

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \text{ Число } A = \overline{aa\alpha a} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a, \quad a \in \mathbb{N}, a < 10$$

$$a < 10, \Rightarrow \text{HOD}(a, 11) = \text{HOD}(a, 101) = 1$$

$11 \text{ и } 101$ вместе в A в первом члене \Rightarrow m.k. $A \cdot B \cdot C$ -квадрат, но B или C или они оба : 11 и B или C или они оба : 101

$$C < 100, \Rightarrow C \neq 101, \Rightarrow B: 101 \quad \left. \begin{array}{l} \text{среди чисел } B \text{ есть } 101, 202, \dots, 909 \\ \text{В промежутке} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{В члене } \overline{B} \text{ есть } 101, 202, \dots, 909$$

среди чисел B есть 1

$$\Rightarrow B = 101, \Rightarrow B / 11, \Rightarrow C : 11 \quad \left. \begin{array}{l} \text{среди чисел } C \text{ есть } 5 \\ \text{и делитель} \end{array} \right\} \Rightarrow C = 55 = 5 \cdot 11$$

\uparrow

$5 \text{ и } 11 \text{ в члене } B / 5, \Rightarrow$

$$\Rightarrow A : 5 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow a = 5, \Rightarrow A = 5555 \\ a < 10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow единственное возможное значение : $(5555, 101, 55)$

$$5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Очевидно: $A = 5555, B = 101, C = 55$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \\ K &= \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \\ \therefore xy = (x-3)(y+3) \end{array} \right| \begin{array}{l} : (x+y+1) \neq 0, \text{ т.к.} \\ x, y > 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$3x - 3y = 9 \quad | :3$$

$$x - y = 3$$

$$x = y + 3 \quad (*)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy, \text{ исходя из } (*) :$$

$$\begin{aligned} M &= (y+3)^3 - y^3 - 3(y+3)y = \\ &= y^3 + 3y^2 + 27y + 27 - y^3 - 3y^2 - 27y = (27) \end{aligned}$$

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \text{ a) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin\left(\pi \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\pi \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cos \pi x$$

$$\cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} \cdot \cancel{\sin\left(\pi \frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) - \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) \right) =$$

$$= \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) \right)$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) \right) = 0$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = 0$$

↑

$$\pi \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi \frac{3x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

↑

$$x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

× ↑

$$x+y = 2n+1-x, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x-2n-1, n \in \mathbb{Z}$$

Все возможные реш. записаны в виде:

$$(x, a, 2n+1-a)$$

Давайте:

$$(b, \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \text{ , где } a \neq b - A \text{ любое } \in \mathbb{R}, a \\ b \neq 0 - A \text{ любое } \in \mathbb{R}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{д) } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \quad \text{адд. упрег. арккос } [0; \pi]$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi, \Leftrightarrow$$

\Rightarrow единс. неиздешеное под перв-ва перегу залечени:

$$\arccos \frac{x}{4} = 0 \quad \arccos \frac{y}{9} = \pi, \Rightarrow x = -4, y = -9$$

не решения

оставшиеся x и y неиздешеные под одн. выражение еди.

решения:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ x \neq -4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \text{ но}$$

и комбинации x и y будут еди. решения

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \\ y \neq -9 \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow y = -8, -7, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9$$

м. е реш: $(-3, -8), (-3, -7), \dots, (4, 9)$

$$\text{вz (a)} \quad 1); \text{ реш: } (a, 2n+1-a) \quad a - \forall \in \mathbb{R}$$

$n - \forall \in \mathbb{Z}$, м. к. вz (d) $a \in \mathbb{Z}, 2n+1-a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2n+1-a \leq 1-a \leq 1+a, \Rightarrow \text{если } x - \text{член}, \text{ то } y - \text{член.}$$

x - член, то y - член

1.1) решен. $x: \overbrace{-2, 0, 2, 4}^4$

решен. $y: \overbrace{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9}^{4 \ 5 \ 9}$

\hookrightarrow Вар. реш: $4 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}$

1.2) решен. $x: \overbrace{-3, -1, 1, 3}^{4}$

реш. $y: \overbrace{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8}^9$

\hookrightarrow Вар. реш: $4 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}$

