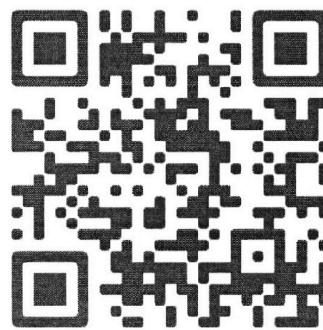


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И так, необходимо: $B = 606$

$$C = 33$$

$$\frac{11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 11}{6 \cdot 3} = n^2$$

$$6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$a : 2$ тоже необходимо

$a = 2 \rightarrow \text{ok}$,

$a = 4$ — не ok, ст. бx. 2 равна 3

$a = 6$ — не ok, ст. бx. 3 равна 3

$(a = 8) - \text{ok}, \text{ст. бx. 2 равна 4}$

$a = 0$ — не ok

И так, необx. $\begin{cases} a=2 \\ a=8 \end{cases}$, но ~~тогда~~ оба подх, видно из разложений

$$A = 2222 \vee A = 8888$$

Всего 2 тройки чисел

Ответ: $(2222, 606, 33)$ и $(8888, 606, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \overline{aaaa}, \quad B = \overline{bcd} \quad \begin{cases} b=6 \\ c=6 \\ d=6 \end{cases}, \quad C = \overline{ef} \quad \begin{cases} e=3 \\ f=3 \end{cases}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : ABC = n^2$$

$$A : 11, A : a \quad (\text{A} \cancel{=} \overline{aaaa}) \quad (A = \overline{aaa} \cdot 11)$$

$$11 \cdot \underbrace{\overline{aaa} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef}}_{\text{Сум: } 11} = n^2 \Rightarrow \begin{cases} \overline{ef} : 11 & 1 \text{ ч.} \\ \overline{bcd} : 11 & 2 \text{ ч.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{1 ч.} \quad \overline{ef} : 11 \Rightarrow f = 3 \\ \overline{ef} : 11 \Rightarrow e = 3, \text{ т.е. } \overline{ef} = 33 \end{cases} \quad *$$

$$(\text{последнее}) \quad \overline{aaa} = 101 \cdot a, \quad 101 - \text{простое}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef} = n^2$$

$$\Rightarrow \overline{bcd} : 101 \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{hoh} = h \cdot 101 \quad (h \in \{1, 9\})$$

~~Учтывая, что: $\overline{ef} = 33$~~

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 33 \cdot \overline{bcd} = n^2$$

$$\text{Тогда } 11 \cdot a \cdot 101 \cdot h \cdot 101 \cdot \overline{ef} = n^2$$

a, h - **однозначные** ($\neq 0$)

$\Rightarrow \overline{ef} : 11$, т.к. $a, h \nmid 11$ (мы руководствуемся тем, что степенью бк. простых чисел в факторе квадрат \overline{ef} не может быть)

$$\text{но } \begin{cases} e = 3 \vee f = 3 \\ \overline{ef} : 11 \end{cases} \Rightarrow \overline{ef} = 33$$

$$\text{знач } \overline{bcd} \text{ четное} \Rightarrow \overline{bcd} = \overline{606}, \text{ т.е. } h = 6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l} M = (p+1)^3 - (p-1)^3 - 6(p+1)(p-1) \wedge \cancel{p \neq 1} \quad p > 1 \\ M = (-p-4)^3 - (p-1)^3 - 6(-p-4)(p-1) \wedge p \neq -4 \wedge p < -4 \wedge p > 1 \end{array} \right]$$

~~($p \neq 1$)~~ но никакие случаи невозможн., т.к. $p < -4 \wedge p > 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p^3 - 3p^2 - 3p + 1 - 6p^2 + 6 \\ p > 1 \end{array} \right. \quad E_M - ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 6p^2 - 6p^2 + 8 = 8 \\ p > 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M = 8 \\ p > 1 \end{array} \right.$$

~~(x, y)~~ $p = 2, t = 2 \Rightarrow x = 3, y = 1$

$$\underbrace{\frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3}}_{K(\cancel{x=3, y=1})} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}}_{K'(x=3, y=1)} - ok$$

$$M = 27 - 1 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 26 - 18 = 8$$

Итак, $M = 8$ — кандидат, но $M = 8$ при $(x, y) = (3, 1)$ оно достигается, при этом условие на $x, y > 0$ и на $K = K'$ выполнено. $\Rightarrow 8$ — ответ (единствен.).

