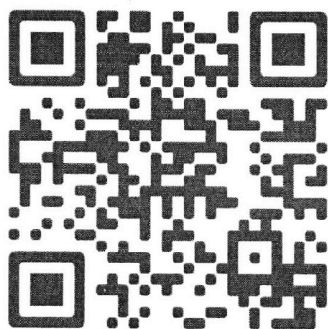




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. пусть $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}$, $a < 10$

$$a < 10, \Rightarrow \text{НОД}(a, 11) = \text{НОД}(a, 101) = 1$$

и

11 и 101 входят в A в первой степени $\Rightarrow$ т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат, то B или C имеют эти оба : 11 и B или C имеют эти оба : 101

$$C < 100, \Rightarrow C \neq 101, \Rightarrow B : 101$$

B простое

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow B \text{ может быть } 101, 202, \dots, 202, \\ \Rightarrow \end{array} \right\}$$

средн. цифр B есть 1

$$\Rightarrow \underline{B = 101}, \Rightarrow B \neq 11, \Rightarrow C : 11$$

средн. цифр C есть 5
 C простое

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow C = 55 = 5 \cdot 11 \\ \uparrow \\ 5 \text{ в 1й степени, } B \neq 5, \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow A : 5 \left. \begin{array}{l} \Rightarrow a = 5, \Rightarrow A = 5555, \Rightarrow \\ a < 10 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ единственное возм. трюплет : $(5555; 101, 55)$

$$5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Ответ: $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \\ K &= \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \left| \begin{array}{l} : (x+y+1) \neq 0, \text{ т.к.} \\ x, y > 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

↓

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$3x - 3y = 9 \quad | :3$$

$$x - y = 3$$

$$\underline{x = y + 3} \quad (*)$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy, \text{ подставим } (*):$$

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = \boxed{27}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad a) \quad (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Downarrow$$

$$2 \sin\left(\pi \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\pi \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cos \pi x$$

$$\cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} \cdot \cancel{\sin\left(\pi \frac{x-y}{2}\right)} \quad \Downarrow$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) - \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right)\right)$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right)\right) = 0 \quad | :2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi \frac{3x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\times \quad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x+y = 2n+1-x, n \in \mathbb{Z} \\ y = 3x-2k-1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Downarrow$ все возм. реш. имеют вид:

$$(a, 2n+1-a)$$

Или:

$$(b, 3b-2k-1), \text{ где } a, b - \forall \text{ числа } \in \mathbb{R}, a$$

$$k \text{ и } n - \forall \text{ числа } \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) б) $\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{9} < 2\pi$ обл. знач. $\arcsin \in [0; \pi]$

$$0 \leq \arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{9} \leq 2\pi, \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ эквив. неравенствам под пер-ва пары значений:

$$\arcsin \frac{x}{4} = \arcsin \frac{y}{9} = \pi, \Rightarrow x = -4, y = -9$$

не решение

остальные x и y удовлетворяют под обл. определение экв.

решением:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ x \neq -4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$\forall$ комбинация x и y будет экв. решением

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \\ y \neq -9 \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow y = -8, -7, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9$$

т.е. реш: $(-3, -8), (-3, -7), \dots, (4, 9)$

из а) 1), реш: $(a, 2n+1-a)$ $a - \forall \in \mathbb{R}$
 $n - \forall \in \mathbb{Z}$, т.к. из б) $a \in \mathbb{Z}, 2n+1-a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2n+1-a}{2} \leq \frac{1-a}{2} \leq \frac{1+a}{2}$, $\Rightarrow$ если x - четное, то y - нечет.
 x - нечет, то y - четное

1.1) четное x : $-2, 0, 2, 4$
 нечет y : $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$
 $\Rightarrow$ вар. реш: $4 \cdot 9 = 36$

1.2) нечет x : $-3, -1, 1, 3$
 чет y : $-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$
 $\Rightarrow$ вар. реш: $4 \cdot 9 = 36$

72 реш



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть P_1 -вер-ть, что П и В неаудит на кенгури при 4

выз. билетом, пусть всего 11 классиков x , тогда

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot 4!}{2! \cdot (x-4)! \cdot x! \cdot (x-1)x} = \frac{12}{x(x-1)}$$