72 реш



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2) реш: $(b, 3b-2k-1)$ $b \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}$, м.к. из (б) $b \in \mathbb{Z}, 3b-2k-1 \in \mathbb{Z}, \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow b \in \frac{3b-1}{2} \wedge \frac{3b-1}{2} \in \mathbb{Z} \wedge b-1 \in \mathbb{Z}, \Rightarrow$ если x -четн., то y -нечет. }
x-нечн., не y -четн. } \Rightarrow

\Leftrightarrow все решения совп. н. (1), \Leftrightarrow всего пар $(x, y), x, y \in \mathbb{Z}$,
удовл. для данного ур-ия и перв-ых 372 итераций

Решен: 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть P_1 -вер-ть, что Π и \mathcal{B} находят на первых при 4

быв. биномии, пусть всего 11 максимов x , тогда

$$P_1 = \frac{\binom{x^2}{x-2}}{\binom{4}{x}} = \frac{(x-2)! (x-4)! \cdot 4!}{2! (x-4)! \cdot x! (x-1)!} = \frac{12}{x(x-1)}$$

ко-во
мес. вид +
из ставших
найд Π и \mathcal{B}
всего 11 макс.
из которых
выделено и бывш.,
всего

пусть в начале мес. на первых быв.

выделено и бывш.,

пусть P_2 -вер-ть, что Π и \mathcal{B} находят на перв.

в первых максимах, тогда аналог P_1 , найдем P_2 :

$$P_2 = \frac{\binom{n-2}{x-2}}{\binom{n}{x}} = \frac{(x-2)! (x-n)! n!}{(x-n)! (n-2)! \cdot x!} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$$

$$\text{из упр: } 3,5 P_1 \approx P_2, \text{ т.е. } \frac{42}{x(x-1)} = \frac{n(n-1)}{(x-1)x} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot x(x-1) \neq 0, \text{ т.к. } \\ x > 1 \end{array} \right. \quad n$$

$$42 \leq n(n-1), \Rightarrow \underline{\underline{n = 7}}$$

Ответ: 7

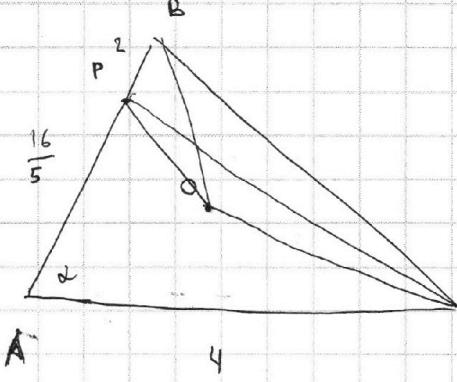


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



Dано: четырехугольник $\square ABCP$, O -центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, описана окружность $\odot BOC \cap AB = P$

$$AP = \frac{16}{5}, \quad BP = 2, \quad AC = 4$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение: $\angle BOC = 2\angle A = 2d$

$\angle BOC = 2\angle A$ вписанный и центральный

$\angle BOC = 2\angle BCA$ - центральный и центральный

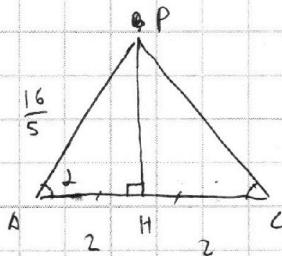
$$\Rightarrow \angle BOC = 2d$$

В $\triangle BPC$ $\angle BPC = 2\angle BCA$, т.к. вписанный, центральный

$$\angle BPC = \angle A + \angle PCA$$
 (так как $\angle BPC$ внешний угла $\triangle APC$)

$$\angle A = d$$

$$\Rightarrow \angle PCA = 2d - d = d = \angle A, \Rightarrow \triangle APC \text{ вписаный}, \Rightarrow PC = AP = \frac{16}{5}, \text{ рассмотрим } \triangle ABC:$$