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0 \quad \text{F} \quad \text{Задача N2} \quad \text{F}'$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad \cancel{\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = ?$$

$$3. n. \quad x = t+1, y = p-1$$

$$\frac{1}{t+1} + \frac{1}{p-1} + \frac{5}{(t+1)(p-1)} = \frac{1}{(t-1)} + \frac{1}{p+1} + \frac{5}{(t-1)(p+1)}$$

$$-\frac{2}{t^2-1} + \frac{2}{p^2-1} = 5 \cdot \frac{(t+1)(p-1) - (t-1)(p+1)}{(t^2-1)(p^2-1)}$$

$$5. \frac{tp + p - t - 1 - tp + p - t + 1}{(t^2-1)(p^2-1)} - \frac{2}{p^2-1} + \frac{2}{t^2-1} = 0$$

$$\frac{8tp - 10t - 2(t^2-1) + 2(p^2-1)}{(t^2-1)(p^2-1)} = 0$$

$$-2t^2 - 10pt + 2p^2 + 10p \quad \cancel{(t^2-1)(p^2-1)} = 0 \quad (*) \quad \cancel{t^2 \neq 1, t \neq 0}$$

$$M = (t+1)^3 - (p-1)^3 - 6(t+1)(p-1) =$$

$$= \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1 - 6tp - 6p + 6t + 6}{t^3 + 3t^2 + 9t - p^3 - 3p^2 - 9p - 6tp + 8} =$$

но $\begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases} \quad \text{F} \cup \text{F}'$

$$(p^3 + 5p^2 = t^2p + 5tp)$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 5p = t^2 + 5t \\ t^2 \neq 1 \wedge p^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = p \quad \cancel{*} \\ t = -p-5 \\ t^2, p^2 \neq 1 \end{cases} \quad \cancel{(t \neq -1, t \neq 0, t \geq 0)}$$

если усл. на $x, y > 0 \quad \begin{cases} t+1 > 0 \rightarrow t \neq -1 \\ p-1 > 0 \rightarrow p^2 \neq 1 \rightarrow 0 \end{cases}$

посчитаем M с учетом $t > -1, p > 1, t \neq -1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

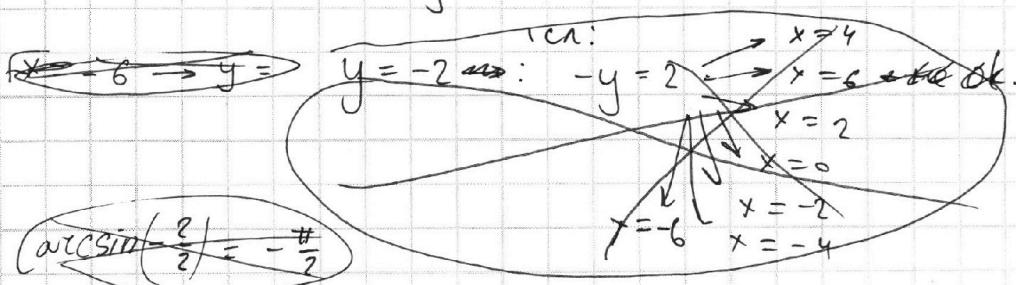
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$OD3: \frac{x}{6} \in [-1; 1], \frac{y}{2} \in [-1; 1]$$

$$x \in [-6; 6], y \in [-2; 2]$$

$$(*) \begin{cases} x = -y - 2k, \\ x = \frac{y-2k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\text{но } E_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\text{т.е. пары, для которых } \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{6} = 1, \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x=6, y=2$$