кол-во
мес. вызв

кол-во мес.
вызв $\forall 4x$
11 классиков

2х 11 класс.
из оставшихся,
кажд П и В уже обяз.
вызваны

пусть в кенгуе мес. на кенгури 2х
вызвано П и билетом,

пусть P_2 -вер-ть, что П и В неаудит на кенгу.
в кенгуе мессежа, тогда аналог P_1 кенгуем P_2 :

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{(x-2)! \cdot (x-n)! \cdot n!}{(x-n)! \cdot (n-2)! \cdot x!} = \frac{n(n-1)}{x \cdot x(x-1)}$$

из упр: $3,5 P_1 \leq P_2$, т.е. $\frac{42}{x(x-1)} \leq \frac{n(n-1)}{(x-1)x} \mid \cdot x(x-1) \neq 0$ ж.к. $n.н.$
 $x > 1$

$$42 \leq n(n-1), \Rightarrow \underline{n=7}$$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

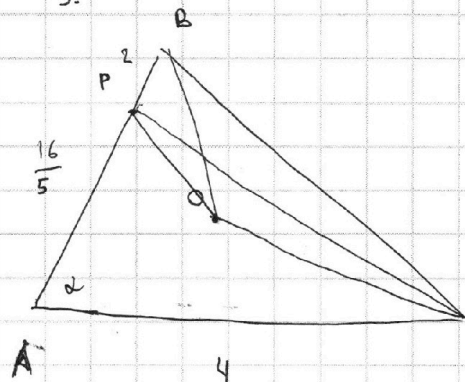
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



Дано: треугольник $\triangle ABC$, O - центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, описанной окружности $\triangle BOC \cap AB = P$
 $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$

Найти: S_{ABC}

Решение: в ω_1 $\angle A$ центр $\angle A = \alpha$

в ω_1 $\angle A$ центр и описанная окружность на BC
 в ω_2 $\angle BOC$ - центр. у. и описанная окружность на BC

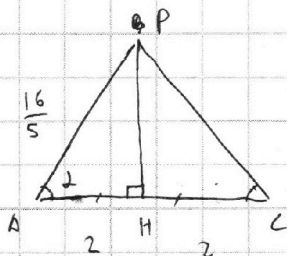
$$\Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$$

в ω_2 $\angle BPC = \angle BOC$, т.к. внешние углы, описанная окружность на BC

$$\angle BPC = \angle A + \angle PCA \text{ (т.к. } \angle BPC \text{ внешний угол } \triangle APC)$$

$$\angle A = \alpha$$

$\Rightarrow \angle PCA = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle A$, $\Rightarrow \triangle APC$ равнобедренный, $\Rightarrow PC = AP = \frac{16}{5}$, рассмотрим этот $\triangle$:



проведем $PH \perp AC$, т.к. $\triangle APC$ равнобедренный, $\Rightarrow PH$ и высота и медиана, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$$

$$AP = \frac{16}{5}$$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$$PH^2 = AP^2 - AH^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2 = \frac{256}{25} - 4 = \frac{156}{25}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PH = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2\sqrt{39}}{5}, \Rightarrow \sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{2\sqrt{39} \cdot 5}{5 \cdot \frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$AP = AP + PB = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$S_{ABC} =$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

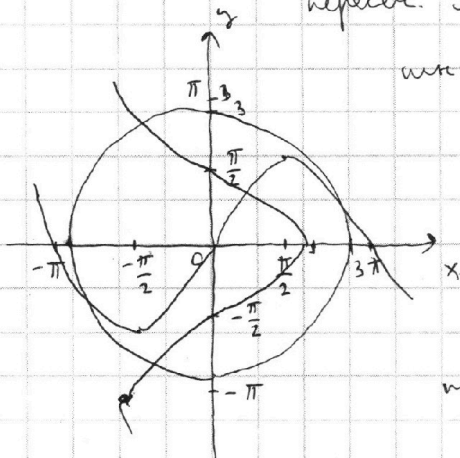
$$\left. \begin{array}{l} 2) (x - 2 \cos 2)(y - 2 \sin 2) \geq 0 \\ 1) x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right\}$$

изобразим $\varphi(\alpha)$ на коорд. м-м:

1) + все точки лежат на кр-е с радиусом 3 и центром в $(0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \left. \begin{array}{l} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \end{array} \right\} \right. \\ \left. \begin{array}{l} x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{в коорд. } XOY \text{ накрываем } 2 \sin x \\ \text{в коорд. } XOY \text{ накрываем } 2 \cos x \end{array}$$

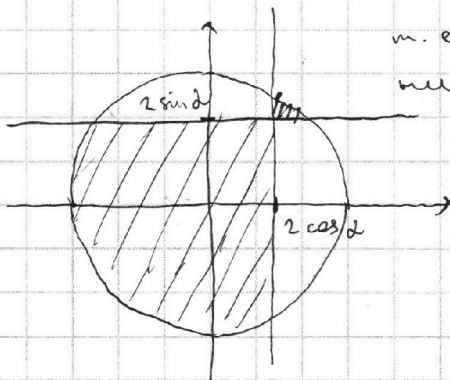
тогда при каждом α $\varphi(\alpha)$ будет пересек. м-ва точек кр-м, и м-ва точек уг. секторов: систем.



$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \cos y \\ y \geq 2 \sin x \\ x \leq 2 \cos y \\ y \leq 2 \sin x \end{array} \right\}$$

тогда $\varphi(\alpha)$ имеет вид: (замкнуток),

тогда M - сумма длин огранич. кр-а и дуг дуг, накрытых этим кр-ом огранич. (в I и III четвертях)



т. е. 2 сектора, огранич. прямыми и дугами и пересечениями в точке с коорд. $(2 \cos 2, 2 \sin 2)$

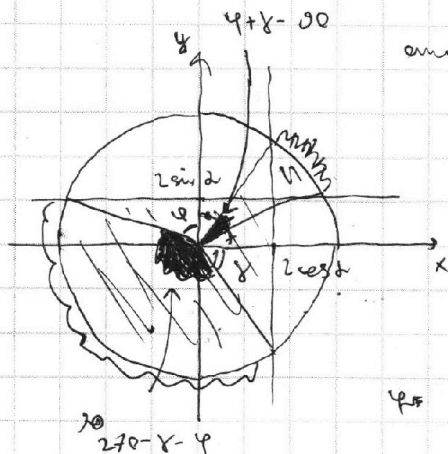


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

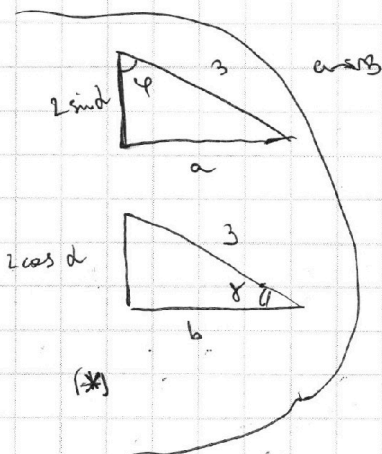


отметили $\angle \varphi$ и $\angle \gamma$

$$\text{нога } M = 2 \cdot 3 \sin \varphi + 2 \cdot 3 \cdot \sin \gamma + \\ + 6\pi \left(\frac{270 - \gamma - \varphi + \varphi + \gamma - 90}{360} \right) =$$

$$= 6(\sin \varphi + \sin \gamma) + 3\pi =$$

$$\varphi \text{ или } \sin \varphi = a + b + 3\pi \text{ или } (a+b)$$

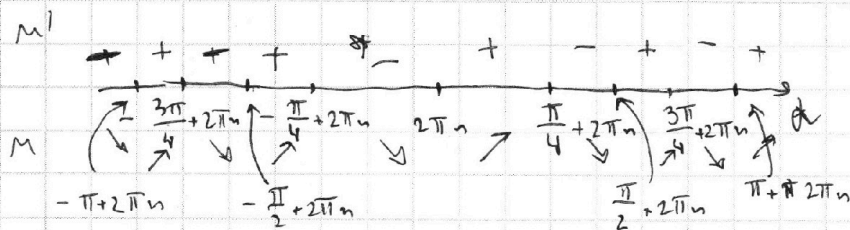


$$= \sqrt{9 - 4 \sin^2 d} + \sqrt{9 - 4 \cos^2 d} + 3\pi$$

$$\begin{aligned} & \text{or } M_{\text{max}} \text{ или } \sin^2 d + \sin^2 d \\ & M_{\text{max}} \text{ или } (\cos^2 d + \sin^2 d)_{\text{min}} = 1 \\ & \Rightarrow \text{или } \cos^2 d \end{aligned}$$