последовательно $PH \perp AC$, т.к. $\triangle APC$ вписаный, $\Rightarrow PH$ вписанный в $\odot BOC$ и мег., \Rightarrow

$$\Rightarrow AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$$

$$AP = \frac{16}{5}$$

\Rightarrow по м.Пифагора:

$$PH^2 = 25 + \frac{256}{25} - 4 = \frac{156}{25}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PH = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2\sqrt{39}}{5}, \Rightarrow \sin d = \frac{PH}{AP} = \frac{\sqrt{39} \cdot 5}{8 \cdot 16} = \frac{\sqrt{39}}{16}$$

$$AP = AP + PB = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$S_{\triangle ABC} =$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin d = \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{2 \cdot 5 \cdot 8} =$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \quad \left. \begin{array}{l} 2)(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) > 0 \\ 1) x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right\}$$

изображение $\Phi(\alpha)$ не паралл. линии:

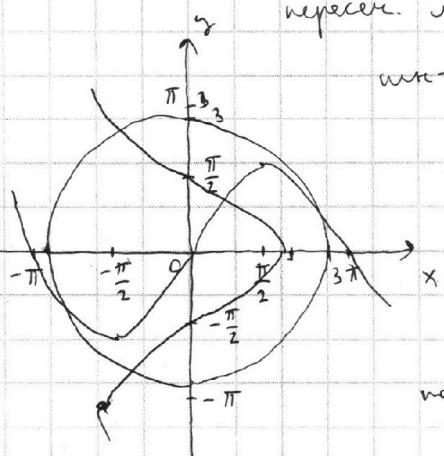
1) все точки внутри окр. с радиусом 3 и центром в $(0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \left. \begin{array}{l} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

внешн. xOy полукруж. $y = 2 \sin x$
внешн. xOy полукруж. $y = 2 \cos x$

тогда при каждом α $\Phi(\alpha)$ будет

пересеч. лин-ких окр-ий и
ли-ках окр. уг. симметрий:



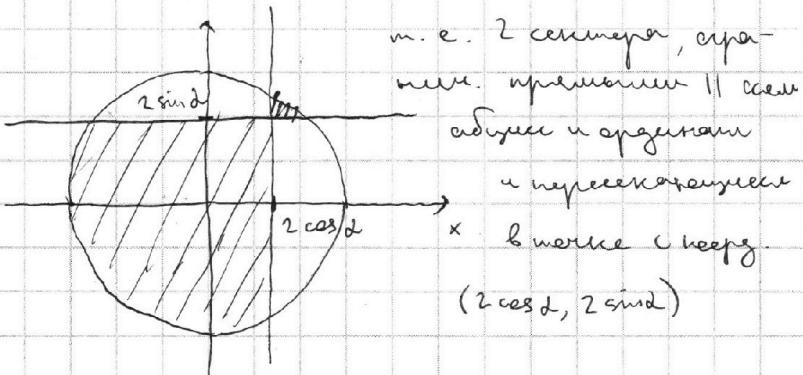
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \cos y \\ y \geq 2 \sin x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2 \cos y \\ y \leq 2 \sin x \end{array} \right\}$$

нужна $\Phi(\alpha)$ имеет вид:
(заштрих.)

нужна M-сущая лин.
огранич. жирн. и
длин. дуг, начерченные
этим засором огранич.

(о б I и III четверти)



и. е. 2 симметрии, сим-
метрии. приведение II чет-
верти и ординатам
и пересекающимися
в точке с коорд.
(2 cos alpha, 2 sin alpha)

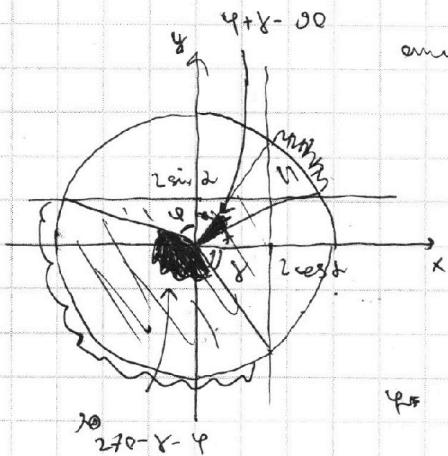


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

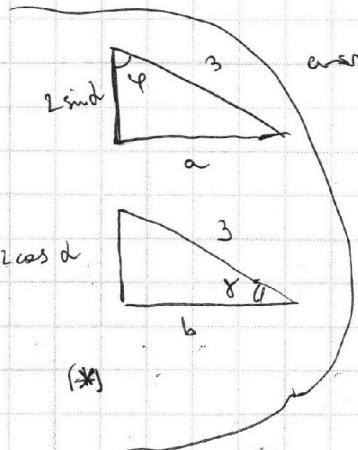
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