Утак, из OD3, y.g. (*) подходит, кроме $(6; 2)$

$$x = -6 \rightarrow \begin{cases} y = 6 + 2k \\ y = -18 + 2k \end{cases}, \text{ но } y \in [-2; 2] \Rightarrow 3 \text{ пары } (-6; -2), (-6; 0), (-6; 2)$$

В силу (Δ) чётность $y = \text{чётность } x \Rightarrow$,

но из OD3 3 чёт. $y: -2, 0, 2$

* 2 неч. $y: -1, 1$

\Rightarrow ~~22222222222222222222~~

где $x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4\}$ 3 пары

где $x = 6$ 2 пары (нелогич $y = 2$)

где $x \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ 2 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Итого пар

$$6 \cdot 3 + 2 + 6 \cdot 2 = 18 + 2 + 12 = 32$$

Ответ: а) $\{(x; -x+2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$
 $\cup \{(x; 3x+2k) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$

б) 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $(x; y) - ?$

Задача №3

$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x &= 0 \\ (\sin \pi x - \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi x) + \cos(\pi y - \pi x) &= 0 \\ \cancel{\sqrt{2} \cos(\pi x + \frac{\pi}{4})} \cancel{\sqrt{2} \cos(\pi x - \frac{\pi}{4})} + \cos(\pi y - \pi x) &= 0 \end{aligned}$$

3-н. $\pi x = \alpha, \pi y = \beta$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta &= \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta \quad / + \sin^2 \alpha \\ 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta &= 1 \\ 2 \sin^2 \alpha + \cos(\alpha - \beta) &= 1 \end{aligned}$$

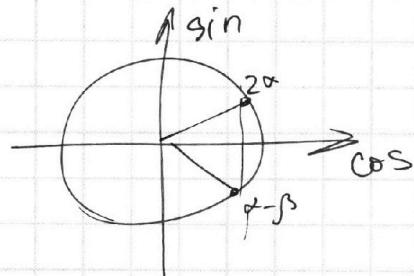
$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$1 - \cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha - \beta = -2\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{бесконечное множество } \alpha, \beta$$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = 3\alpha + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \pi y = -\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = 3\pi x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\Delta) \quad \begin{cases} y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 3x + 2l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Учак, $(x, y) \in \{(x, -x+2k) | x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\} \cup$

$\{(x, 3x+2l) | x \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4
и одиннадцатиклассников

$$P_1 = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$$

A - Вася получил 6 кв., B - Петя

P_1 - вероятность 6 кв. месяца.

x - оказалось 6 кв. месяца. x - ?

P_2 - вероятность однаковой попасти в конце мес.

$$P_2 = \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$P_2 = 6P_1 : \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 12}{n(n-1)}$$

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$$x^2 - x = 6 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 6 \cdot 12 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1 + 288 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{2} \quad \text{с } " - " - \text{ это н.к.}$$

$$x = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Ответ: 9.

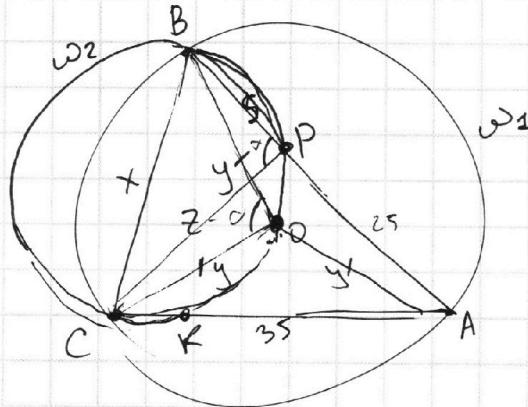
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

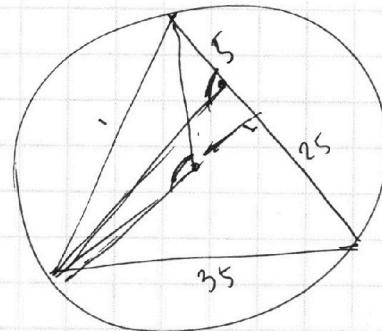
Задача №5

$S_{ABC} - ?$



$$\begin{aligned}AP &= 25 \\BP &= 5 \\AC &= 35\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