$$M' = \frac{-4 \sin d \cos d}{2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 d}} + \frac{4 \sin d \cos d}{2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 d}} =$$

$$= -4 \sin d \cos d \left(\frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 d} - \sqrt{9 - 4 \sin^2 d}}{(9 - 4 \cos^2 d)(9 - 4 \sin^2 d)} \right)$$



$$M_{\text{max}} = 2\sqrt{9 - 2\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\begin{aligned} & \text{Answer:} \\ & d_{\text{max}} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \\ & \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

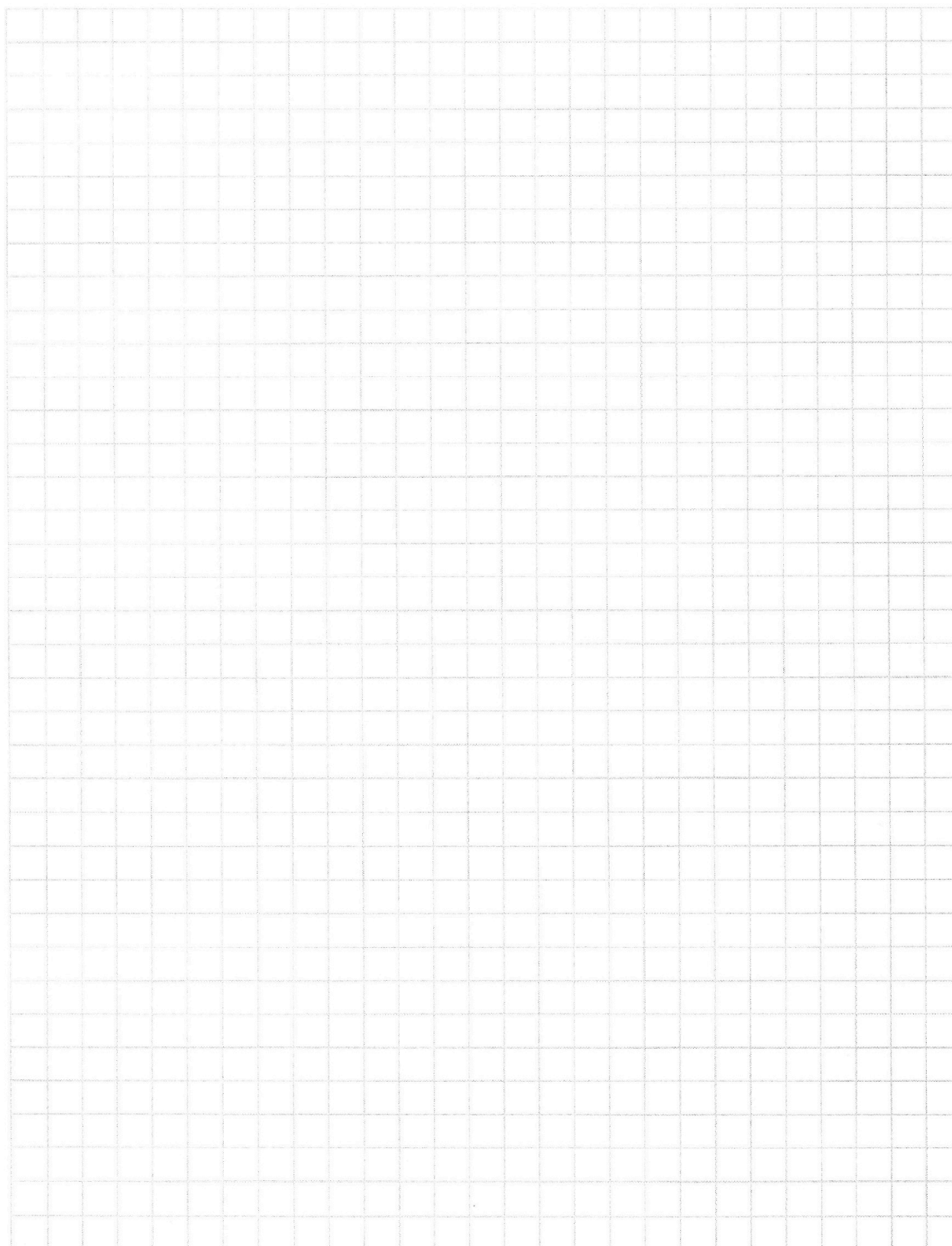


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) =$$

$$= \cos x \cos y + \cancel{\sin x \sin y} + \cos x \cos y + \cancel{\sin x \sin y}$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x) + \cos(y)$$

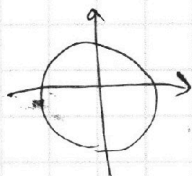
$$1) \cos \pi \frac{x+y}{2} \neq 0$$

$$\frac{x+y}{2} \neq 0$$

$$2 \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x$$

$$\cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} - \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) = \cancel{\cos\left(\pi \frac{x+y}{2}\right)} + \cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) \neq 0$$

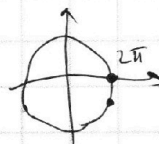
$$\cos\left(\pi \frac{3x-y}{2}\right) < 0$$



4.39

$$\frac{3x-y}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$3x = \pi + y + \pi n$$



$$\cos \pi \frac{x+y}{2} = \cos \pi \frac{3x-y}{2}$$

cos

$$2 \sin x \cos \sin \frac{x-y}{2} = 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} +$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\cos(\alpha + \beta) < 1$$

$$\frac{xy}{36} - \frac{\sqrt{(81-y^2)(16-x^2)}}{36} < 1$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{4}$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\cos \beta = \frac{y}{9}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{81-y^2}}{9}$$

$$\frac{x}{4} = 1$$

$$\frac{y}{9} = 1$$