отличия $\angle \varphi$ и $\angle \gamma$

$$\text{ногда } M = 2 \cdot 3 \sin \varphi + 2 \cdot 3 \cdot \sin \gamma + \\ + 6\pi \left(\frac{270 - \alpha - \gamma + \varphi + \gamma - 90}{360} \right) = \\ = 6(\sin \varphi + \sin \gamma) + 3\pi =$$

$$\frac{\varphi + \gamma}{\sin (\varphi + \gamma)} = \frac{a + b}{1 \cdot \sin (\varphi + \gamma)}$$



$$= \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + 3\pi$$

или M_{\max} при

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma$$

M_{\max} при

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \gamma)_{\min} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } \cos^2 \alpha$$

или

$$M_{\max} = 2\sqrt{9 - 2\pi^2}$$

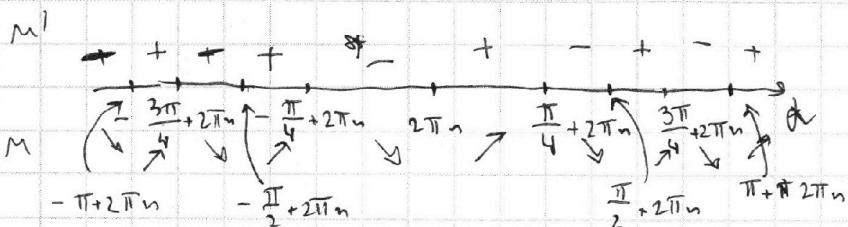
$$= 2\sqrt{7} + 3\pi$$

решение:

$$d_{\max} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$n \in \mathbb{Z}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 & 2 \sin \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x \\
 & \cos(x+y) + \cos(x-y) = \\
 & = \cos x \cos y + \cancel{\sin x \sin y} + \cos x \cos y + \cancel{\sin x \sin y} \\
 & 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x) + \cos(y) \\
 & 1) \cos\pi \frac{x+y}{2} \neq 0 \\
 & \frac{x+y}{2} \neq 0 \\
 & 2 \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x \\
 & \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) = -\cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = 0 \\
 & \cos\left(\frac{3x-y}{2}\right) < 0 \\
 & \pi \cdot 3^9 \\
 & \frac{3x-y}{2} = \pi \frac{1}{2} + \pi n \\
 & 3x = \pi + y + \pi n \\
 & \cos \pi \frac{x+y}{2} = \cos \pi \frac{3x-y}{2} \\
 & \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0 \\
 & x \neq \frac{\pi}{2} + \\
 & \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \\
 & \cos(\alpha + \beta) < 1 \\
 & \frac{xy}{36} - \frac{\sqrt{(81-y^2)(16-x^2)}}{36} < 1 \\
 & \frac{x}{4} = 1 \\
 & \frac{y}{9} = 1 \quad -9, -4 \text{ т.e. неуд} \\
 & -1, -2, -3, -4, 1, 2, 3, 4 \\
 & x = -1, -2, \dots, -4, 1, 2, \dots, 9 \\
 & y = -1, -2, \dots, -3, 1, 2, 3
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1111 | 11
101 |

A · B · C - **изоцентрический**

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = \overline{1bc} \text{ или } \overline{b1c} \text{ или } \overline{b11}$$

$$C = \overline{55} \text{ или } \overline{5\delta}$$

11

$$10d + 5$$

$$1) (a, 11) = (a, 101) = 1$$

$$\nearrow \quad \downarrow$$

$$B : 101, \Rightarrow B = 101$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow C : 11, \Rightarrow C = 55, \Rightarrow a = 5$$

$$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$$

2) $\tan(\frac{\pi}{4}, 101)$

$$2. x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - xy^2 - ?$$

и

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{aligned} & (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ & = a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - ac^2 - abc + ab^2 + ac^2 + \\ & + b^2c + bc^2 - ab^2 - abc - b^2c + \\ & + c^2a + cb^2 - abc - ac^2 - bc^2 \end{aligned}$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) \sim xy$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$3y^2 - 3y = 9$$