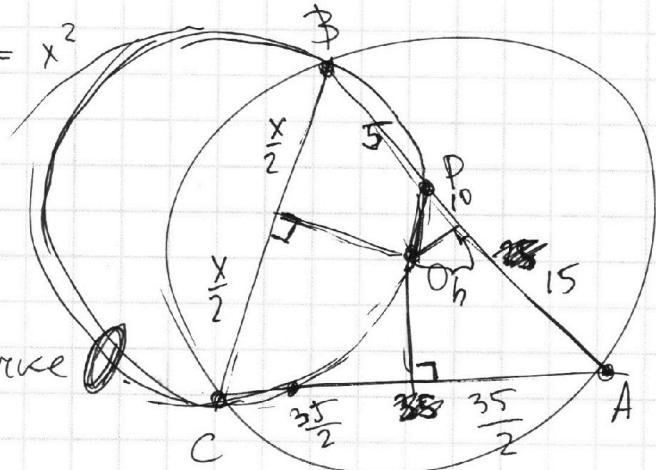


$$\deg(A, \omega_2) = 25 \cdot 30 = 750$$

$$x^2 = 2y^2(1 - \cos \alpha)$$

$$5^2 + 2^2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos \alpha = x^2$$

Применили
инверсию
с центром в точке



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
Ч ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

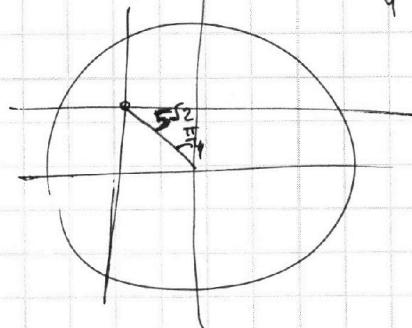
$$\frac{d(d_1+d_2)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$$

\Rightarrow ~~1 с.н.~~ $\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$ — при обоих 1 и 2 ч. не

периметр, равенство $13\pi + 26 + \sqrt{119}$

Почему мы нашли max?

посмотрим $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ тогда $M = M_2$



$$h = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 2 \cdot 2 \sqrt{R^2 - 5^2} = 4 \sqrt{(13-5)(13+5)} = \\ &= 4 \sqrt{8 \cdot 18} = 4 \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = 4 \cdot 4 \cdot 3 = \\ &= 48 \quad M_2 = 13\pi + 48 \end{aligned}$$

$$22 > \sqrt{119} \Leftrightarrow \cancel{1 \text{ с.н.}} \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow M_1 \neq \max M$.

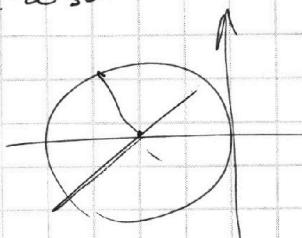
Тогда 2 с.н.: $\frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$

$$R^2 - r^2 \sin^2 \alpha = R^2 - r^2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = 1 \\ \tan \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



Тогда из $M_2 > M_1$ и т.к. $r \neq 0$

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \text{ для } 1 \text{ с.н. и 2 с.н. (1 с.н.} \rightarrow M_1, 2 \text{ с.н.} \rightarrow M_2)$$

I-

I-

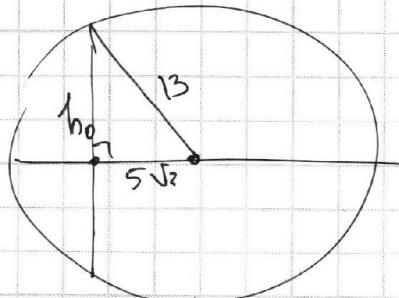


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h_0^2 = 13^2 - 25 \cdot 2 = 169 - 50 = 119$$