-9, -4 не верны

$$-1; -2; -3; \cancel{-4}; 1; 2; 3$$

$$x = -1; -2; -3; 1; 2; 3, 4$$

$$y = -1; -2; \dots; -8, 1, 2, \dots, 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r|l} 1111 & 11 \\ 101 & \end{array}$$

$A \cdot B \cdot C$ - псевдограм

$$A = \overline{a a a a} = 1111 \cdot a = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = \overline{1 b c} \text{ или } \overline{b 1 c} \text{ или } \overline{b 1 c 1}$$

$$C = \overline{d 5} \text{ или } \overline{5 d}$$

$$\begin{array}{c} 11 \\ 10d + 5 \end{array}$$

$$1) (a, 11) = (a, 101) = 1$$

$\downarrow$

$$B: 101, \Rightarrow B = 101$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow C: 11, \Rightarrow C = 55, \Rightarrow a = 5 \end{array} \right\}$$

$$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$$

$$2) \text{ for } (a, 101)$$

$$2. x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M \leq x^3 - y^3 - 9xy - 27$$

"

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$3y - 3x - 3y = 9$$

$$x = y+3$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab+ac-bc) =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - abc + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - ab^2 - abc - b^2c + c^2a + c^2b - abc - ac^2 - bc^2$$

$$M + 27 = \frac{x^3 + y^3}{x+y} = x^2 + (y^2) + 27 - 9xy = (x^2 + y^2 + 9 + 3x - 3y + xy)(x-y-3)$$

$$x(y+3) - 9$$

$$9 + (x+3)(y-3) =$$

$$(x-3)(y+3)$$

y^3

$$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9xy^2 - 27y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$xy - 36 < \sqrt{(81 - y^2)(16 - x^2)}$$

$$x^2 - 72xy + 36y^2 < 81 - 16 + x^2 - 16y^2 - 16x^2$$

$$81x^2 + 16y^2 - 72xy < 0$$

$$(2x + 4y)^2 < 0$$

$$-16 \leq x \leq 16$$

$$-81 \leq y \leq 81$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$x - 1 \sim 1 + \text{mem.}$$

$$-2$$

$$\frac{21}{42} = \frac{10}{42} \cdot \frac{20}{20}$$

$$10x - 20 = 21x - 42$$

$$11x = -22$$

$$P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-2)!} = \frac{12}{(x-3)(x-2)}$$

