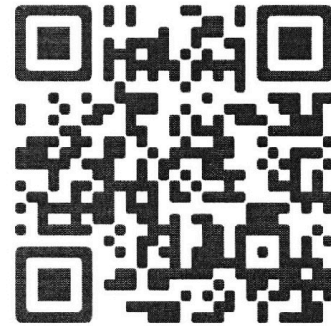




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ABC = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$A = \overline{aaaa} = (1000 + 100 + 10 + 1)a = 1111a \quad (a \neq 0)$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$ABC = n^2 \Rightarrow n : 101, \text{ т.к. } n^2 = ABC : 101$$

$$\Rightarrow n : 101, \text{ т.к. } 101 - \text{простое число.}$$

$$\Rightarrow n^2 : 101^2.$$

$$ABC = n^2 : 101^2$$

$$\Rightarrow 101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C : 101^2$$

$$\Rightarrow B : 101, \text{ т.к. } (11, 101) = 1, \quad (a, 101) = 1, \quad \text{т.к. } a - \text{цифра } (a \neq 0)$$

$$(C, 101) = 1, \text{ т.к. } C - \text{двузначное число}$$

$$\Rightarrow C < 101, \text{ при этом } C \geq 10 \Rightarrow (C, 101) = 1, \text{ т.к. } 101 - \text{простое.} \Rightarrow B : 101, \text{ т.к.}$$

$$\text{равенство } ABC = n^2 \text{ невозможно.}$$

$$\Rightarrow B = \overline{b0b}, \text{ при этом } b = 7, \text{ т.к. в } B \text{ есть } \geq 1 \text{ цифра } 7. \Rightarrow B = 707$$

$$ABC = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 7 \cdot 101 \cdot C = n^2 \Rightarrow n^2 : 11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow n : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2$ (т.к. 11 — простое число)
 $(101, 11) = 1, (a, 11) = 1$, т.к. $a \in [1, 9]$, а 11 — простое число
 $(7, 11) = 1 \Rightarrow C : 11$, иначе равенство $ABC = n^2$ невозможно, т.к. левая часть имеет множитель делителя 11 — один, а правая ≥ 2 . $\Rightarrow C = 11$
 $\Rightarrow C = 1$, т.к. в C есть ≥ 1 цифра 1
 $\Rightarrow C = 11$.

$$\Rightarrow ABC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7a = n^2, n^2 : 7$$

$\Rightarrow n : 7$, т.к. 7 — простое число. $\Rightarrow$

$$n^2 : 7^2, \text{ т.к. } (101, 7) = 1, (11, 7) = 1 \Rightarrow$$

$$7a : 7^2 \Rightarrow a = 7, \text{ т.к. } a \in [1, 9].$$

$$(\Rightarrow a : 7)$$

$$\Rightarrow A = 1111 \cdot 7 = 7777.$$

$$A = 7777, B = 707, C = 11$$

$$ABC = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = (7 \cdot 11 \cdot 101)^2 = n^2 \text{ при } n = 7 \cdot 11 \cdot 101.$$

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy \quad (x \neq 4) \quad (y+4 > 0)$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{(x-4)+(y+4)+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{xy} \quad (x+y+3 > 0)$$

$$\Rightarrow (x-4)(y+4) = xy$$

$$\Rightarrow xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$\Rightarrow 4x = 4y + 16 \Rightarrow x = y + 4$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = \\ &= y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 4 + 3 \cdot y \cdot 16 + 4^3 - y^3 - 12y^2 - 48y = \\ &= 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y = 64 \end{aligned}$$

~~Ответ: 64.~~

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из ~~4~~ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) \quad & (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = \\ & = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\ \Leftrightarrow & \sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \\ & + \cos \pi y \cos \pi x \\ \Leftrightarrow & \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = -(\sin \pi x \sin \pi y + \\ & + \cos \pi y \cos \pi x) \\ \Leftrightarrow & \cos(2\pi y) = -\cos(\pi y - \pi x) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\pi y + (\pi y - \pi x) = 2\pi k + \pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y = 2\pi k + \pi + (\pi y - \pi x), & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3\pi y - \pi x = 2\pi k + \pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi y + \pi x = 2\pi k + \pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3y - x = 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \\ y + x = 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \frac{x + 2k + 1}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ ~~3~~ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; \frac{x+2k+1}{3}), k \in \mathbb{Z} \\ (x; -x+2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} (x; \frac{x+2k+1}{3}), k \in \mathbb{Z} \\ (x; -x+2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