$$h_0 = \sqrt{119}$$

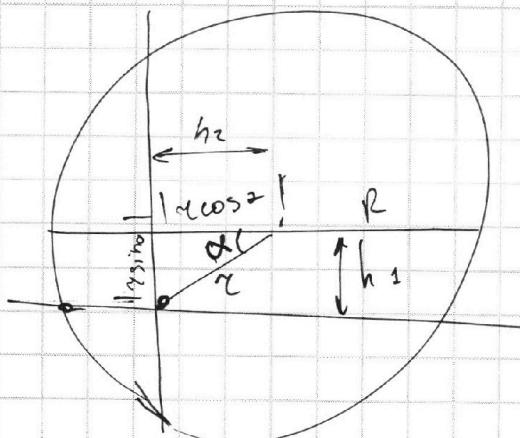
$$M_1 = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$$

Ответ: $M = 13\pi + 26 + 2\sqrt{119}$

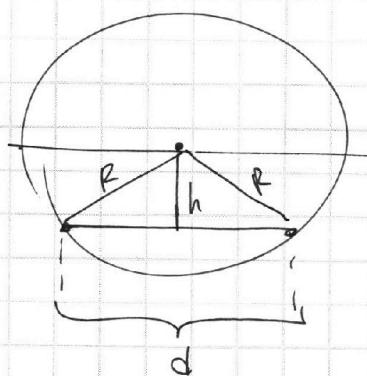
$$d \in \mathbb{R}$$

$$R = 13$$

$$r = 5\sqrt{2}$$



Найдём d , если дано h :



$$d = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

$$h_1 = r \sin \alpha, \quad h_2 = r \cos \alpha$$

$$d_1 = d_2 = 2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{d(d_1 + d_2)}{d\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-r^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{+r^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $\alpha = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ min M

при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ max M

Утак,

Ответ: $M = 13\pi + 48$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5

- 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 & (2) \end{cases}$$

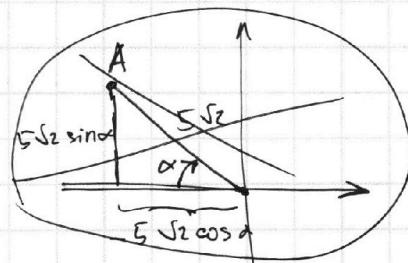
$\Gamma(2)$ - ~~круг~~ круг радиуса 13 с центром в $O(0;0)$

решим (1) методом областей

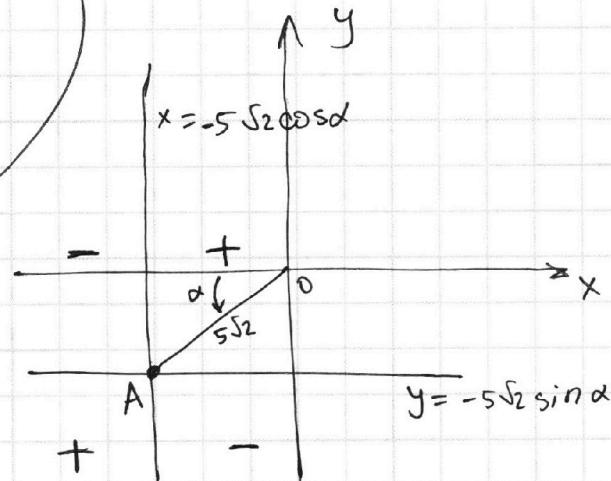
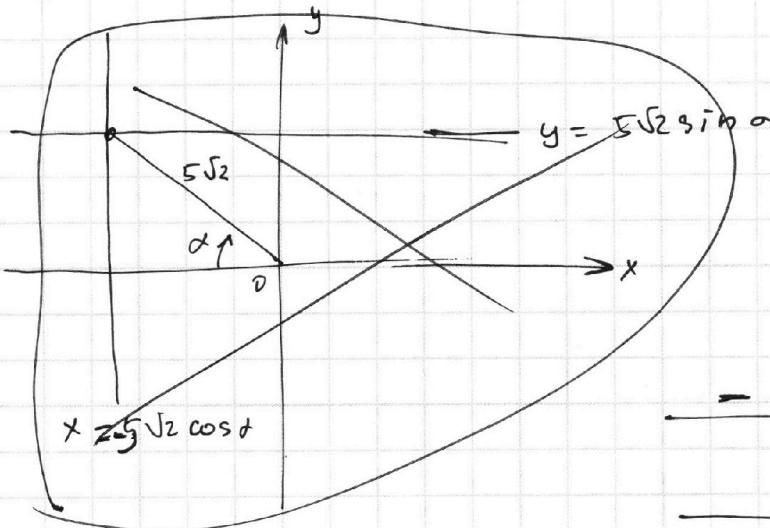
ОДЗ: $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5\sqrt{2} \cos \alpha & (3) \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha & (4) \end{cases}$$