$$x = y^3$$

$$M + 27 = \frac{x^3 + y^3}{xy} - xy = (x^2 + y^2 + 9 + 3x - 3y + xy)(x - y - 3)$$

$$x(y+3)y - 9 + (x+3)(y-3) \Leftrightarrow (x-3)(y+3)$$

y^3

$$y^3 + 9y^2 + 27y - y^3 - 9xy^2 - 27y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$x \geq 3$$

$$xy - 36 < \sqrt{(81 - y^2)(16 - x^2)}$$

$$x^2y^2 - 72xy + 36^2 < 81\sqrt{16 + x^2 - 16y^2 - 16x^2}$$

$$81x^2 + 16y^2 - 72xy < 0$$

$$x+y$$

$$(2x+4y)^2 < 0$$

$$-16 \leq x \leq 16$$

$$-81 \leq y \leq 81$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$k+4$$

$$n = n_{k+2}$$

$$\times 3.4$$

$$P_1 = \frac{\binom{x}{x-2}}{\binom{x}{x}} = \frac{4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-2)!} = \frac{3!}{(x-3)(x-2)}$$

$$x-1 \approx 12 + \text{нер.}$$

~~нер.~~
~~нер.~~

$$\rightarrow 2$$

$$-2$$

$$\frac{21}{42} = \frac{10}{42} \cancel{20}$$

$$\cancel{(x-3)(x-2)} \quad \cancel{(x-4)(x-3)}$$

$$10x - 20 = 21x - 48$$

$$11x = -40$$

$$64$$

$$\frac{7}{2}$$

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{(k+1)(k+2)}{(x-k-1)(x-k)}$$

$$n > 4$$

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{n(n-1)k}{(x-n+1)(x-n+2)}$$

$$\begin{matrix} \wedge & \wedge \\ (x-3) & (x-2) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \wedge \\ (x-3)(x-2) \end{matrix}, \Rightarrow n(n-1) < 42, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n < 7$$

$$n = 5, 6,$$

$$\frac{\binom{x}{x-2}}{\binom{n}{x}} = \frac{n(n-1)}{(n-2)!(x-n+2)!}$$

$$(x-n+1)(x-n+2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{30}{(x-4)(x-5)}$$

$$21(x-4)(x-5) = 10(x-3)(x-2)$$

$$11x^2$$

$$\underline{21x^2 - 9x - 20}$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ 139 \\ \hline 1251 \\ 417 \\ \hline 139 \\ \hline 18321 \\ 19 \\ \hline 3481 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ 44 \\ \hline 1440 \\ \hline 15840 \end{array}$$

$$21x^2 - 189x + 420 = 10x^2 + 60 - 50x$$

$$11x^2 - 139x + 360 = 0$$

$$\begin{array}{r} 19321 \\ - 15840 \\ \hline 3481 \end{array}$$

$$\frac{139 \pm 59}{22} < \frac{80}{22}; \quad \frac{198}{22} < 9$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 59 \\ \hline 531 \\ 295 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq 2 \cos 2$$

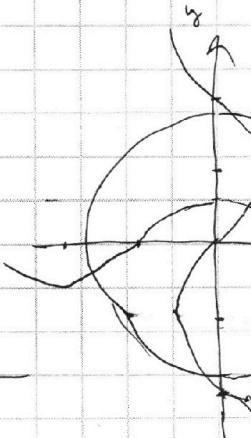
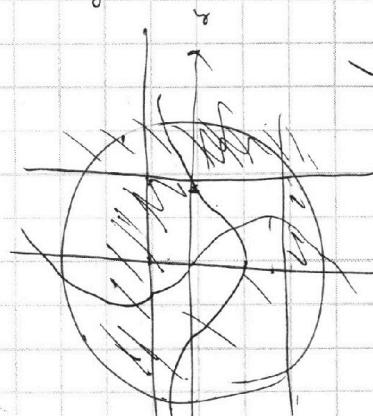
$$y \geq 2 \sin 2$$