д) ~~.....~~

$$\begin{cases} (x; \frac{x+2k+1}{3}), k \in \mathbb{Z} \\ (x; -x+2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(x, y) -пара ~~.....~~ $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
(arccos определен от -1 до 1)
 $\frac{x}{7} \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-7; 7]$

$$y \in \mathbb{Z}, \frac{y}{4} \in [-1; 1] \Leftrightarrow y \in [-4; 4]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \in [0; \pi], \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

из $\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$ следует,

что $\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \neq 0$ или $\arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \neq \frac{\pi}{2}$,



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. в остальных случаях

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

~~т.к.~~
$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{7}\right) \neq 0 \\ \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Не подходит только пара $(7, 4)$,
а остальные подходят.

~~Все пары (x, y) , удовлетворяющие
общим условиям пары $15 \cdot 9 - 1 = 134$,~~

т.к. $x \in [-7, 7]$, $y \in [-4, 4] \Rightarrow$ ~~т.к.~~

x может принимать $7 - (-7) + 1 = 15$

значений, а y может принимать
 $4 - (-4) + 1 = 9$ значений.

~~т.к.~~ т.к. подходят
пары $(x; -x+2k+1)$ ($k \in \mathbb{Z}$), то можно
выбрать пару (x, y) , $x \in [-7, 7]$,
 $y \in [-4, 4]$ так, чтобы x и y были
разной четности (т.к. x и y обязаны быть разной четности)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что и в паре $(x, \frac{x+2k+1}{3})$ числа обязаны быть разной четностью, ведь иначе

$$x - \frac{x+2k+1}{3} = 2t, \quad t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2k - 1 = 6t \Rightarrow 2x = 2k + 1 + 6t$$

$\Rightarrow$ левая часть равно четному.

Контрпример.

$\Rightarrow$ Подсчитаем ~~только~~ пары (x, y) , где x и y разной четности $x \in [-7, 7]$, $y \in [-4, 4]$,

кроме пары $[7; 4]$, при этом все ~~такие~~ пары подсчитаем.

$$\text{Всего таких пар: } 8 \cdot 5 + 7 \cdot 4 - 1 = 67.$$

(~~только~~ 8-чет от -7 до 7,
7-чет. от -7 до 7,
5-чет. от -4 до 4,
4-чет от -4 до 4)

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть кол-во участников мастер-классов — N .
Пусть в конце месяца оказалось, что
выделено $k \geq 5$ билетов.

($N \geq k \geq 5$)

P_0 — вероятность получить билеты
на концерт в начале
месяца, а P_1 — вероятность получить
билеты на концерт вместе в конце
месяца.

$$P_0 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{\frac{(N-2)(N-3)}{2 \cdot 1}}{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{N(N-1) \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{12}{(N-1)N}$$

(т.к. все исходы равновероятны,
 C_{N-2}^2 исходов где оба получили
по два билета, а C_N^4 — общее
кол-во исходов)

$$P_1 = 11 P_0$$

$$P_1 = \frac{C_{N-2}^{k-2}}{C_N^k} = \frac{\frac{(N-2)!}{(k-2)!(N-2-k+2)!}}{\frac{N(N-1)(N-2) \dots 1}{(N-k)! \cdot k!}} = \frac{(N-2)! \cdot (N-k)! \cdot k!}{N! \cdot (k-2)! \cdot (N-k)!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{(\cancel{N-2})! \cdot k(k-1) \cdot (\cancel{k-2})!}{N(N-1)(\cancel{N-2})! (\cancel{k-2})!} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