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^k}{C_x^{k+2}} = \frac{(k+2)! \cdot (x-k-2)!}{k! \cdot (x-k)!} = \frac{(k+1)(k+2)}{(x-k-1)(x-k)}$$

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{(k+1)(k+2)}{(x-k-1)(x-k)}$$

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{n(n-1)}{(x-n+1)(x-n+2)}$$

$$\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^{n+2}} = \frac{n(n-1)}{(n-2)! \cdot (x-n+2)!} = \frac{n(n-1)}{(x-n+1)(x-n+2)}$$

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)}$$

$$(x-3)(x-2), \Rightarrow n(n-1) < 42, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \leq 7$$

$$n = 5, 6,$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{42}{(x-3)(x-2)} = \frac{30}{(x-4)(x-5)}$$

$$21(x-4)(x-5) = 10(x-3)(x-2)$$

$$11x^2$$

$$21x^2 - 9x + 20$$

$$21x^2 - 189x + 420 = 10x^2 + 60 - 50x$$

$$11x^2 - 139x + 360 = 0$$

$$\frac{139 \pm 59}{22} = \frac{80}{22}; \frac{198}{22} = 9$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ 139 \\ \hline 1251 \\ 417 \\ \hline 139 \\ 139 \\ \hline 8321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ 44 \\ \hline 1440 \\ 1440 \\ \hline 15840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19321 \\ -15840 \\ \hline 3481 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 59 \\ \hline 531 \\ 295 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

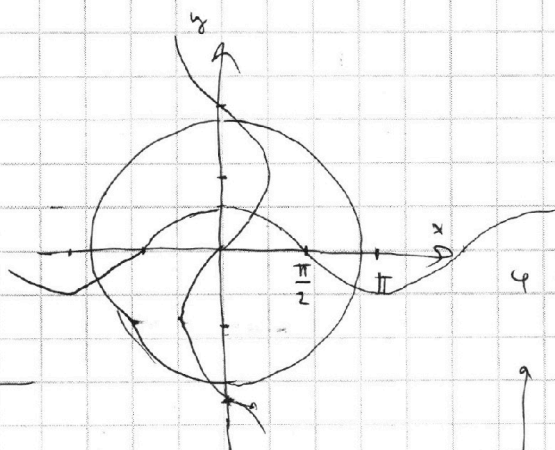
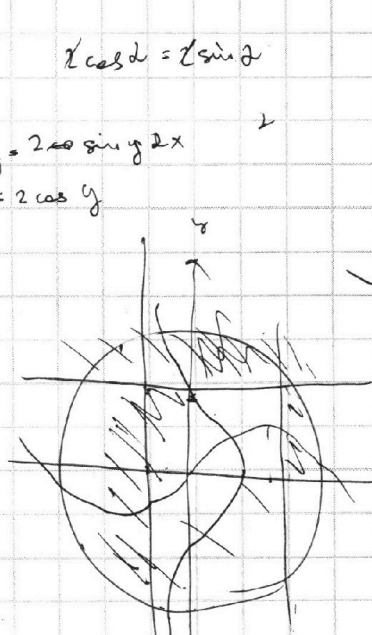
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq 2 \cos \alpha$$
$$y \geq 2 \sin \alpha$$