$$(x - 2 \cos 2)(y - 2 \sin 2) \geq 0$$

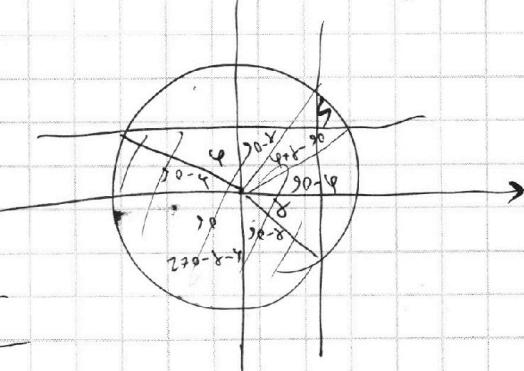
$$2 \cos 2 = 2 \sin 2$$

$$y = 2 \cos 2 \sin 2 x$$

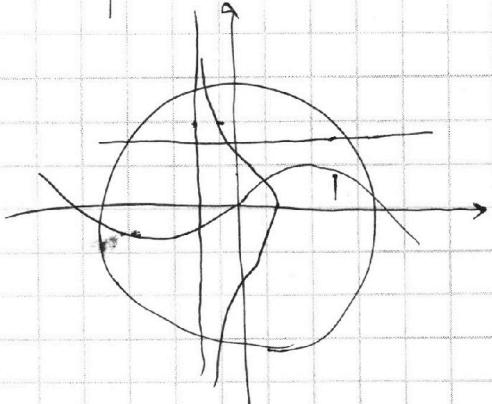
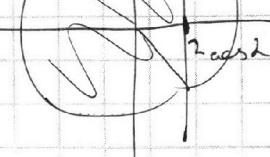
$$x = 2 \cos 2 y$$



$$\begin{aligned} & \text{cos } 2 \\ & \frac{2 \sin 2}{3} \\ & \gamma = \frac{2 \cos 2}{3} \end{aligned}$$



$$6\gamma + 6\gamma$$



$$\begin{aligned} & 2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 2} \\ & + \sqrt{9 - 4 \cos^2 2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



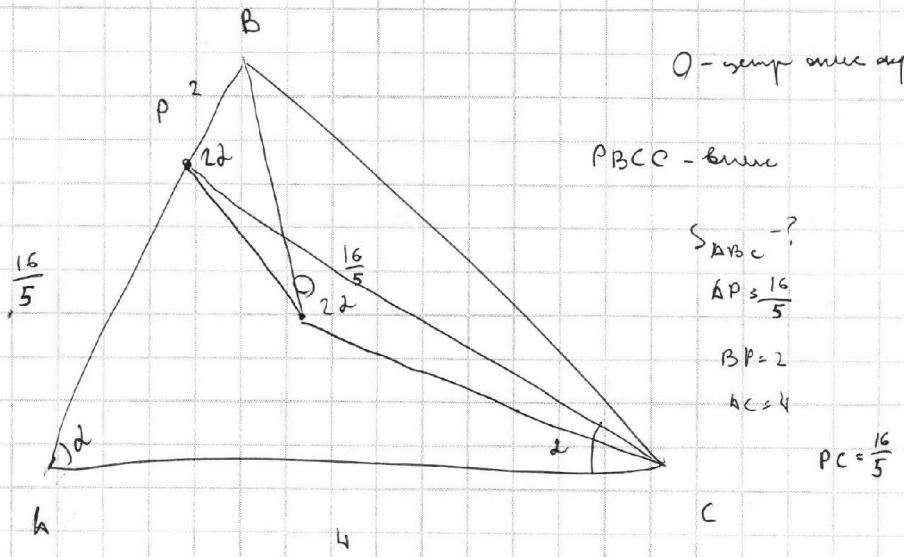
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

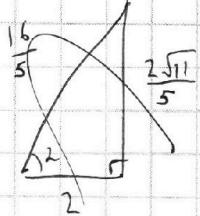
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \cancel{4!} \frac{(x-4)!}{(x-2)!} \cancel{x!} = x \\ & \cancel{2!} \frac{(x-2)!}{(x-4)!} \cancel{(x-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{2!} \frac{(x-2)!}{\cancel{x!}} \frac{(x-4)!}{\cancel{(x-4)!}} \cancel{4!} \cdot 12 \\ & \cancel{x!} \cancel{(x-4)!} \cdot \cancel{2!} \\ & (x-1)(x-2) \end{aligned}$$



$$\frac{16}{5} - 4 = \frac{16}{25}$$



$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{4}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{4} \\ \cos A &= \frac{2\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$