(т.к. все исходы равновероятны,
 C_N^k - общее кол-во исходов, а C_{N-2}^{k-2} -
кол-во исходов, где оба мальчика
позвонили братишке)

$$p_1 = 11 p_0 \Leftrightarrow \frac{k(k-1)}{N(N-1)} = \frac{11 \cdot 12}{N(N-1)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k = 11 \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow (k-12)(k+11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ k=11 \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ k=-11 \end{cases}, \text{ но } k \geq 5$$

$$\Rightarrow k=12. \left(\begin{array}{l} k=12 - \text{подходит, т.к.} \\ 12 \geq 5, \quad \frac{12-11}{N(N-1)} = \frac{11 \cdot 12}{N(N-1)} \end{array} \right)$$

Ответ : 12.

$OB = OC = OA = R$ —
радиус ω_1 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha \quad (\text{как центральный и вписанный угол, опирающийся на одну дугу})$$

$$\angle OBC + \angle BOC + \angle OCB = 2\angle OBC + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OBC = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle OXC = \angle OBC = 90^\circ - \alpha$$

Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$
(как центральный и вписанный угол, опирающийся на одну дугу).

$$\angle COX = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 2\beta$$

(как смежные)

$$\angle BOX = \angle BOC - \angle COX = 2\alpha - (180^\circ - 2\beta) =$$

$$= 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$$

$\angle BCX = \angle BOX = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$ (два вписанных угла, опирающихся на одну дугу)

($\angle BCX = \angle BOX$)

$$\angle OXC = \angle BCX + \angle OCB =$$

$$= 2\alpha + 2\beta - 180^\circ + 90^\circ - \alpha = 2\beta + \alpha - 90^\circ$$

Из треугольника $\sin$ для $\triangle OXC$:

$$\frac{OX}{\sin(\angle OXC)} = \frac{OC}{\sin(\angle OXC)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{OX}{\sin(2\beta + \alpha - 90^\circ)} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\Rightarrow OX = \frac{R \sin(2\beta + \alpha - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$AO = R$$

$$AX = OX + AO = OX + R$$

$$AP \cdot AB = AO \cdot AX \quad \left(\begin{array}{l} \text{умножено на } \vec{v}_1 \\ \text{отмечено } \vec{v}_2 \end{array} \right)$$

$$AB = AP + BP = 24$$

$$\Rightarrow 16 \cdot 24 = R \cdot (R + OX) = R \left(R + R \frac{\sin(2\beta + \alpha - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)} \right) =$$
$$= R^2 \left(1 + \frac{\sin(2\beta + \alpha - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)} \right) = 24 \cdot 16$$

Из т. синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{AC}{2R} = \frac{11}{2R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{11^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - 11^2}}{R} \end{array} \right\}$$

$$\sin(2\beta + \alpha - 90^\circ) = -\cos(2\beta + \alpha)$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow R^2 \left(1 + \frac{\sin(2\beta + \alpha - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)} \right) = R^2 \left(\frac{\cos \alpha + (-\cos(2\beta + \alpha))}{\cos \alpha} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~11~~ $\Rightarrow R^2 \left(\frac{\cos \alpha + \cos(2\beta + \alpha)(-1)}{\cos \alpha} \right) =$

$$= R^2 \left(\frac{\cos \alpha + \cos(2\beta + \alpha)}{\cos \alpha} \right) = 24 \cdot 16$$

$$\cos(2\beta + \alpha) = \cos 2\beta \cdot \cos \alpha - \sin 2\beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2 \beta = 1 - 2 \cdot \frac{11^2}{R^2}$$

$$\sin(2\beta) = 2\sin \beta \cos \beta = 2 \cdot \frac{11}{R} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 121}}{R}$$

$$\Rightarrow R^2 \left(1 - \frac{\cos(2\beta + \alpha)}{\cos \alpha} \right) = R^2 \left(1 - \frac{\cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 121}{R^2} \right)}{\cos \alpha} \right)$$