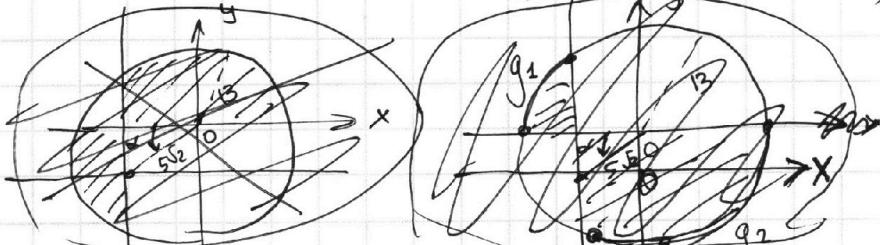
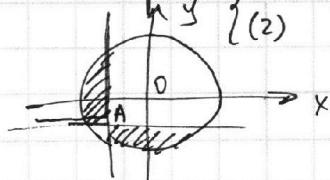


$\Gamma(3), \Gamma(4)$ - верт. и гор. прямые, прох. $\pi/3$ A, где $|\vec{OA}| = 5\sqrt{2}$, \vec{OA} отложен от $-\vec{Ox}$ на α ~~на $\pi/6$~~ . против $\pi/3$



в 4 полученных областях знаки f :
~~реш.~~ реш. (1) - это область, где $"+"$ (вкл. прямые)

Тогда реш. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

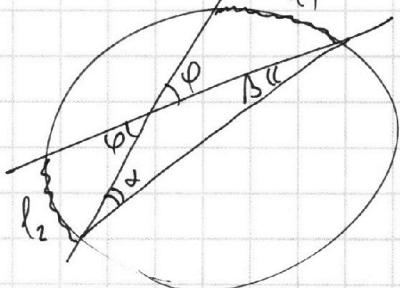


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть угол бел. φ и вертик. ему отсекают от некот. окр. 2 дуги: (дуги l_1 и l_2)



$$\tilde{l}_1 = 2\alpha, \tilde{l}_2 = 2\beta$$

$$\varphi = \alpha + \beta$$

$$\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 = 2\alpha + 2\beta = 2\varphi$$

независ.
от α .

В нашем случае $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = \pi \Rightarrow$
суммарная длина дуг $\theta \Phi = \pi R = 13\pi$
 $(R=13)$ независ.
от α .

$M = 13\pi + d_1 + d_2$, где d_1, d_2 - длины отрезков
прямых (3), (4), сог-коэф $\theta \Phi$.

$$d_1, d_2 \leq 2R = 26, \text{ т.к. } [\text{корда} \leq \text{диаметр}]$$

$$\Rightarrow \max d_1 + d_2 = 26 + 26 = 52$$

~~max $d_1 + d_2 \leq 2\pi$ достигается, когда оба отрезка
бл. диаметра~~ $\odot(0, 13)$

~~Вообщем, $\exists R_0 (\theta \Phi(\alpha_1)) =$~~ Вообщем, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

~~Эт поворот отн. 0: $\Phi(\alpha_1)$ переходит в $\Phi(\alpha_2)$~~

Это R_0^θ , где $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, т.к. поворот сохраняет
длины $\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 M(\alpha_1) \cong M(\alpha_2)$ (конгруэнтны)