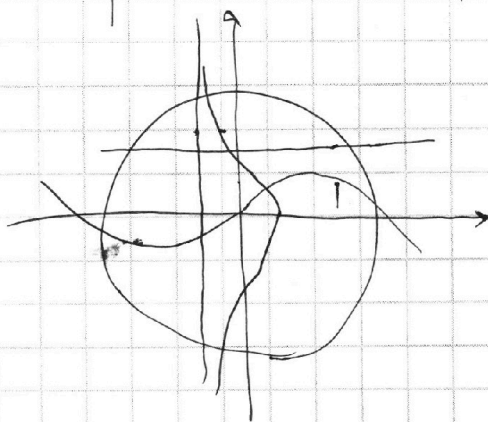
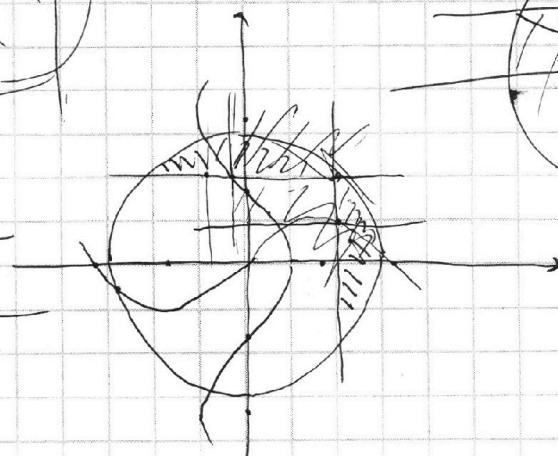
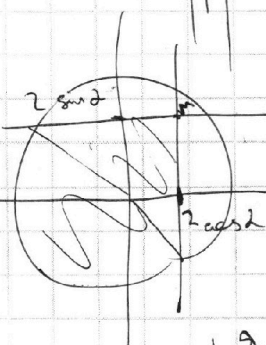
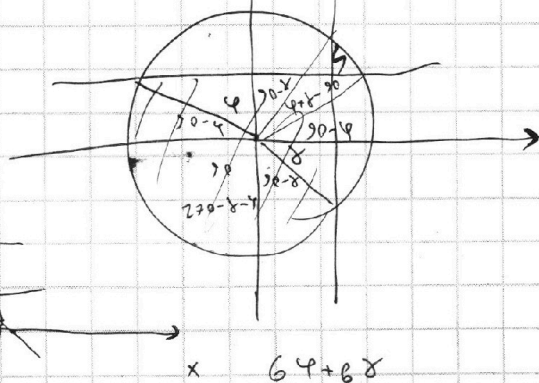
$$x \cos \alpha = y \sin \alpha$$

$$y = 2 \sin \alpha \quad x = 2 \cos \alpha$$

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$



$$\frac{2 \sin \alpha}{3}$$
$$\frac{2 \cos \alpha}{3}$$
$$\delta = \frac{2 \cos \alpha}{3}$$



$$2 \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$
$$+ 2 \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

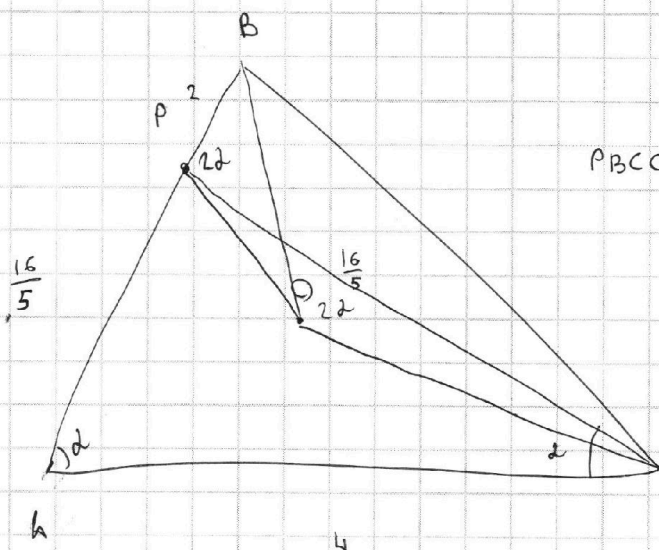
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3 \cdot 4}{1! (x-4)! \cdot x!} = x$$
$$\frac{1 \cdot 2! (x-4)! (x-2)!}{1! (x-4)! (x-2)!}$$

$$\frac{2! (x-2)! (x-4)! \cdot 1! \cdot 12}{x! (x-4)! \cdot 2!}$$
$$(x-1)(x-2)$$



Q - center mass of

PBCC - mass

$S_{\triangle ABC} = ?$

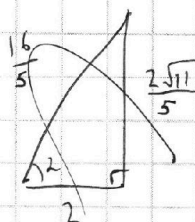
$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$PC = \frac{16}{5}$$

$$\frac{16}{5} - 4 = \frac{16}{5} - \frac{20}{5} = -\frac{4}{5}$$



$$\sin 2\alpha = \frac{8}{\sqrt{11}}$$
$$\cos$$