$$+ \frac{2 \cdot \frac{11}{R} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 121}}{R} \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = R^2 - R^2 \left(1 - \frac{2 \cdot 121}{R^2} \right) +$$

$$+ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{22 \sqrt{R^2 - 121}}{R^2} \cdot R^2 = 2 \cdot 121 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot 22 \sqrt{R^2 - 121}$$

$$= 16 \cdot 24 \quad \Rightarrow 242 + \operatorname{tg} \alpha \cdot 22 \sqrt{R^2 - 121} = 384$$

$$16 \cdot 24 = 240 + 24 \cdot 6 = 384 \quad \Rightarrow 142 = 22 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{R^2 - 121} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{R^2 - 121} \right)^2 = \left(\frac{71}{11} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot (R^2 - 121) = \frac{71^2}{11^2}$$

$$\frac{AB}{\sin \angle(ACB)} = 2R \quad \left(\text{из т. синусов для } \triangle ABC \right)$$

$$\begin{aligned} \angle ACB &= 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 121}}{R} + \frac{11}{R} \cos \alpha = \frac{12}{R} \quad | \cdot R$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \sqrt{R^2 - 121} + 11 \cos \alpha = 12 \quad (2)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sqrt{R^2 - 121} = \frac{71}{11} \quad \text{из (1)}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \sqrt{R^2 - 121} = \frac{71}{11} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{71}{11} \cos \alpha + 11 \cos \alpha = 12$$



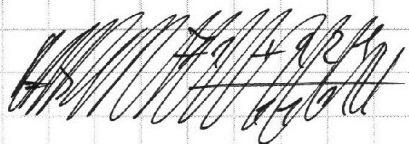
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \frac{21+121}{11} \cos \alpha = 12$$

$$\Rightarrow \frac{16}{11} \cos \alpha = 12 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

(п.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, то $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$)

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{11^2}{16^2}} = \sqrt{\frac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \frac{\sqrt{22 \cdot 5}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin(\angle BAC) =$$

$$= \frac{24 \cdot 28}{2} \sin \alpha = 11 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} =$$

$$= \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

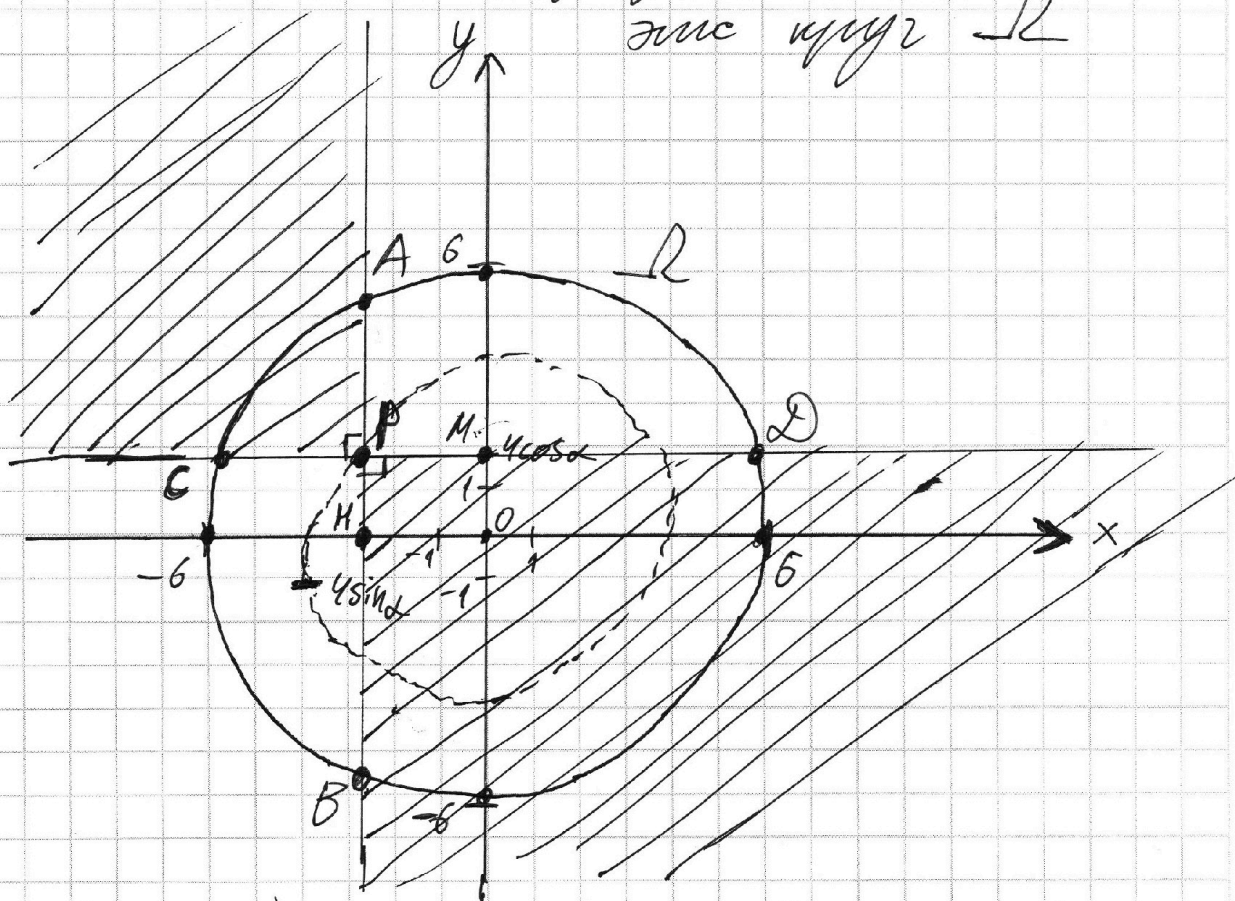
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$x^2+y^2 \leq 36$ — круг с центром в $(0;0)$
и радиусом 6, пусть
этот круг R