~~$\Rightarrow \forall \alpha M(\alpha) = \max M$~~

~~$M = M(\alpha=0) = 13\pi + 26 + 2h \geq d_1 + d_2$~~

Сейчас

~~мы имеем M , когда $A \in$ верхней из~~

$$M_1 = M(\alpha=0) = 13\pi + 26 + 2h_0 \text{ коорд. осей}$$



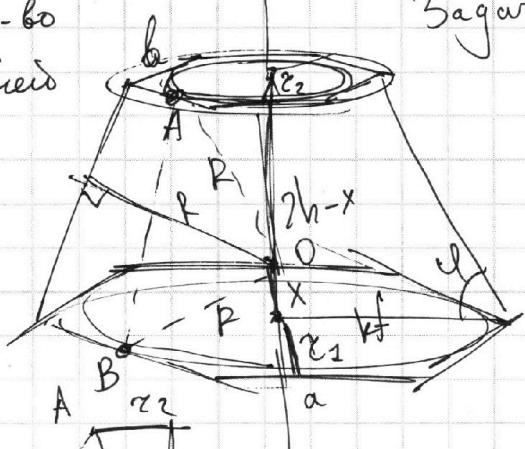
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н - кол. бс
бок.
зрачек



Задача № 7

R - радиус ω_2 (центр O_2)
 ω - радиус ω (центр O)

$H = 2\omega -$ выс. усег.
пирамиды

ω_1 радиус ω_1 - выс.
окружность нижнего
основания

ω_2 радиус ω_2 - радиус верхнего

θ - велич. овурн. угла м/у бок.
стороной и нижн. осн.

$\omega_1, \omega_2 \subseteq \Omega$, т.к. Ω кас. рёбер
a - сторона нижн. осн.

b - сторона верхн. осн.

$$S_{\text{верх}} = \rho_2 \cdot \omega_2 = \frac{\pi b}{2} \omega_2$$

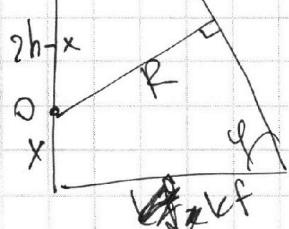
$$S_{\text{нижн}} = \rho_1 \cdot \omega_1 = \frac{\pi a}{2} \omega_1$$

Основания подобны, т.к. оба \rightarrow сужают гипотенез
отн. вершины неусечённой пирамиды.

$$f^2 = \omega_2^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

пусть $k > 1$: $\omega_1 = k \omega_2$

$k = ?$

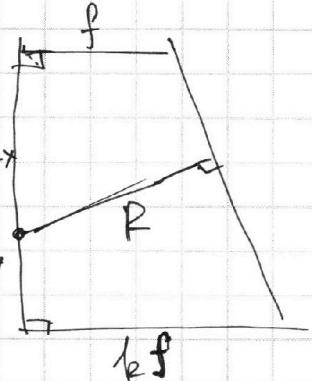
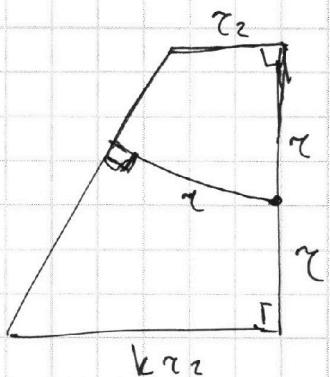
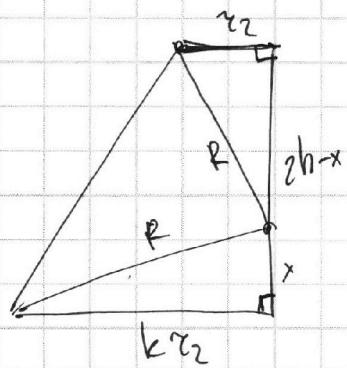


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим пусть $\gamma_2 = y$

$$y^2 + (2h-y)^2 = R^2$$
$$R^2 = (ky)^2 + x^2$$
$$h = \sqrt{R^2 - y^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work:

- Top left: $\begin{array}{r} \times 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ + 13 \\ \hline 169 \end{array}$
- Top right: $\frac{\alpha_{09}}{\omega_{100a}} \sin 2\alpha = \frac{\phi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_9}{\alpha a}$
- Middle left: $\begin{array}{r} \times 1111 \\ \times 106 \\ \hline 533 \\ - 2222 \\ \hline 022 \end{array}$
- Middle center: $t^2(t^2 + 3t + 3)$, $(t-3)^3 = (t-3)(t^2 - 6t + 9) = t^3 - 3t^2 - 6t^2 + 18t + 9t - 27$, $t^3 = 9t^2 + 27t - 27$
- Middle right: $\begin{array}{r} \times 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ - 12 \\ \hline 1 \end{array}$, $\begin{array}{r} \times 16 \\ \times 3 \\ \hline 48 \end{array}$
- Bottom left: $\begin{array}{r} \times 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ + 44 \\ \hline 484 \end{array}$, $t^2 + 5t - p^2 - 5p = 0$, $t = p$, $t = -p + 5$, $|+p+5|^2 = 5p - 25$, $p^2 + 10p + 25 - 5p - 25$, $5 \cdot 1,41$, $Q_5 = 1,41$, $5\sqrt{2} = \frac{x 1,41}{7,05}$
- Bottom right: $\begin{array}{r} \times 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ - 12 \\ \hline 1 \end{array}$, $\begin{array}{r} \times xy \\ \times xy \\ \hline xy \\ - xy \\ \hline 0 \end{array}$, $\begin{array}{r} \times 26 \\ \times 26 \\ \hline 26 \\ + 26 \\ \hline 52 \end{array}$, $y+1=x$, $x+2y=10$, $3y+1=10$, $x=4$, $y=3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нач. 12:11

X 20+15 мин

✓ 25 мин
25 мин
15 мин

5 20 мин

✓ 35 мин

7 45 мин

☒ (t+1)/(t^2+2t+1) =

$$= t^3 + t^2 + 2t^2 + 2t + t + 1 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$(p-1)(p-1)^2 =$$

$$(p-1)(p^2 - 2p + 1) =$$

$$= p^3 - p^2 - 2p^2 + 2p - p - 1 = p^3 - 3p^2 + 3p - 1$$

$$tp + p - t - 1$$

$$p^2 - 1$$

$$P = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 12$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) =$$

$$\frac{12}{6} = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -5 - p \neq -1$$

$$p > 1 \quad t \neq 1 \quad \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \quad p \neq -4$$

$$-5 - p + 1 > 0$$

$$2p - 2t - 2 \sin^2 \alpha + 1 = + \cos 2 \alpha$$

$$x = t+1 \quad \cos^2 - \sin^2 = 1 - 2 \sin^2 2$$

$$x - 2 = t+1 - 2 = t-1$$

12:16 -

$$p = 2 \quad t = P \quad 2, t = 2$$

$$-5p^{x^1} x^0 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - yx^2 + xy^2 - xy^2 - y^3$$

$$p^{<-4} = p^2$$

$$(t+i)(p-1) = tp + p - t + 1$$

$$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-(t+1)}{t^2-1} = t-1 - t-1$$

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p+1}{p^2-1}$$

$$\frac{13}{39}$$

$$\frac{13}{50}$$

$$\frac{169}{719}$$

$$\frac{1}{(t-1)(p+1)} - \frac{1}{(t+1)(p-1)} = (t+1)(p-1)$$

$$= t^2 + t^2 + 2t^2 + 2t + t + 1 =$$

$$= t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$tp + p - t - 1 \quad tp - p + t - 1$$

$$10p - 10t - 2t^2 + 2p^2 - 2$$

$$p^2 + 5p - t^2 - st$$

$$\frac{p(p+5) - t(t+5)}{p}$$

$$\frac{17}{17}$$

$$\frac{119}{17}$$

$$\frac{72}{17}$$

$$\frac{288}{288}$$

$$\frac{289}{289}$$

$$p < -4$$

$$-5 - p \neq -1$$

$$p \neq -4$$