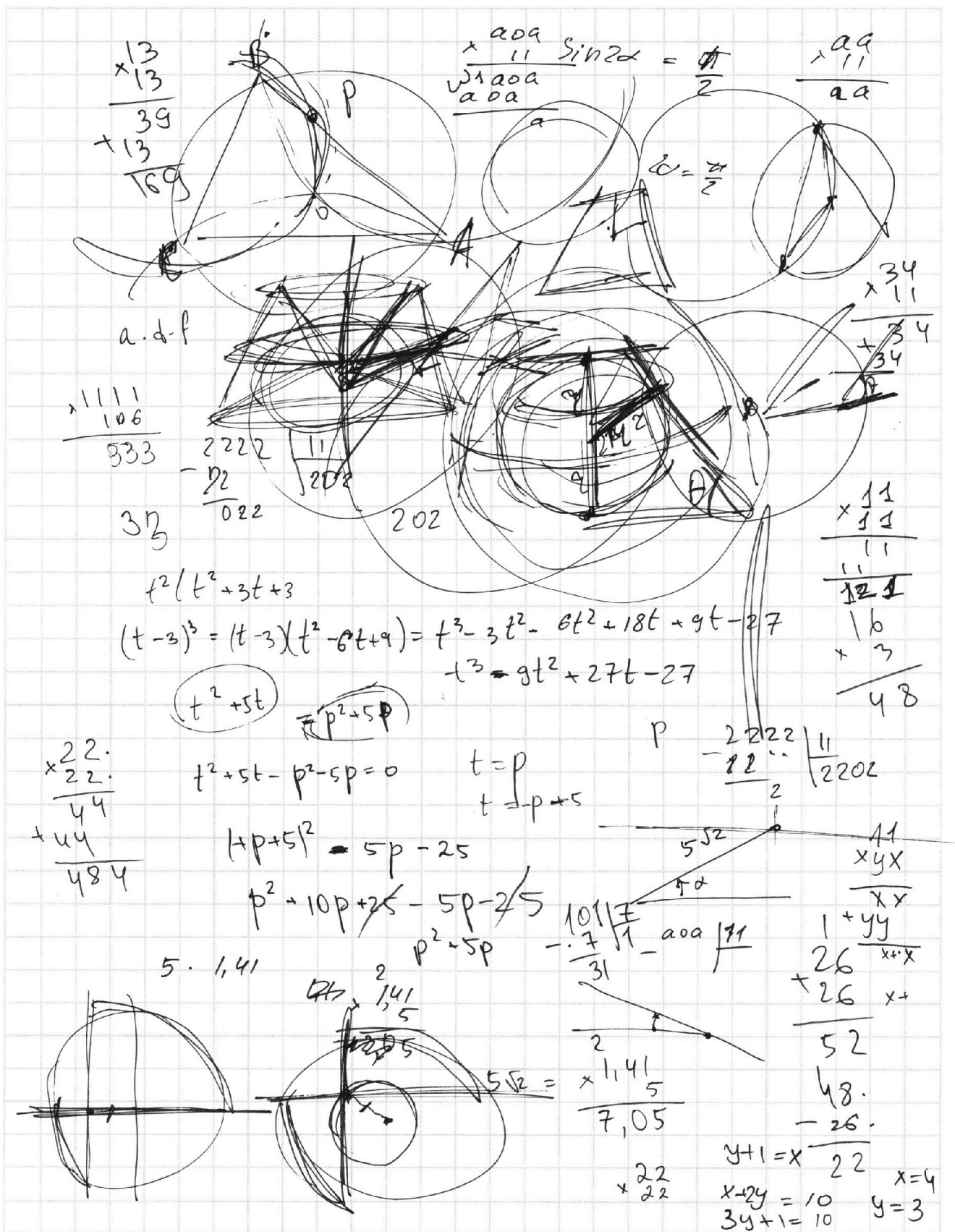


~~R = \tau_2~~ пусть $\tau_2 = y$

$$y^2 + (2h-x)^2 = R^2$$

$$R^2 = (ky)^2 + x^2$$

$$h = 2\tau_2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол. 12:11

~~15 мин~~

15 мин

25 мин

15 мин

20 мин

35 мин

35 мин

12:14 -

12:16 -

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) =$$

$$= x^3 - yx^2 + xy^2 - y^3$$

$$p^2 - 4$$

$$(t+1)(p-1) = tp + p - t + 1$$

$$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-(t+1)}{t^2-1} = \frac{-2}{t^2-1}$$

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p-1}{p^2-1} = \frac{0}{p^2-1} = 0$$

$$\frac{1}{(t-1)(p+1)} - \frac{1}{(t+1)(p-1)} = \frac{(t+1)(p-1) - (t-1)(p+1)}{(t-1)(p+1)(t+1)(p-1)}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ + 13 \\ \hline 169 \\ - 50 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 724 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ 289 \\ p < -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5 - p \neq -1 \\ p \neq -4 \\ -5 - p + 1 > 0 \end{array}$$

$$(t+1)/(t^2+2t+1) =$$

$$= t^3 + t^2 + 2t^2 + 2t + t + 1 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$(p-1)(p-1)^2 =$$

$$(p-1)(p^2-2p+1) =$$

$$= p^3 - p^2 - 2p^2 + 2p + p - 1 = p^3 - 3p^2 + 3p - 1$$

$$p^3 - 3p^2 + 3p - 1$$

$$tp + p - t - 1$$

$$p^2 - 1$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$$

$$\cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t \neq 1$$

$$p = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12$$

$$p > 1$$