$$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4\cos\alpha; x \leq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha; x \geq -4\sin\alpha \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Эта задача образует фигуру,~~
заштрихованную на графике.

P — точка пересечения прямых

$$x = -4 \sin \alpha \text{ и } y = 4 \cos \alpha$$

$Q(\alpha)$ — пересечение круга Ω с заштрихованной областью.
Заметим, что периметр фигуры

$$Q(\alpha) \text{ равен } AP + PB + PC + PD + l(AC) + l(BD)$$

$l(AC)$ и $l(BD)$ — длины меньших
дуг $\widehat{AC}$ и $\widehat{BD}$ соответственно.

$$\angle APC = 90^\circ = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{рассматриваем} \\ \text{меньшие} \\ \text{дуги} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow l(AC) + l(BD) = \frac{2\pi R}{2} = \pi R, \quad R=6$$

$$\Rightarrow l(AC) + l(BD) = 6\pi$$

~~$P_{Q(\alpha)}$~~ — периметр $Q(\alpha)$

$$P_{Q(\alpha)} = AP + PB + PD + PC + 6\pi = AB + CD + 6\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(\alpha) = AB + CD + 6\pi$$

Точка $P \in W$, W — окружность
с центром $(0, 0)$ и радиусом 4,

$$\text{т.е. } (4\cos\alpha)^2 + (4(-\sin\alpha))^2 = 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16,$$

а P имеет координаты $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$

Значит, нам нужно минимизировать

$AB + CD$ для точки $P \in W$.

$$R = 6, r = 4 \quad \text{dist}^2(P, O) = 16, R^2 = 36$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = 36 - 16 = 20 = R^2 - r^2 = R^2 - \text{dist}^2(P, O)$$

(имеет место теорема о произведении отрезков хорд,
если точка P находится внутри окружности, является точкой пересечения хорд)

$$\text{Дока} \quad -PA \cdot PB = -PC \cdot PD = \text{dist}^2(P, O) - R^2 = -20$$

$$\Rightarrow PB = \frac{20}{PA}, \quad PD = \frac{20}{PC} \quad \left(\begin{array}{l} AB = 2\sqrt{11} \\ CD = 2\sqrt{11} \end{array} \right)$$

$$\text{Дока} \quad AB + CD = \frac{20}{PA} + PA + \frac{20}{PC} + PC$$

$$CD^2 = 4(R^2 - (4\cos\alpha)^2) = 4(R^2 - 16\cos^2\alpha)$$

(из т. Пифагора для $\triangle OCM$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 = 4(R^2 - (-4\sin\alpha)^2) = 4(R^2 - 16\sin^2\alpha)$$

(из т. Пифагора для $\triangle OAB$)

$$AB = \sqrt{4(R^2 - 16\sin^2\alpha)} = \sqrt{4(36 - 16\sin^2\alpha)}$$

($AB > 0$)

$$CD = 4(R^2 - 16\cos^2\alpha) \Rightarrow CD = \sqrt{4(36 - 16\cos^2\alpha)}$$

($CD > 0$)

$$AB = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

$$CD = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$AB + CD = 2\left(\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}\right)$$

($36 - 16\sin^2\alpha > 0$, $36 - 16\cos^2\alpha > 0$)

$$\frac{AB + CD}{2} \leq \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}}$$

(из неравенства Коши)

$$\Rightarrow AB + CD \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{AB^2 + CD^2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 \cdot (36 - 16\sin^2\alpha) + 4(36 - 16\cos^2\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{72 - 16} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{56} = 2 \cdot 2\sqrt{28} =$$

$$= 8\sqrt{7}$$

($16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha = 16$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_{\varphi}(\alpha) = AB + CD + 6\pi \leq 8\sqrt{7} + 6\pi$$

$$M = P_{\varphi}(\alpha) = AB + CD + 6\pi \leq 8\sqrt{7} + 6\pi$$

Так как мы хотим максимизировать, тогда

$$AB = CD \Rightarrow \left(2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}\right)^2 = \left(2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 16\sin^2\alpha = 16\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\alpha \\ \sin\alpha = -\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\pi k - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, что
все эти решения
подходят, так как
как $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

Ответ: $8\sqrt{7} + 6\pi$;

$$\begin{cases} \alpha = 2\pi k - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = CD, \text{ т.к.}$$

$$AB = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

$$CD = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow P_{\varphi}(\alpha) = 8\sqrt{7} + 6\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$O_1 u_i^2 = x^2 \sin^2 (\angle O_1 P A_i) = h^2 - 2hx + x^2 + R^2 - \frac{a^2}{4}$$

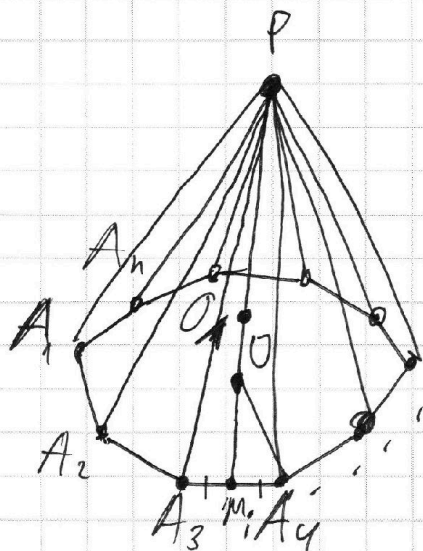


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$A_1A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник.

O — центр $A_1A_2 \dots A_n$.

PO — высота $PA_1A_2 \dots A_n$.

В любую правильную пирамиду можно вписать шар.

Центры обоих шаров лежат на (PO) . Пусть $PO = h$

Пусть центр $\Omega - O_1$, центр $\omega - O_2$.

$\text{dist}(O_1, PA_i) = O_1M_i$; пусть $A_iA_{i+1} = a$

Пусть $OA_i = R$

$U_i = \text{pr}_{(PA_i)}(O_1)$

$O_1H_i = O_1M_i$

Пусть $PO_1 = x$

$O_1H_i = x \sin(\angle O_1PA_i)$

$$O_1M_i^2 = (h-x)^2 + R^2 - \frac{a^2}{4}$$

